О. Б. Шейнин

Статьи по истории теории вероятностей и статистики

впервые публикуются по-русски

Публикация архивных материалов

часть III

Берлин
2011

Текст этого сборника размещён в Интернете

ISBN 978-3-942944-15-1

На этой же страничке находятся многие другие наши последние работы, приведен список публикаций

oscar.sheynin@googlemail.com

NG Verlag, Berlin

Содержание

От автора

Первый раздел сборника состоит из переводов некоторых наших английских статей, опубликованных в 1971 – 2011 гг. Переводы дополнены, иногда значительно, поскольку учитывают последующие сведения.

Второй раздел составлен по архивным данным. Материалы, написанные на иностранных языках, как правило, приводятся с переводом; отсутствие перевода в одном случае обосновано ниже. В отличие от первого раздела сборника, мы предваряем почти всё, включённое сюда, конкретными пояснениями.

Мы употребляем очевидные сокращения, МНКв и ЦПТ, а *Труды* Гаусса обозначаем буквой *W* с указанием номера тома.

[ix] Переписка Саймона Ньюкома (1835 – 1909) свидетельствует, что он часто выезжал в Европу, и уж наверное не только для отдыха. Он был многосторонним учёным и популяризатором науки, участвовал в фундаментальном эксперименте по определению скорости света, опубликовал статьи по статистике населения, метеорологии и экономике, а Вашингтонское антропологическое общество наградило его статью об обязанностях гражданина США. Главным занятием его жизни была, однако, обработка более 62 тысяч астрономических наблюдений Солнца и планет, произведенных на различных обсерваториях мира, и соответствующее обновление астрономических констант. Описание его жизни и трудов см. Benjamin (1910) и Marsden (1973), а библиографию его сочинений составил Archibald (1924); мы (2002) исследовали его как статистика.

Переписка приведена на языке оригинала (английском) и в несколько сокращенном переводе, а общая библиография и краткие сведения об учёных, относящиеся к [ix] и [x], приложены к переписке Ньюкома и Пирсона [x]. Примечания в обоих случаях даны только к переводам.

Сокращение Darmst означает, что соответствующий документ был в своё время получен химиком и коллекционером автографов Людвигом Дармштедтером (Ludwig Darmstädter, 1846 – 1927). Шифр у нескольких писем отсутствует, но во всяком случае они относятся к той же коллекции. Это устанавливается по косвенным данным, особо – по единой для всех писем нумерации страниц. В качестве автографов Дармштедтеру как правило сообщались биографические сведения. Прислал свой автограф и Ньюком (Darmst J1871(11)) на бланке журнала *American Journal of Mathematics*, редактором и помощником редактора которого он был долгое время:

Мне нравится, если могу, делать каждого счастливым (*I like to make everyone happy when I can)*.

[x] Переписка Ньюкома и К. Пирсона хранится частично в Библиотеке Конгресса в Вашингтоне (Письма 1, 2, 4 и 7), частично – в Лондонском университетском колледже (University College London, Special Collections, Pearson Papers, 773/7, – остальные письма). Впрочем, копии четырех упомянутых выше писем имеются и в Лондоне, и все письма в копиях мы оттуда и получили. Несколько астрономических таблиц, упомянутых Ньюкомом, мы не смогли установить.

Предваряет переписку сопроводительное письмо С. Стиглера. Он полагал, что Письмо 8, возможно, не было окончено, но оно было написано от руки и подписано, хотя, может быть, и не отправлено. Его датировка, однако, заведомо ошибочна, что Стиглер также заметил. Текст Письма 7 был написан, как сказано, самим Пирсоном, но почему-то в третьем лице. Отсутствующее письмо 24 июня 1904 г., упомянутое Стиглером, было послано не Ньюкому, а в Институт Карнеги, см Письмо 5.

Карл Пирсон (1857 – 1936) был прикладным математиком и философом, но в первую очередь статистиком, который основал биометрию, главную ветвь позднее оформившейся математической статистики. Только так, видимо, следует понимать название статьи Уилкса (Wilks 1941).

Самым существенным описанием его жизни и трудов остаётся E. S. Pearson (1936 – 1937); мы сами (2010) кратко охарактеризовали его. Библиографию работ Пирсона см. Morant et al (1939) и Merrington et al (1983), а его ранние статьи частично перепечатаны (1948).

Среди множества других источников о нём мы выделяем автора (Camp 1933), который был сотрудником Пирсона. Явно приукрасив своего бывшего руководителя, он тем не менее сообщил о вряд ли известных фактах и впечатлениях. В течение многих десятилетий советские статистики считали его своим основным идеологическим врагом и отрицали все его достижения, поскольку Ленин (1909/1961) назвал его *добросовестным и честным врагом материализма* (с. 190) и *последовательным и ясным махистом* (с. 174). Эти титулы Пирсон заслужил своей *Грамматикой науки* (1892), которая оказала громадное влияние на современников и переиздаётся до сих пор. Она же послужила причиной, по которой Ньюком усиленно просил его сделать доклад на международном конгрессе (Письма №№ 3 и 4). Он же высоко ценил статистические исследования Пирсона (Письма №№ 3 и 6).

[xi] Письма Маркова Феликсу Клейну, хранящиеся в библиотеке Гёттингенского университета (Cod Ms. F. Klein. 10:117 – 126), были написаны в основном в связи с задуманной им публикацией своих рукописей в журнале *Math. Annalen*, одним из редакторов которого тот был. Ответные письма Клейна (Архив РАН, фонд 173, оп. 1, № 40) показывают, что, хотя в те годы Марков лишь начинал свою научную деятельность, Клейн уже тогда весьма уважительно относился к своему корреспонденту. На Письмо № 8 ответа нет; можно заключить, что он не сохранился. Ответить Клейн должен был, он ведь стал членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Его избрание, см. Письмо № 6, последовало, кстати сказать, по предложению Маркова; к нему, видимо, лишь присоединился Н. Я. Сонин. Памятник Эйлеру был установлен в Петербурге в 1837 г. (Юшкевич 1968, с. 110). О возможном возведении нового памятника, о чём идёт речь в этом письме, мы ничего не смогли узнать.

Марков написал свои письма по-французски, но вот последнее письмо написано по-немецки, непонятно почему. Вот ответ Отдела рукописей Гёттингенского университета (Baerbel Mund, 3 августа 2011) на наш запрос:

Нельзя исключить, что другой немецкий математик передал это письмо Клейну. … Но во всяком случае оно хранится в нашей коллекции архива Клейна, а потому было в его владении.

Иначе говоря, Марков, быть может, послал это письмо кому-то другому.

Письма Клейна Маркову написаны по-немецки. Их даты, конечно же, по новому стилю, почти наверняка означают, что и Марков указывал даты своих писем таким же образом. Действительно, Письмо Клейна № 15 9 дек. 1895 г. было ответом на Письмо Маркова № 6 9 дек. того же года. И всё-таки молниеносный ответ Клейна наводит на мысль, что дата на первом письме не совсем верна (на втором письме она была подтверждена почтовым штемпелем).

В этом письме Клейн сообщает, что находится в депрессии ввиду *сопротивления* своей научной работе. Burau & Schoeneberg (1973, с. 398 и 399) сообщают, что он *противился основной школе берлинских математиков, которую возглавлял Вейерштрасс*, и *не был удовлетворён усиливающейся абстрактной сутью современной математики*.

Статьи Маркова, включённые в приведенную библиографию, уточняют переписку. Её математические темы не относятся к теории вероятностей или статистике, а потому чужды нам, и мы не стали её переводить и комментируем лишь ограниченно.

В 1915 г. Клейн был исключен из Петербургской академии, см. Гродзенский (1987, с. 90 – 91). Приведенные им сведения со ссылками на архивные источники показывают, что подобные исключительные методы Академия принимала крайне неохотно, хотя случай с Клейном оказался особенным: он, вместе с Освальдом, Планком и другими подписал *Воззвание*, вопреки истине оправдывающее *чистое дело Германии в навязанной ей тяжелой борьбе за существование*. В конце концов Академия исключила из своих членов и других учёных из стран, воевавших с Россией (там же, со ссылкой на газетную статью).

В третьем издании БСЭ (т. 12, 1973) в статье *Клейн* он не был назван членом-корреспондентом отечественной академии, однако всего лишь через год его как бы *восстановили* (Левшин и др. 1974): упомянули об его избрании без всяких примечаний.

Вот текст диплома Клейна (библиотека Гёттингенского университета, Cod. Ms. F. Klein 114.19):

Императорская академия наук

На основании Устава, Высочайше дарованного ей в 8 день Января 1836 года, избрала Феликса Клейна в Гёттингене своим членом-корреспондентом по разряду математических наук и постановила выдать ему настоящий диплом.

С.-Петербург, 29 декабря 1895 года

Президент [нрзб, Константин Константинович Романов]
Вице-президент Леонид [Николаевич] Майков
Непременный Секретарь Николай [Федорович] Дубровин

[xii] А. В. Васильев отправил приводимое письмо Якобу Люроту (1844 – 1910), профессору в нескольких немецких университетах, работы которого относились к нескольким отраслям математики (математическая логика, теория инвариантов, геометрия), а также к механике и геодезии, см. о нём литературу, указанную в Библиографии.

С 1897 г. медали Лобачевского удостоились виднейшие математики, в том числе С. Ли, Ф. Клейн, А. Пуанкаре и Д. Гильберт, см. Юшкевич (1968, с. 519). В этом же источнике (с. 520 – 521) сообщаются сведения об Александре Васильевиче Васильеве (1887 – 1907), профессоре Казанского университета, пропагандисте неевклидовой геометрии, работавшего во многих отраслях математики (включая историю математики) и поддерживавшего тесные связи с европейскими учёными. Он также находился в длительной переписке с А. А. Марковым и был председателем Казанского физико-математического общества.

[xiii] Запись неразборчива, многих слов мы не смогли прочесть, и приводить её полный текст не имело смысла. Впрочем, вполне можно было ограничиться обзором. Дата лекции не указана. Известно, что в 1902 – 1917 гг. Чупров читал лекции по статистике в Петербургском (Петроградском) Политехническом Институте; ни о каких иных его лекциях мы ничего не знаем, и вряд ли они имели место. Но трудно себе представить, что подобный, крайне поверхностный и содержавший неопределённые и даже ошибочные утверждения текст мог быть прочитан студентам высшей школы, или что лекцию прочитал именно Чупров (хотя часть недостатков могла быть виной автора записи). О Чупрове напоминают лишь ссылки на хорошо знакомые ему работы европейских статистиков.

[xiv] Мы ничего не смогли выяснить о приведенном письме. Мы не нашли сведений о его авторе; не знаем, от имени какого общества он написал это письмо; и объяснения, почему Марков вошёл, а затем вышел из него, у нас нет. Быть может кто-либо из читателей сможет прояснить это хотя бы частично.

[xv] Мы описывали жизнь и труды Павла Алексеевича Некрасова (1853 – 1924) в нескольких статьях, см., например, Чириков и Шейнин (1994). Павел Александрович Флоренский был религиозным философом и математиком. Его книга (1914) содержала обширное дополнение естественнонаучного и математического характера, см. также его раннее сочинение (1999), посвященное философии математики. О взаимоотношениях Флоренского и Лузина см. Демидов и др. (1989) и Форд (1997), а Петрова и Сучилин (1993) рассмотрели его геометрическое истолкование комплексных чисел. Родился Флоренский в 1882 г., умер в 1943 г. (БСЭ, 2е изд., т. 27). Однако, в Предисловии ко второму изданию его книги (1914) указано, что он был расстрелян в 1937 г.

Письма Некрасова хранятся в семье Флоренского. Довольно давно ознакомил нас с ними С. С. Демидов. К сожалению, мы тогда лишь составили выписки из них, писем же больше не видели.

Основные пояснения к письмам Некрасова читатели могут найти в нашей статье, упомянутой выше. Так, мы (с. 143, Прим. 33) заметили, что Марков выступил против Буняковского, который заявил, что духовный мир не подчиняется физическим законам и пр. и что это (да и попытка Маркова добиться отлучения от церкви) послужило причиной отношения Некрасова к *панфизистам* Маркову и К^0. Назвать Лапласа панфизистом Некрасов не осмелился. Добавим, что покойный член-корреспондент АН СССР Л. Н. Большев сказал нам (не ссылаясь ни на какой источник), что Синод решил, что отлучение было бы слишком большой честью для Маркова; его посчитали *отпавшим* от церкви.

[xvi] Оскар Николаевич Андерсон (1887 – 1960) был учеником Чупрова и последним представителем Континентального направления статистики (Шейнин 1990/2010, § 7.8). Мы также упомянули там (§ 15.6), что 9 июня 1914 г. Андерсон отправил Пирсону свою рукопись (тогда же опубликованную в *Биометрике*) с сопроводительным письмом и привели текст ответа Пирсона на немецком языке и в переводе.

Переписка Пирсона хранится в Лондонском архиве, там же и письма Андерсона 27 ноября и 10 дек. 1925 г. Ниже приведен перевод второго из них. Первое письмо, хоть и являвшееся математическим, не было опубликовано, однако появилась в свет обширная статья Андерсона страниц в 60, а не 15 – 20, первоначально обещанных Пирсоном. Она не была при этом переведена с немецкого языка, возможно ввиду своей длины. Статьи Андерсона в *Биометрике* перечислены в Библиографии. Все кроме самой первой были посвящены методу последовательных разностей.

I

История статистики

Statistics, History of.
Intern. Enc. of Stat. Sci., vol. 3. Springer, 2011, pp. 1493 – 1504

Указанный источник включал параграф, написанный редактором, проф. Миодрагом Ловричем, об истории появления термина *статистика*, особенно в английском языке. В перевод мы этот материал не включили.

1. Государствоведение и политическая арифметика. Государствоведение или университетская статистика родилось в Германии в середине XVII в., а столетием позже Ахенваль основал гёттингенскую школу, которая описывала различные стороны жизни того или иного государства в основном без использования числовых данных. Его ученик Шлёцер (Schlözer 1804, с. 86) придумал крылатое изречение: *История – это статистика в течении, а статистика – остановившаяся история*. Его последователи восприняли эти слова как определение статистики (которая, стало быть, не занималась изучением причин и последствий).

Также в середине XVII в. появилась политическая арифметика (Граунт, Петти). Она широко использовала числа и обсуждала причины явлений и соотношения между явлениями и таким образом возвестила рождение статистики. Граунт (1662/1899) заявил, что необходимо знать *сколько людей* каждого пола, возраста, религии, ремесла и т. д. проживает в государстве (с. 396), привел соответствующие оценки (иногда существенно ошибочные), особенно относящиеся к медицинской статистике. Он смог применить скудные и ненадежные статистические данные для оценки населения Лондона и Англии, равно как и влияния различных болезней на смертность и попытался установить закономерности в движении населения. Вопреки преобладавшему мнению, он показал, что численности обоих полов примерно равны друг другу (с. 356), грубо оценил соотношение мужских и женских рождений (с. 389) и разумно подметил, что данные о смертности от сифилиса были занижены ввиду моральных соображений.

Граунт (с. 387) также опубликовал первую таблицу смертности. Будучи изрядно ошибочной, она тем не менее имела громадное методологическое значение, и ее использовали, в первую очередь, Гюйгенс и Якоб Бернулли.

Статистика населения была одной из основных тем политической арифметики, и её представители определенно соглашались с тем, что *Во множестве народа – величие царя, а при малолюдстве народа беда государю* (Притчи 14:28). И вот еще один мостик между Ветхим заветом и этой новой научной дисциплиной: Моисей послал людей осмотреть землю Ханаанскую *и народ, живущий на ней, силен ли он или слаб, малочислен ли он или многочислен* и *хороша ли* [земля] *или худа*

(Числа 13: 3 – 21). В то же время Граунт (с. 397) сомневался в том, что статистические исследования нужны кому-либо, кроме короля и его главных министров.

Табличная статистика, которая возникла в середине XVIII в., могла бы служить связующим звеном между обеими новыми дисциплинами, но её представителей считали *рабами таблиц* (Knies 1850, p. 23). Впрочем, в 1680-е годы Лейбниц рекомендовал составлять *статистические таблицы* с числовыми данными или без них и написал несколько рукописей, впервые опубликованных в XIX в. (Leibniz 1986), относящихся и к государствоведению, и к политической арифметике.

Появились и количественные описания явлений без изучения причин и последствий. В 1834 г. было учреждено Лондонское статистическое общество, которое заявило (Anonymous 1839), что все выводы *должны будут допускать математическое доказательство,* что было слишком затруднительно, и указало, что статистика не обсуждает причин и следствий, что было невозможно предотвратить.

В 1825 г. Louis ввёл так называемый *количественный метод* в медицину, фактически применявшийся в естествознании издавна. Его сторонники (включая Даламбера) ратовали за составление числовых данных о болезнях, обходились по существу без приложения теории вероятностей (и полагали, что она вообще почти не нужна). Подобный подход проявился и в других отраслях естествознания. В 1872 г. Проктор нанес 324 тысяч звезд на свои карты звездного неба и ошибочно заявил, что никакие теории здесь уже не нужны. Положительные примеры применения этого метода видны в составлении статистических ежегодников, звездных каталогов и т. д., но и этот труд требовал предварительно обсуждать собранные данные. Эмпиризм, лежащий в основе количественного метода, был очевиден и в трудах биометрической школы (§ 7).

Государствоведение продолжало существовать, хотя и в менее широких границах; отпал, например, климат. Но по крайней мере в Германии оно еще изучается в университетах, определенно применяет числовые данные и исследует причины и последствия. Оно таким образом частично преобразовалось в приложение статистического метода к различным дисциплинам и данному государству. Мнение Чупрова (1909/1959, с. 50; 1922b, с. 339) о том, что государствоведение возродится, но уже с упором на числовые данные и определит сущность статистики, оказалось частично ошибочным: оно вовсе не умирало и не определяет статистики.

2. Статистика и статистический метод. Теория ошибок. Колмогоров и Прохоров (1984) определили математическую статистику как ветвь математики, систематизирующую, обрабатывающую и применяющую статистические данные, под которыми понимается число объектов в некоторых совокупностях. Разумеется, они исключили сбор данных и их предварительное исследование, которое по существу появилось в середине XX в. и является важной главой теоретической статистики. Споры о различии между математической и теоретической статистиками можно решить, полагая, что именно сбор и исследование данных относятся к последней и определяют ее отличие от первой.

Первое достойное определение теории статистики (которая, видимо, почти совпадает с теоретической статистикой) предложил Butte (1808, с. XI): это – наука о понимании и оценке статистических данных, их сбору и систематизации. Неясно, включал ли он в свое определение и приложения статистики.

Громадное количество определений статистики (без каких-либо прилагательных) было предложено начиная со Шлёцера (§ 1), но указанного выше достаточно. Впрочем, упомянем еще Гаттерера (Gatterer 1775, с. 15), у которого цели статистики частично относились к новому государствоведению (§ 1): понять состояние государства, исходя из его прежних состояний.

Статистический метод – это метод исследования, основанный на математической обработке количественных данных, и в основном его имеют в виду в связи с естествознанием. Его первая стадия была характерна выявлением статистических закономерностей, основанных на общих представлениях; вот афоризм Гиппократа (1952): полные люди склонны (!) умирать в более раннем возрасте, чем остальные.

Здесь можно усмотреть качественную корреляцию, вполне совместимую с качественным характером древней науки. Во время второй стадии выводы основывались на статистических данных (Граунт). Нынешняя, третья стадия началась в середине XIX в. с появлением первых стохастических критериев для проверки статистических выводов, см. Пуассон (1837), Sheynin (1978, § 5.2). Впрочем, эти стадии не отделены друг от друга полностью: даже древние астрономы накапливали свои количественные наблюдения.

Исключительно важные открытия удалось сделать без применения критериев. Оказалось, например, что очистка питьевой воды в восемь раз снижала смертность от холеры (Snow 1855, с. 74 – 86), что объясняло пути распространения холерных эпидемий. Аналогично, проявился полный успех оспопрививания (Дженнер, в 1798 г.), хотя потребовались дополнительные статистические исследования технологии прививок и без разочарований обойтись не удалось.

Теория ошибок относится к статистическому методу [vi, § 1]. Ее основная особенность – применение *истинного значения* измеряемых констант. Фурье (1826/1890, с. 533 – 534) определил его как предел среднего арифметического из измерений, что эвристически схоже с частотным определением вероятности по Мизесу и означает, что остаточные систематические ошибки включаются в это значение [vi, § 3].

С момента своего зарождения во второй половине XVIII в., см. Т. Симпсон (1756; 1757) и Ламберт (1765, § 321), который и ввел термин *теория ошибок* До 1920-х годов эта теория оставалась основным полем приложения теории вероятностей, а математическая статистика переняла у нее принципы наибольшего правдоподобия (Ламберт 1760, § 303) и наименьшей дисперсии (Гаусс 1823, § 17).

Первое гауссово обоснование метода (точнее, принципа) наименьших квадратов (1809) для уравнивания *косвенных наблюдений* (т. е. для оценивания неизвестных, входящих в избыточную систему линейных уравнений, коэффициенты которой задаются соответствующей теорией, а свободные члены – результаты *непосредственных наблюдений*) было основано на (независимо введенном им) принципе наибольшего правдоподобия и на предположении о том, что среднее арифметическое – лучшая оценка истинного значения непосредственных наблюдений.

Его второе обоснование 1823 г., весьма тяжело написанное, было основано на принципе наименьшей дисперсии искомых оценок. Колмогоров (1946) мимоходом заметил, что можно было бы принять выведенную Гауссом формулу выборочной дисперсии за её определение. Во всяком случае, её вывод несложен, а принцип наименьших квадратов последует сразу же, потому что указанный вывод требует только линейности и независимости исходных уравнений и несмещённости оценок неизвестных. Можно предположить, что Гаусс это прекрасно знал и ввёл два независимых обоснования принципа наименьших квадратов. Оставив только второе, можно будет отказаться от рассуждений 1809 г., которые ввиду своего изящества и сравнительной простоты оставались основными [iv, § 3].

Многие авторы предпочли обоснование 1823 г., и в том числе Марков (1899/1951, с. 247), который тем не менее отрицал всякую оптимальность МНКв и тем самым обесценил своё предпочтение. Вопреки его мнению, в случае нормального распределения ошибок наблюдения МНКв обеспечивает совместную эффективность оценок (Петров 1954).

Один из первых методов уравнивания косвенных наблюдений предложил Бошкович (Cubranic 1961; 1962; Sheynin 1973), который участвовал в прокладке градусного измерения в Италии. В некотором смысле его рекомендация приводила к выбору медианы.

Уже Кеплер (Шейнин 2005, § 1.2.4) считал среднее арифметическое *буквой закона*. Уравнивая косвенные наблюдения, он, видимо, применял элементы принципа минимакса (выбора *решения* избыточной системы уравнений, соответствующего наименьшему абсолютному максимальному остаточному свободному члену) и метода Монте-Карло: он искажал наблюдения произвольными малыми *поправками* так, чтобы они соответствовали друг другу.

Древние астрономы считали непосредственные наблюдения своей собственностью; они не сообщали об отброшенных результатах и выбирали любую разумную оценку. Погрешности наблюдений были значительными, и теперь известно, что при *плохих* распределениях среднее арифметическое не лучше отдельного наблюдения, а иногда хуже его.

Бируни, арабский учёный X – XI вв., который превзошёл Птолемея, ещё не придерживался среднего арифметического, а выбирал различные оценки (Шейнин 1992).

Существует и детерминированная теория ошибок, которая исследует весь процесс наблюдений без применения стохастических представлений и близка к предварительному исследованию данных и планированию эксперимента. Уже древние астрономы умели выбирать наилучшие моменты наблюдений, чтобы неизбежные ошибки меньше всего влияли на результаты (Aaboe & De Solla Price 1964).

Не позднее XVII в. естествоиспытатели включая Ньютона начали учитывать подобные соображения. Даниил Бернулли чётко определил случайные и систематические ошибки, Гаусс и Бессель породили новую стадию экспериментальной науки, предполагая, что каждый инструмент должен быть полностью исследован и отъюстирован. Бессель (1839) определял, в каких двух точках должны находиться опоры измерительного жезла, чтобы он в наименьшей степени изгибался (и изменял свою длину) под влиянием собственного веса, см. также [iv, § 7.2].

Последний пример: выбор исходных данных. Некоторые естествоиспытатели XIX в. полагали, что можно надежно использовать разнородные данные. Английский хирург Дж. Симпсон (J. Y. Simpson 1847 – 1848/1871, с. 102) тщетно изучал смертность от ампутации конечности по данным многих больниц за 45 лет. С другой стороны, заключения иногда делались при отсутствии данных. У. Гершель (W. Herschel 1817/1912, т. 2, с. 579) заявил, что размер звезды, случайно отобранной из многих тысяч, вряд ли будет существенно отличаться от их среднего размера. Он не знал, что размеры звезд чудовищно различны, так что их среднее не имеет смысла, да и вообще нельзя ничего узнать из незнания. *Ex nihilo nihil!*

3. Якоб Бернулли, Муавр, Бейес. Случай и предначертание. Теория вероятностей возникла в середине XVII в. (Паскаль, Ферма) с фактического введения понятия ожидания выигрыша в азартной игре. Вначале она изучала эти игры, затем (Галлей, 1694) – таблицы смертности и страхование и (Гюйгенс, переписка 1669 г.) задачи на смертность.

Исследование Галлея, хотя и классическое, содержало ошибочное утверждение. У населения Бреслау, города, население которого он изучал, ежегодная смертность составляла 1/30, – как и в Лондоне, – он же счел Бреслау статистическим стандартом. Если такое понятие допустимо, то стандарты должны быть нескольких уровней.

Равновозможных случаев, необходимых для подсчета шансов (еще не вероятностей), в подобных приложениях не было, но Якоб Бернулли в своём *Искусстве предположений* доказал, что апостериорные статистические шансы появления события стохастически стремились к неизвестным априорным шансам, а его закон больших чисел (ЗБЧ, термин Пуассона) определял и скорость указанного стремления.

Марков (1924, с. 44 – 52) уточнил промежуточные вычисления Бернулли и тем самым усилил эту скорость, а Пирсон (1925) достиг еще лучших результатов, но применил для этого не известную Бернулли формулу Стирлинга (как и Марков в дополнительном исследовании). Он также неосновательно сравнил теорему Бернулли с неверной птолемеевой системой мира и, стало быть, не ценил теорем существования (в данном случае, предельного свойства статистических шансов).

Статистики не обращали внимания на скорость сходимости и не ссылались на Бернулли, если не были уверены, что априорная вероятность исследуемого события действительно существует, да и вообще почти не ценили теории вероятностей (а на более сильные ЗБЧ Пуассона и Чебышева вряд ли ссылались вообще). Они не знали или забыли, что математика как наука не зависела от существования объектов ее изучения.

В действительности их задача состояла в том, чтобы проверять, выполняются ли предпосылки наличия *испытаний Бернулли* (их взаимной независимости и постоянства вероятности изучаемого события). Сформулировал эту задачу Лексис (Lexis, § 7), а предшествующее указание Курно (1843, § 86) на то, что априорную вероятность можно заменить статистическими данными в соответствии с *принципом Бернулли*, осталось незамеченным. С другой стороны, сам Бернулли допустил применение статистической вероятности в случае, в котором априорная вероятность заведомо не существовала.

Классическое определение вероятности (введенное Муавром (1712), а не Лапласом) с его равновозможными случаями всё еще в ходу. Аксиоматический подход не помогает статистикам, но и вообще приходится пользоваться статистическими данными, т. е. исходить из частотной теории Мизеса, разработанной в 1930е годы, но так и не признанной в качестве строгой математической находки.

В 1712 г. Арбутнот применил весьма простые вероятностные рассуждения, чтобы доказать, что только божественное провидение могло быть причиной преобладания в Лондоне мужских рождений над женскими в течение 82 лет подряд. Да, вероятность случайного появления этого факта исчезающе мала, но вот задача Даламбера – Лапласа: длинное слово состоит из букв – кубиков; случайно ли оно составлено? В отличие от Даламбера, Лаплас (1814/1999, с. 837, левый столбец) решил, что, хоть все расположения букв равновероятны, слово имело смысл, а потому было составлено специально. Он таким образом практически дал ответ на задачу, которая в общем виде не решена и до сих пор: не удается определить, является ли конечная последовательность нулей и единиц случайной.

Арбутнот мог бы заметить, что провидение выражалось биномиальным законом, который, однако, еще не был известен. Даже его введение Бернулли и последующими учеными не было всеобще воспринято: философы XVIII в. почти всегда воспринимали случайность лишь в *равномерном* смысле.

Разрабатывая задачу Арбутнота о мужских и женских рождениях, Муавр (1733) существенно усилил ЗБЧ, доказав первый вариант центральной предельной теоремы (ЦПТ) и тем самым введя в теорию вероятностей нормальное распределение, как его стали называть в конце XIX в. Лаплас несколько улучшил его результат, и Марков (1914/1951, с. 511) назвал их положение *теоремой Муавра – Лапласа*.

Муавр посвятил первое издание своего *Учения о шансах* (1718) Ньютону, и там, в этом посвящении, перепечатанном на с. 329 третьего издания, мы усматриваем его понимание задачи новой теории: отличие случайного от божественного провидения, но еще не изучение различных (и еще не известных) распределений и т. д.

Отличать случайность от необходимости в обычной жизни приходилось еще в древней Индии (Bühler 1886/1967, p. 267): несчастье, происшедшее со свидетелем в течение недели и только недели после его выступления в суде, приписывалось наказанию божества (за лжесвидетельство).

Сам Ньютон (рукопись 1664 – 1666 гг.; 1967, с. 58 – 61) рассуждал о геометрической вероятности и о статистической оценке вероятностей различных бросков неправильной игральной кости [ii, § 1.1].

Бейес, чей посмертный мемуар вышел в 1764 г. с дополнением 1765 г., повлиял на статистику не меньше, чем Лаплас. Так называемой теоремы Бейеса у него не было, ее ввел Лаплас (1814/1999, с. 837, левый столбец) без упоминания Бейеса. В рассуждениях последнего была логическая трудность: он приписал вероятность постоянной величине. Кроме того, априорные вероятности редко известны, но можно придерживаться принципа Лапласа (1803/1878, с. XI): принять гипотезу и непрестанно исправлять ее на основе новых наблюдений (если они есть!).

Ввиду указанных трудностей английские и американские статистики в течение примерно 30 лет отказывались от *бейесовского подхода*, но в 1967 г. теорема Бейеса *вернулась с кладбища* (Cornfield 1967).

Основную часть мемуара Бейеса составляет его стохастическая оценка поведения неизвестной априорной вероятности появления изучаемого события при возрастании числа бернуллиевых испытаний, т. е. решение задачи, обратной по отношению к изученной Бернулли и Муавром. В 1908 г. Тимердинг, редактор немецкого издания мемуара Бейеса, представил его результат в виде предельной теоремы. Сам Бейес этого не сделал, поскольку в отличие от других математиков своего времени, включая Муавра, избегал пользоваться расходящимися рядами, не применил их и Тимердинг.

И прямая, и обратная задачи исследовали поведение центрированных и нормированных случайных величин, но в обратной задаче в отличие от прямой априорная вероятность не была известна и дисперсия должна была быть (и действительно была) значительнее и для достижения той же точности требовалось большее число опытов. Понял это только Бейес, хоть и он тоже не владел понятием дисперсии, и Мизес вполне мог бы считать его своим основным предшественником (а современные учёные – основываться на нём!)

Статистики ни разу не сослались на Бейеса, достижение которого было существенным: оно не следовало из предыдущих исследований и завершило построение первоначального варианта теории вероятностей.

4. Статистика в XVIII в. Позднейшие статистики восприняли цель теории вероятностей как ее понимал Муавр (§ 3), который фактически применил идею Ньютона об открытии божественных законов природы. Они, и особенно Зюссмильх, сделали следующий логический шаг, пытаясь установить божественные закономерности в движении населения. Эйлер существенно участвовал в составлении наиболее важной главы второго издания *Божественного порядка* (1761 – 1762) Зюссмильха, а Мальтус (1798) воспользовался одним из его выводов, именно тем, что население возрастает в геометрической прогрессии.

Зюссмильх, в частности, изучал относительное число женитьб и детей, рожденных вне брака, и тем самым положил начало моральной статистике. Ее появление закрепилось в работах Герри (Guerry) и Кетле в 1830-е годы и позднее.

Эйлер (1923) опубликовал несколько изящных и методически важных мемуаров о статистике населения и ввел такие понятия, как возрастание населения и период его удвоения. Методически интересны были и исследования Ламберта по этой же теме [iii, § 2]. При изучении количества детей в семьях он (1772, § 108) произвольно увеличил вполовину общее число детей в своих исходных данных, видимо учитывая мертворожденных и детскую смертность.

Исключительно ценны были исследования Даниила Бернулли 1760 – 1770-х годов. Первый свой мемуар он (1766) посвятил вариоляции, не вполне безопасной прививке легкой формы смертельной оспы здоровому человеку (оспопрививание по Дженнеру появилось в конце того же века). Он доказал, что вариоляция увеличивает средний срок жизни несколько более, чем на два года, и потому была весьма полезна, особенно для нации в целом.

Далее, Даниил Бернулли (1768) исследовал продолжительность женитьб, что было важно для страхования *на две жизни*. Наконец, он (1770 – 1771) обратился к соотношению мужских и женских рождений, желая, видимо, установить его *истинное значение* (которое не существует), но разумно воздержался от окончательной оценки. Но он при этом ввел нормальное распределение, хотя и не сослался на Муавра, статистические труды которого стали известны на континенте Европы лишь в конце XIX в.

Лаплас (1812, гл. 6) оценил население Франции по выборке (ср. § 6) и исследовал соотношение мужских и женских рождений. В этом последнем случае он ввел *функции весьма больших чисел,* рождений a и b, $x^a(1-x)^b$ и смог проинтегрировать их. Как обычно, он представил свои работы небрежно. Подсчитав вероятность того, что мужские рождения будут преобладать и впредь в течение ста лет, он не добавил *при тех же условиях жизни*, а окончательную оценку населения Франции (в 1812 г., в своей *Аналитической теории вероятностей*) указал так, что Пуассон, реферируя это классическое сочинение, ошибочно сослался на другое число. *Опыт философии* … Лапласа (1814) обратил всеобщее внимание на теорию вероятностей и статистику, но, к сожалению, это сочинение было почти забыто ввиду появления интересных, но крайне небрежно написанных работ Кетле (§ 5).

5. Теория вероятностей и статистика. Кетле. И Курно (1843), и Пуассон (1837) полагали, что основой статистики должна быть математика, а Пуассон с соавторами (1835) первыми прямо заявили, что статистика является *действующим механизмом исчисления вероятностей* и имела дело с массовыми наблюдениями. Наиболее влиятельные ученые того времени разделяли первое утверждение и, видимо, также и второе.

Фурье, в письме Кетле (1869, т. 1, с. 103) примерно 1825 г., указал, что статистика должна основываться на математических теориях, а Коши (1845/1896, с. 242) заметил, что статистика указывает, как оценивать учения и институты, и должна применяться *со всей строгостью*. Впрочем, Пуассон и его бывший ученик Gavarret (Гаварре), ставший врачом и опубликовавший первую книгу по медицинской статистике (1840), имели в виду лишь строгость, обусловленную большим числом наблюдений (например, при сравнении двух эмпирических частот), и немецкий врач Либермейстер (прим. 1877) заявил, что требовался другой (математико-статистический) подход.

Отношения между статистикой и математикой оставались неопределенными. Кнапп (1872, с. 116 – 117) заметил, что закладки цветных шариков в *лапласовы урны* было еще недостаточно, чтобы *вытряхнуть из них статистику*. Даже намного позже математики, видимо, пытались добиться чего-то похожего, потому что Чупров (1922а/1960, с. 416) заявил, что *математиков, играющих в статистику, могут победить только математически вооруженные статистики*. В XIX и начале XX в. они всё еще были лишены подобного вооружения.

Кетле, который в течение нескольких десятилетий в середине XIX в. занимал ведущее положение в статистике, популяризировал теорию вероятностей. Он без устали обрабатывал статистические данные, пытался стандартизировать статистику населения в международном масштабе, положил начало антропометрии, заявил, что статистика должна помогать предвидеть последствия разнообразных изменений в жизни общества, собирал и систематизировал метеорологические данные. Будучи религиозным, он (1846, с. 259) отрицал всякую эволюцию видов, что в некоторой степени объясняет, почему континентальные статистики намного отстали от английских в изучении биологических проблем.

Кетле был небрежен в своих трудах, так что Кнапп (1872, с. 124) заметил, что этот богатый идеями ученый не был методичен, а потому не являлся философом. Так, Кетле (1836, т. 1, с. 10) без должного обоснования утверждал, что преступность постоянна; он, впрочем, добавил, хоть и не вполне четко: при неизменных социальных условиях.

Кетле обращал внимание на предварительную обработку данных и по существу с него началось их предварительное исследование (§ 2). Он (1846, с. 278), например, указывал, что слишком подробное подразделение данных являлось *научным шарлатанством*. Он (1848, с. 38) ввел понятие о среднем человеке и в немыслимом физическом смысле (средний рост, к примеру, несовместим со средним весом), и в моральной сфере, приписал ему средние наклонности к преступлению (1836, т . 2, с. 171) и женитьбе (1848, с. 77) и объявил его эталоном человечества. Лишь мимоходом он (1832, с. 1) упомянул в этом контексте ЗБЧ Пуассона, так что и в моральном смысле средний человек не был обоснован. Хуже того: Кетле не подчеркивал, что эти наклонности нельзя приписывать отдельному лицу, и после его смерти немецкие статистики, не понимавшие сути дела, начали осмеивать его идеи (а заодно и теорию вероятностей в целом), что привело к разрушению *кетлетизма*.

В 1949 г. Фреше заменил среднего человека *типичным*, а именно человеком, наиболее близким среднему. Во всяком случае, к среднему человеку (хоть не совсем в смысле Кетле) относят экономические показатели на душу населения.

6. Новые времена. Существенные успехи и советский тупик. В течение первых пяти десятилетий XIX в. в основных государствах Европы и Америки возникли статистические службы и/или национальные статистические общества. С 1851 г. начали проводиться Международные статистические конгрессы, имевшие целью стандартизировать официальную статистику данных, а в 1885 г. вместо них был учрежден существующий и поныне Международный статистический институт.

Столетием раньше Кондорсе начал изучать приложение теории вероятностей и статистики к отправлению правосудия, а Лаплас и Пуассон продолжили его изыскания. Французский математик и механик Пуансо (1836) заявил, что исчисление нельзя применять к темам, в которых большую роль играют несовершенное знание, невежество и страсти. Серьезную критику вызвало это приложение и потому, что указанные ученые молчаливо приняли независимость решений присяжных и судей; только Лаплас (1816/1886, с. 523), да и то мимоходом, упомянул эту предпосылку. Пуанкаре (1912/1999, с. 22) заметил по этому поводу, что *в судах люди ведут себя как панургово стадо*. Более известно утверждение Милля (1843/1914, с. 490): подобные приложения позорят математику.

И всё же стохастические рассуждения могут дать указания для определения необходимого числа свидетелей и судей (Гаусс до 1841 г.; *W*-12, с. 201 – 204) и оценки достоверности вердиктов, принятых большинством голосов.

При решении всех подобных вопросов статистика затронута и в связи с ошибками первого и второго рода. Так, уже Талмуд (Шейнин 2005, § 1.1.2) установил, что в городе, в котором некоторое число жителей умерло в течение трех последовательных дней, должен быть установлен карантин. Другой пример, относящийся к древней Индии, см. § 3.

Пуассон (1837, с. 4) ввел и среднюю априорную (статистически оправданную) вероятность вины подсудимого, которую нельзя было относить к какому-либо определенному лицу и которая была сродни средней наклонности к преступлению по Кетле.

Кетле (1836, т. 2, с. 313) изучал статистическую вероятность осуждения подсудимого в зависимости от его/ее личности, заметил (1833, с. 18), что в Бельгии она была существенно выше, чем во Франции, и правильно объяснил это различие отсутствием в Бельгии института присяжных (1846, с. 334). Интерес в приложении теории вероятностей к юриспруденции возродился, в связи с чем Heyde & Seneta (1977, с. 34) упомянули несколько источников, опубликованных до 1975 г., к которым мы добавим Zabell (1988), Gastwirth (2000) и Dawid (2005). Последний подчеркнул значение истолкования общей информации, например, установления круга возможных подозреваемых.

Также в XIX в. возник ряд естественнонаучных дисциплин, существенно зависящих от статистики. *Звездная статистика* появилась еще раньше, в трудах Уильяма Гершеля (1784/1912, с. 162), который попытался составить каталог всех видимых звезд и тем самым установить форму (конечной, как ему в то время представлялось) вселенной. В одном из участков Млечного пути он (1783) заменил подсчет числа звезд выборочной оценкой. Он также оценил параметры движения Солнца, приписав ему общую составляющую собственного движения некоторого числа звезд.

Намного раньше Галилей (1613) применил тот же принцип для оценки периода вращения Солнца около своей оси, приравняв его (примерно определенному) общему периоду обращения солнечных пятен.

В середине XIX в. последовали самые разнообразные статистические исследования солнечной системы (Курно 1843) и звездного неба (В. Я. Струве, О. Струве, Ньюком), а Каптейн распространил исследования на звёздные системы. Ньюком (Шейнин 2002) обработал (в том числе и весьма необычными методами) более 62 тысяч наблюдений Солнца и планет и обновил значения астрономических констант. Хилл и Элкин (Hill & Elkin 1884, с. 191) объявили, что *великие космические проблемы* относились не к отдельным звездам, а к их средним параллаксам и общим соотношениям между параметрами звезд.

Даниил Бернулли оказался пионером *эпидемиологии* (§ 4), которая по существу родилась в XIX в. в связи с эпидемиями холеры. Другими новыми научными дисциплинами оказались *общественная гигиена* (предшественница экологии), *география растений, зоогеография, биометрия* и *климатология*.

В 1701 г. Галлей опубликовал карту Северной Атлантики с контурными линиями равного магнитного склонения, а в 1817 г.

по его примеру Гумбольдт ввел линии равной средней годичной температуры (изотермы) и тем самым выделил климатологию из метеорологии. Таковы были два прекрасных примера предварительного исследования данных (§ 2).

Также в метеорологии произошел сдвиг от изучения средних состояний (Гумбольдт) к исследованию уклонений от них, а потому и к распределениям метеорологических элементов во времени и в пространстве.

Статистика выявила значение общественной гигиены. Имея в виду ее требования, Фарр (Farr примерно 1857, опубликовано 1885, с. 148) заявил, что *никакая смертность, превышающая 17 человек на тысячу в год, не является естественной*. Данные о смертности в больницах (особо ввиду *госпитализма*, т. е. плохих гигиенических условий), казармах и тюрьмах собирались и исследовались, причины повышенной смертности указывались, так что меры к ее предотвращению становились очевидными.

Медицина не подчинилась статистике без сопротивления, поскольку многие уважаемые врачи не понимали ее сути и/или значения. Стойким сторонником *рациональной* статистики был Пирогов, один из основателей современной хирургии и основатель военной хирургии. Он подчеркивал трудности сбора данных в военное время и разумно применял их.

В середине XIX в. статистика существенно способствовала внедрению анестезии, поскольку вначале эта новая процедура иногда приводила к серьезным осложнениям. Другой важной темой исследования оказался госпитализм, см. выше.

Биометрия была косвенно обязана своим рождением Дарвину:

Проблема эволюции – это статистическая проблема. … Каждая идея Дарвина … сразу же представляется подходящей для математического определения и требующей статистического анализа (редакционная статья в первом номере *Биометрики*, 1902).

Исключительно важным было признание статистических законов природы, – теории эволюции (вопреки самому Дарвину), кинетической теории газов (Максвелл), распределения звёзд (Каптейн) и генетики (Мендель 1866). Методически все эти законы основывались на понимании закономерности массовых случайных явлений (Кант, Лаплас).

Лаплас (1814/1999, с. 835, левый столбец), правда, заявил, что случайность является лишь результатом незнания и несовершенства анализа, и его неоднократно объявляли детерминистом , но он выделил статистический детерминизм (устойчивость числа писем без адресов), а его труды по астрономии и теории ошибок были основаны на понимании действия случайных ошибок. По Пуанкаре, случайность возникает при неустойчивом движении, и несколько десятилетий назад было открыто новое явление, хаотический процесс, т. е. особо неприятное неустойчивое движение. Наконец, Мопертюи

(Maupertuis 1756) и Бошкович (1758, § 385) предвосхитили Лапласа.

В XIX, но в основном, видимо, в XX в. статистический метод проник во многие другие науки и дисциплины вне естествознания, и теперь трудно было бы сказать, может ли какая-либо отрасль знания обходиться без нее. Следует упомянуть и другую сторону вопроса. *Теория корреляции* продолжала отрицаться даже в 1916 г. (Марков), фактически потому, что не была еще достаточно развита. Ее появление (Гальтон, Пирсон) оказалось постепенным. В 1865 – 1866 г. немецкий астроном и математик Зейдель количественно оценил зависимость числа заболевающих брюшным тифом от уровня грунтовых вод и количества осадков, но не попытался обобщить свое исследование. И в 1870-е годы несколько ученых подметили связь некоторых явлений на Земле с солнечной активностью, но никак не оценили ее количественно.

По Гауссу (1823, §§ 18 – 19), необходимым условием для независимости серий наблюдений друг от друга являлось отсутствие в них общих наблюдений, и геодезисты, даже не ссылаясь на него, интуитивно придерживались того же мнения. Если две серии примерно по m наблюдений каждая имели n общих наблюдений из этих m, то за меру их взаимозависимости принималась дробь n/m. В 1912 г. Каптейн независимо предложил подобную же меру, см. также [iv, § 6.4].

Оценка точности считалась ненужной (Борткевич 1894 – 1896/1968, с. 126): в отличие от статистического *чутья*, это – *роскошь*. *Выборочный метод* воспринимался неизменно враждебно, хотя уже немецкий статистик Людер (Lueder 1812, с. 9) жаловался на появление *легионов* чисел. В грубой форме этот метод существовал издавна; вот заглавие статьи Стиглера 1977 г.: *Восемь столетий выборочного контроля* [в Англии] *пробы монет*. В XVII в. выборочный метод применялся в крупных поместьях России для оценки урожая хлебов, а в начале следующего века маршал Вобан (Vauban), *французский Петти*, выборочно оценил сельскохозяйственную продукцию Франции в целом (Moreau de Jonnès 1847, pp. 53 – 54).

Неудивительно, что в 1786 г. Лаплас также выборочно оценил население Франции и, что гораздо важнее, установил погрешность своей оценки. В 1928 г. Пирсон, правда, нашел логическое несоответствие в его модели. Выборочный метод достойно проник в статистику в конце XIX в. (норвежский статистик Киаер, Kiaer), а в 1906 г. Каптейн начал изучать звездное небо по схеме расслоенной выборки. Противодействие этому методу, надо сказать, не прекращалось (Борткевич 1904).

Изучение общественного мнения и *статистический контроль качества промышленной продукции* также основывались на выборочном методе, но и то, и другое вошло в жизнь только в 1920-е годы, хотя Остроградский уже в 1848 г. предложил выборочно оценивать качество продовольствия, поставляемого в армию. Наконец, *эконометрия* родилась еще позже, в 1930-е годы.

Своеобразная боковая ветвь статистики, *социография*, возникла в начале XX в. Она изучает этнические, религиозные и др. группы общества, уже не относится только к статистике, и, как представляется, еще не стала действительно научной дисциплиной. Но вот социологи постепенно согласились с тем, что серьезные изменения в жизни общества или работе крупных коммерческих предприятий должны быть основаны на предварительных статистических исследованиях.

Советская статистика превратилась в опасную псевдонауку, оторванную от остального мира (Шейнин 1998/2006). Ее основная цель состояла в защите марксистских догм от пагубного воздействия современной науки, и она поэтому пресекала любые количественные исследования в экономике и изгоняла математику из статистики. В 1909 г. Ленин назвал Пирсона махистом и врагом материализма, что было более чем достаточно, чтобы советские статистики целиком и полностью с порога отвергли труды Биометрической школы.

Высшей точкой на этом пути оказалась московская конференция высокого уровня 1954 г. Ее участники даже заявляли, что статистика не изучает массовых случайных явлений, которые к тому же не обладают никакими особыми свойствами. Колмогоров, который присутствовал, чтобы во всяком случае выступить с докладом, критиковал западных статистиков за допущение необоснованных предположений, а перечисляя приложения статистики не посмел назвать статистику населения, которая отражала едва закончившееся истребление миллионов граждан.

Советские статистики неизменно требовали, чтобы количественные исследования неразрывно сочетались с качественным содержанием жизни общества (т. е. подчинялись марксизму), но никогда не выставляли подобных требований к статистическим исследованиям в естествознании.

7. Два течения статистической мысли. Лексис (1879) предложил непараметрический тест для проверки постоянства вероятностей изучаемого события в различных сериях наблюдений, а именно отношение Q стандартного уклонения его частоты, вычисленной по формуле Гаусса, и при условии реализации биномиального распределения. При изменении вероятности отношение должно было бы превышать единицу и равняться единице в противном случае, всё это при независимости испытаний, и, наконец, оказаться менее единицы при зависимых испытаниях. Лексис (там же, § 1) также качественно выделил несколько типов статистических рядов и попытался определить стационарность и тренд.

Борткевич первым исследовал ожидание Q, а в 1898 г. предложил свой знаменитый закон малых чисел, который в действительности лишь обратил внимание на почти забытое распределение Пуассона. Вообще его работы остаются малоизученными, в основном ввиду его тусклого стиля, излишнего внимания подробностям и скверного построения, которое он отказывался изменять. Винклер (Winckler 1931, с.

1030) процитировал письмо Борткевича, который оказался рад, что нашел в лице получателя одного из пяти ожидаемых им читателей своей работы. Ни даты письма, ни названия работы Винклер не сообщил.

Марков и в основном Чупров (1918 – 1919) опровергли практическую применимость критерия *Q*, но во всяком случае Лексис основал континентальное направление статистики, поскольку пытался стохастически пояснять статистические исследования. Он, впрочем, не был последователен: даже в 1913 г. он заявил, что ЗБЧ следует обосновывать эмпирическими данными. Крестными отцами континентального направления были, можно сказать, Пуассон и Бьенеме.

С другой стороны, придерживаясь эмпиризма, Биометрическая школа и ее вождь Пирсон заведомо пренебрегали стохастической теорией. Но Пирсон разработал принципы теорий корреляции и сопряженности признаков, ввел *кривые Пирсона* для описания асимметричных распределений, изобрел исключительно важный критерий хи-квадрат и опубликовал большое число полезных статистических таблиц. Вопреки высказываниям Фишера, его труд существенно подготовил рождение математической статистики.

Пирсон также успешно пропагандировал приложение своей новой дисциплины в различных областях науки, изучал историю статистики в рамках истории общества (1978, посмертная публикация), указывая (с. 1), что *действительно чувствовал, как неправильно было работать столь много в области статистики и пренебрегать ее историей*. Он приобрел многих друзей (и врагов, включая Фишера). Вот письмо Ньюкома 1903 г. (Шейнин 2002, § 7.1) и мнение Хальда (Hald 1998, с. 651):

Вы – единственный автор из ныне живущих, работы которого я почти всегда прочитываю, если есть время […], *с которым я провожу воображаемые интервью …*

Между 1892 и 1911 гг. [он] *создал свое собственное царство математической статистики и биометрии, беспрекословно господствуя в нем и защищая его непрестанно расширяющиеся границы от вторжений.*

Континентальные математики и особенно Марков, этот апостол строгости, презирали английскую школу, Чупров же без устали, хотя и не добиваясь серьезных успехов, пытался объединить оба течения статистической мысли. Слуцкий (1912), не бывший еще известным ученым, методически описал труды биометрической школы и, правда лишь в письме Маркову 1912 г., заявил, что недостатки Пирсона будут со временем преодолены так же, как это произошло с математикой XVII – XVIII вв.

Чупрову самому удалось многого достичь, описав, например, понятие конечной переставляемости (Сенета, Seneta 1987). В основном он изучал проблемы самого общего характера, а потому выводил весьма сложные и громоздкие формулы, и его труды оставались малоизученными. Система его обозначений была к тому же отвратительной. Так, он (1923, с. 472) ввел в одной и той же формуле двухэтажные нижние и верхние индексы!

Марков, этот великий математик, оказался в некоторой степени жертвой своей собственной несгибаемости. Даже учитывая отвратительные условия жизни в России с 1917 г. до его смерти в 1922 г., представляется странным, что он по существу не смог или не захотел заметить появления новых веяний в статистике и даже в теории вероятностей в Англии и вообще за рубежом.

8. Математическая статистика. В каком смысле она отличается от биометрии? Математическая статистика начала изучать новые темы (последовательный анализ), существенно продвинула прежние исследования (выборочного метода, временных рядов, проверки гипотез), намного усилила связь с теорией вероятностей и не допускала эмпирического подхода. Кроме того, и это весьма существенно, появились новые понятия. Фишер (1922) ввел статистические оценки и их свойства (состоятельность, эффективность и пр.), частично восходящие к Гауссу, который применял и ратовал за несмещенные оценки с наименьшей дисперсией.

Известно, что развитие математики было неизменно связано с ее дальнейшим отходом от природы (к примеру, при введении мнимых чисел) и что чем абстрактнее она становилась, тем полезнее оказывалась для естествознания. Переход математической статистики от истинных значений к оценке параметров был поэтому шагом в верном направлении. Тем не менее, эти значения остаются незаменимыми в теории ошибок, да и в статистике они встречаются до сих пор, и, как и в теории ошибок (Гаусс 1816, §§ 3 и 4), даже по отношению к объектам, не существующим в природе, см. также [vi, § 3].

Рао (2002, см. *Math. Rev*. 2005k:62007) отметил проблемные задачи современной статистики, связанные с выбором моделей, оценкой неопределенности, проверкой гипотез и обработкой крупных массивов данных и, кроме того, указал, что статистики не обучаются в достаточной мере ни одной отрасли естествознания.

Библиография

Сокращение: JNÖS = *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*

Бессель Ф. В. (1839, нем.), Влияние силы тяжести на фигуру жезла. В книге автора *Избр. геодезич. соч*. М., 1961, с. 187 – 199.

Борткевич В. И., Bortkiewicz, L. (1894 – 1896), Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики. В книге Четвериков (1968, с. 55 – 137).

--- (1898), *Das Gesetz der kleinen Zahlen*. Leipzig.

--- (1904), Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. *Enc. math. Wiss.*, Bd. 1, pp. 821 – 851.

Колмогоров А. Н. (1946), К обоснованию метода наименьших квадратов. *Успехи математич. наук*, т. 1, с . 57 – 71.

Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В. (1984), Математическая статистика. БСЭ, 3-е изд., т. 15, с. 480 – 484.

Курно А. А. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

Лексис В. (1879, нем.), О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968, с. 5 – 38).
--- (1913), Рецензия на книгу. *Schmollers Jahbuch f. Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft im Deutschen Reich*, Bd. 37, pp. 2089 – 2092.
Мальтус Т. Р. (1798, англ.), *Опыт закона о народонаселении*. Петрозаводск, 1993.
Марков А. А. (1899), Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. *Избр. тр*. М., 1951, с. 231 – 251.
--- (1900), *Исчисление вероятностей*. Последующие издания: 1908, 1913, посмертное М., 1924.
--- (1914), О задаче Якова Бернулли. *Избр. тр.*, с. 511 – 521.
--- (1916), О коэффициенте дисперсии. Там же, с. 523 – 535.
Мендель Г. (1866, нем.), Опыты над растительными гибридами. В одноимённой книге автора. М., 1965, с. 9 – 46.
Милль Дж. С. (1843, англ.), *Система логики.* СПБ, 1914.
Остроградский, М. В. (1848, франц.), Об одном вопросе, касающемся вероятностей. В книге автора *Полн. собр. тр.*, т. 3. Киев, 1961, с. 215 – 237.
Петров В. В. (1954), О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах. *Успехи математич. наук*, т. 1, с. 41 – 62.
Пуанкаре А., Poincaré H. (1896, 1912, франц.), *Теория вероятностей.* Ижевск, 1999.
Слуцкий Е. Е. (1912), *Теория корреляции*. Киев.
Четвериков Н. С., ред. (1968), *О теории дисперсии.* М.
Чупров, А. А., Chuprov, A. A. (1909), *Очерки по теории статистики*. М., 1959.
--- (1918 – 1919, нем.), К теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968, с. 138 – 224).
--- (1922a, нем.), Рецензии на книги. В книге автора (1960, с. 413 – 429).
--- (1922b, нем.), Рецензия на книгу F. Zizek, *Grundriß der Statistik.* München – Berlin, 1921. *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Bd. 1, pp. 329 – 340.
--- (1923), On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions etc. *Metron*, vol. 2, pp. 461 – 493, 646 – 683.
--- (1960), *Вопросы статистики*. М.
Шейнин О. Б., Sheynin, O. (1973), Boscovich's work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 9, pp. 306 – 324.
--- (1978), Poisson’s work in probability. Там же, т. 18, с. 245 – 300.
--- (1992), Al-Biruni and the mathematical treatment of observations. *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 2, pp. 299 – 306.
--- (1998, англ.), Статистика и идеология в СССР. В книге *Российская и европейская экономическая мысль. Опыт Петербурга*. СПБ, 2006, с. 97 – 119.
--- (1999), Statistics, definitions of. In Kotz, S., Editor- in-Chief (1999), *Enc. of Statistical Sciences*, Update volume 3. New York, pp. 704 – 711. *Encyclopedia* (Hoboken, New Jersey, vol. 12, 2006, pp. 8128 – 8135).
--- (2002), Newcomb as a statistician. *Hist. Scientiarum*, vol. 12, pp. 142 – 167.
--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк.* Берлин.
Aaboe A., De Solla Price D. J. (1964), Qualitative measurements in antiquity. In *L’aventure de la science. Mélanges A. Koyré*, t. 1. Paris, pp. 1 – 20.
Anonymous (1839), Introduction. *J. Statistical Soc. Lond.*, vol. 1, pp. 1 – 5.
Arbuthnot, J. (1712), An argument for divine Providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes. *Phil. Trans. Roy. Soc.* for 1710. In Kendall, M. G., Plackett, R. L., Editors (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 30 – 34.
Bayes, T. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans. Roy. Soc.* for 1763. *Biometrika*, vol. 45, 1958, pp. 360 – 418.
--- (1765), [Supplement]. *Phil. Trans. Roy. Soc.* for 1764, pp. 296 – 325.
--- (1908), Немецкий перевод обоих мемуаров. Ред. H. E. Timerding. Leipzig.
Bernoulli, D. (1766), Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole etc. В книге автора (1982, pp. 235 – 267).
--- (1768, латин.), О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и т. д. В книге Птуха М. В. (1955), *Очерки по истории статистики в СССР*, т. 1. М., с. 453 – 464.
--- (1770 – 1771), Mensura sortis etc. В книге автора (1982, pp. 326 – 360).

--- (1780), Specimen philosophicum de compensationibus horologicis etc. В книге автора (1982, pp. 376 – 390).
--- (1982), *Werke*, Bd. 2. Basel.
Boscovich, R. (1758, латин.), *Theory of Natural Philosophy*. Cambridge, Mass., 1966. Перевод с издания 1763 г.
Bühler, G, Editor (1886), *Laws of Manu*. Oxford, 1967.
Butte, W. (1808), *Die Statistik als Wissenschaft*. Landshut.
Cauchy, A. L. (1845), Sur le secours que les sciences du calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales. *Oeuvr. Compl.*, ser. 1, t. 9. Paris, 1896, pp. 240 – 252.
Cornfield J. (1967), The Bayes theorem. *Rev. Intern. Stat. Inst.*, t. 35, p. 34 – 49.
Cubranic, N. (1961), *Geodetski rad R. Boscovica*. Zagreb.
--- (1962), Geodätisches Werk R. Boscovic's. *Actes Symp. Intern. Boscovic*. Beograd, 1962, pp. 169 – 174.
Dawid, Ph. (2005), Statistics on trial. *Significance*, vol. 2, No. 1, pp. 6 – 8.
De Moivre, A. (1712, латин.), De Mensura sortis, or the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 236 – 262.
--- (1718), *Doctrine of Chances*. London, 1738, 1756. Перепечатка последнего издания: New York, 1967.
--- (1733, латин.), A method of approximating the sum of the terms of the binomial $(a + b)^n$ etc. В книгах автора (1738; 1756, pp. 243 – 254).
Euler, L. (1923), *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig.
Faraday, M. (1991 – 2008), *Correspondence*, vols 1 – 5. London.
Farr, W. (прим. 1857), В книге автора *Vital Statistics*. *Selection from Reports and Writings*. London, 1885.
Fisher, R. A. (1922), On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A222, pp. 309 – 368.
Fourier, J. B. J. (1826), Sur les resultats moyen déduits d'un grand nombre d'observations. *Oeuvr.*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.
Fréchet, M. (1949), Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen. В книге автора *Les mathématiques et les concret*. Paris, 1955, pp. 317 – 341.
Galilei, G. (1613, итал.), History and demonstrations concerning sunspots etc. *Discoveries and Opinions of Galilei*. Garden City, New York, 1957, pp. 88 – 144.
Gastwirth, J. L. (2000), *Statistical Science in the Courtroom*. New York.
Gatterer, J. C. (1775), *Ideal einer allgemeinen Weltstatistik*. Göttingen.
Gauss, C. F. (1809, латин.), Теория движения небесных тел, кн. 2, раздел 3. В книге автора (1957, с. 89 – 109).
--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.
--- (1823, латин.), Теория комбинаций наблюдений и т. д. Там же, с. 17 – 57.
--- (1828, латин.), Теория комбинаций ..., Дополнение. Там же, с. 59 – 88.
--- (1863 – 1930), *Werke*, Bd. 1 – 12. Göttingen – Berlin. Перепечатка: Hildesheim, 1973 – 1981.
--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.
Gavarret, J. (1840), *Principes généraux de statistique médicale*. Paris.
Graunt, J. (1662), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Baltimore, 1939.
Hald, A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.
Halley, E. (1694), *An Estimate of the Degrees of Mortality of Mankind*. Baltimore, 1942.
Herschel, W. (1783), On the proper motion of the Sun. *Scientific Papers*, vol. 1. London, 1912, pp. 108 – 130.
--- (1784), Account of some observations. Ibidem, pp. 157 – 166.
--- (1817), Astronomical observations and experiments etc. Ibidem, vol. 2, pp. 575 – 591.
Heyde, C. C., Seneta E. (1977), *I. J. Bienaymé*. New York.
Hill, D., Elkin, W. L. (1884), Heliometer-determination of stellar parallax. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 48, полностью pt. 1.
Hippocrates (1952), Aphorisms. *Great Books of the Western World*, vol. 10. Chicago, pp. 131 – 144.
Humboldt , A. (1817), Des lignes isothermes. *Mém. Phys. Chim. Soc. d'Arcueil*, t. 3, pp. 462 – 602.

Huygens, C. (1699), Correspondence. *Oeuvr. Compl.*, t. 14. La Haye, 1895.
Kapteyn, J. C. (1906), *Plan of Selected Areas*. Groningen.
--- (1912), Definition of the correlation-coefficient. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 72, pp. 518 – 525.
Kendall, M. G. (1960), Where shall the history of statistics begin? *Biometrika*, vol. 47, pp. 447 – 449.
Knapp, G. F. (1872), Quetelet als Statistiker. JNÖS, Bd. 18, pp. 89 – 124.
Knies, C. G. A. (1850), *Die Statistik als selbstständige Wissenschaft*. Kassel.
Lamarck, J. B., Ламарк Ж. Б. (1815), *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres*, t. 1. Paris. *Естественная история беспозвоночных животных*. *Избр. произв.*, т. 2. М., 1959.
Lambert, J. H. (1760, латин.), *Photometria*. Augsburg.
--- (1765), Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie. *Beyträge*, Tl. 1, pp. 1 – 313.
--- (1765 – 1772), *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1 – 3. Berlin.
--- (1772), Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen and Ehen. *Beyträge*, Tl. 3, pp. 476 – 569.
Laplace, P. S. (1803), *Traité de Mécanique céleste*, t. 3. *Oeuvr. Compl.*, t. 3. Paris, 1878.
--- (1812), *Théorie analytique des probabilités. Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1886.
--- (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. В книге Прохоров Ю. В., ред. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.
--- (1816), Дополнение 1 к *Théor. anal. prob. Oeuvr. Compl.*, t. 7, c. 497 – 530.
Leibniz, G. W. (1986), *Sämmtl. Schriften und Briefe*, Reihe 4, Bd. 3. Berlin.
Liebermeister, C. (ca. 1877), Über Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik. *Sammlung klinischer Vorträge* No. 110 (Innere Med. No. 39), pp. 935 – 962.
Louis, P. C. A. (1825), *Recherches anatomico-pathologiques sur la phtisie.* Paris.
Lueder, A. F. (1812), *Kritik der Statistik und Politik*. Göttingen.
Maupertuis, P. L. M. (1756), Sur la divination. *Oeuvres*, t. 2. Lyon, 1756, pp. 298 – 306.
Moreau de Jonnès A. (1847), *Eléments de statistique*. Paris.
Newton I. (1967), *Mathematical Papers*, vol. 1. Cambridge.
Pearson, K. (1925), James Bernoulli's theorem. *Biometrika*, vol. 17, pp. 201 – 210.
--- (1928), On a method of ascertaining limits to the actual number of individuals etc. Ibidem, vol. 20A, pp. 149 – 174.
--- (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc. Lectures 1921 – 1933. Editor, E. S. Pearson. London.
Poinsot, L. (1836), Замечание. В статье Poisson (1836, с. 380).
Poisson, S.-D. (1836), Note sur la loi des grands nombres. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 2, pp. 377 – 382.
--- (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements* etc. Paris. Перепечатка: Paris, 2003.
Poisson, S.-D., Dulong, P. L. et al (1835), Рецензия на статью (рукопись?) по медицинской статистике. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 1, pp. 167 – 177.
Proctor, R. A. (1872), On star-grouping. *Proc. Roy. Instn. Gr. Brit.*, vol. 6, pp. 143 – 152.
Quetelet, A. (1832), Recherches sur la loi de la croissance de l'homme. *Mém. Acad. Roy. Sci., Lettres et Beaux-Arts Belg.*, t. 7, pp. 1 – 32.
--- (1833), *Statistique des tribunaux de la Belgique*. Bruxelles. Соавтор, Ed. Smith.
--- (1836), *Sur l'homme*, tt. 1 – 2. Bruxelles.
--- (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités*. Bruxelles.
--- (1848), *Du système social*. Paris.
--- (1869), *Physique sociale* etc., tt. 1 – 2. Bruxelles. (Bruxelles, 1997.)
Schlözer, A. L. (1804), *Theorie der Statistik*. Göttingen.
Seidel, L. (1865), Über den Zusammenhang zwischen den Häufigkeit der Typhus-Erkrankungen und dem Stande des Grundwassers. *Z. Biol.*, Bd. 1, pp. 221 – 236. Продолжение (1866), Там же, Bd. 2, pp. 145 – 177.

Seneta, E. (1987), Chuprov on finite exchangeability, expectation of ratios and measures of association. *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 243 – 257.

Simpson, J. Y. (1847 – 1848), Anaesthesia. *Works*, vol. 2. Edinburgh, 1871, pp. 1 – 288.

Simpson, T. (1756), On the advantage of taking the mean of a number of observations. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 49, pp. 82 – 93.

--- (1757), Расширенный вариант той же статьи. В книге автора *Misc. Tracts on Some Curious ... Subjects* ... London, pp. 64 – 75.

Snow, J. (1855), On the mode of communication of cholera. In author’s book *Snow on Cholera*. New York – London, 1965, pp. 1 – 139.

Stigler, S. M. (1977), Eight centuries of sampling inspection: the trial of the pyx. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 72, pp. 493 – 500.

Süssmilch, J. P. (1741), *Göttliche Ordnung*. Berlin. Несколько последующих изданий.

Winckler, W. (1931), Ladislaus von Bortkiewicz. *Schmollers Jahbuch f. Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft im Deutschen Reich*, Bd. 55, pp. 1025 – 1033.

II

Ньютон и теория вероятностей

Newton and the theory of probability.
Archive for History of Exact Sciences, vol. 7, 1971, pp. 217 – 243

1. Вероятностные идеи и методы

Ньютон не оставил никаких сочинений, посвящённых теории вероятностей или её приложениям, однако в его работах встречаются вероятностные идеи и методы.

1.1. Определение вероятности. Так называемое классическое определение вероятности впервые появилось у Муавра (1712), затем не формально в посмертно вышедшем *Искусстве предположений* Якоба Бернулли, но вот геометрическая вероятность встретилась уже в рукописи Ньютона (1664 – 1666/1967b, с. 58 – 61):

Если пропорция шансов иррациональна, то интерес [ожидание] *может быть найден в той же манере. Как если бы радиусы ab, ac разделяли круг на две части, abec и abdc в такой пропорции, как* 2 *к* √5. *И если шар, падающий перпендикулярно на центр a, оказывается в части abec, я выигрываю a, но если в другой части, я выигрываю b. Моя надежда стоит* $(2a + b\sqrt{5})/(2 + \sqrt{5})$.

Whiteside (Ньютон 1967b, с. 58) разумно замечает, что эта рукопись была написана в результате чтения трактата Гюйгенса 1657 г., в котором предлагалось определение ожидания, не включающее иррациональностей. Ньютон далее рассматривает бросок неправильной кости:

Если кость не является правильным телом, а параллелепипедом или её стороны (sides) *как-то иначе не равны друг другу, можно определить насколько один бросок окажется легче, чем другой.*

По мнению Уайтсайда это явно означает, что Ньютон высказался за частотную теорию вероятностей, в которой *абсолютные вероятности* считаются равными асимптотическим пределам. Вряд ли, однако, это верно, однако введение статистических вероятностей представляется здесь вполне возможным. Но соображения Ньютона оставались малоизвестными, притом они не относились к естествознанию.

В анонимный перевод трактата Гюйгенса на английский язык (Huygens 1738, p. 49) был включён, очевидно переводчиком, комментарий на латинском языке. Читателям предлагалось определить (наверное, аналитически) вероятность появления различных граней при броске прямоугольного параллелепипеда.

Решение этой задачи привёл Симпсон (1740, с. 67 – 70), однако в его формуле во всяком случае была нарушена размерность. Иную формулу без доказательства предложила Перес (1985, с. 101).

1.2. Вероятностный метод в хронологии. Интересуясь хронологией древних царств, Ньютон (1728) систематически применял два метода для её проверки. Один из них был основан на зарегистрированных моментах различных астрономических явлений, другой опирался на вероятностные представления, хоть и не приводил к численным оценкам. Вот пример (с. 52):

Греческие хронисты [...] *утверждали, что правители их нескольких городов* [...] *правили в среднем по 35 – 40 лет, что настолько превосходит ход событий в природе, что не может быть признано. Ибо в соответствии с обычным ходом природы цари правят в среднем около 18 или 20 лет, иногда в среднем на 5 или 6 лет дольше, а иногда настолько же короче. 18 или 20 лет является средней величиной.*

Свою оценку Ньютон вывел по другим хронологическим данным, и его решение отвергнуть вдвое больший срок было разумным. Впрочем, формализация его рассуждения затруднительна: в пределах одной и той же династии срок правления последующего царя непосредственно зависит от срока правления предыдущего, а вероятность существенного уклонения случайной величины от выведенного среднего арифметического нельзя подсчитать, не зная соответствующей дисперсии (которую Ньютон характеризовал лишь косвенно и обобщённо).

Ньютона комментировали Кондорсе (Тодхантер 1865, § 746), Ellis (1844/1863, с. 179) и Пирсон (1928), который признал, что его соображения нельзя было бы применить ввиду отсутствия необходимых данных. Manuel (1963) описал острую дискуссию между Ньютоном и французскими хронистами, которая началась после появления французского издания некоторых хронологических вычислений Ньютона без его ведома и согласия. Manuel (с. 34) также заметил, что

Бомба, подброшенная Ньютоном в затхлый мир хронистов, возымела действие в основном ввиду научного престижа, которого он достиг в других областях науки.

О вероятностном рассуждении Ньютона Manuel почти ничего не сообщил.

2. Элементы теории ошибок

Вероятностная теория ошибок возникла в середине XVIII века в сочинениях Симпсона и Ламберта и была по существу завершена Гауссом; результаты Лапласа, интересные с теоретической точки зрения, не были пригодны для практики. Можно добавить, что свойства случайных ошибок должны были быть известными Кеплеру (Шейнин 1993, § 5) и что Галилей (1632, День третий) явно сформулировал их (Hald 1990, с. 149 – 160) и даже наметил метод уравнивания наблюдений, впоследствии введенный Бошковичем.

Но существует и детерминированная теория ошибок, которая изучает весь процесс измерений в экспериментальных науках без привлечения вероятностных идей и методов, стремясь уменьшить влияние существующих случайных и систематических ошибок. Она имеет много общего с предварительным исследованием данных (а потому, например, должна выявлять наличие систематических ошибок) и планированием эксперимента. Расцвет детерминированной теории ошибок связан с Гауссом и Бесселем, начало же ей по существу обеспечило дифференциальное исчисление (исследование погрешности функций от нескольких аргументов, искажённых ошибками наблюдений).

Элементами этой ветви теории ошибок владели уже древние астрономы, которые умели выбирать наилучшее время, в течение которого ошибки менее всего искажают искомые результаты. Именно к детерминированной теории ошибок принадлежат многие высказывания Ньютона, которые, однако, были частично рассеяны в его многочисленных мемуарах и письмах, а частично содержались в его малоизвестных *Лекциях* (1669 – 1671).

2.1. Случайные и систематические ошибки. В одном из своих писем Ньютон (1676/1809, т. 2, с. 341) пояснил причину расхождений между оптическими экспериментами:

Могут иметь место различные обстоятельства, способствующие им. Таковыми являются не только различные фигуры призм, но и различные преломляющие силы стёкол, различные диаметры Солнца в разные времена года, а также небольшие ошибки, которые могут произойти при измерении линий и углов или при установке призмы на окне, хоть [...] *я и заботился сделать всё это так точно, как только мог.*

В том же письме Ньютон (с. 339 – 341) заметил, что длина солнечного спектра изменяется с яркостью неба. Будучи, однако, удовлетворён грубой оценкой, он отказался от специальных исследований, притом численной меры яркости неба в то время не было.

В своей астрономической переписке Ньютон (1967а, с. 67 и 86) предсказал зависимость вертикальной рефракции от температуры воздуха и предложил вводить соответствующие поправки в измеренные высоты небесных тел. И вот мнение Уайтсайда (частное сообщение, 1972) о Ньютоне-экспериментаторе:

Фактически (но без явных утверждений об этом) Ньютон чётко представлял себе различие между случайными и структурно встроенными ошибками. Он безусловно был погружён в мысли о втором типе встроенных ошибок и многие теоретические модели различных видов физических, оптических и астрономических явлений были сознательно придуманы им таким образом, чтобы свести к минимуму эти структурные ошибки. В то же время он подходяще регулировал свою *практическую астрономическую работу в смысле случайных ошибок наблюдений.*

2.2. Планирование эксперимента. *Решающим опытом* Ньютона было, например (1672/1927), доказательство того, что несоразмерность длины и ширины солнечного спектра нельзя объяснить неровностями стекла или другими неправильностями. Это стало очевидным после того, как он применил сочетание двух призм (*Лекции* 1669 – 1671/1946, с. 124):

Для проверки этого я взял другую призму, подобную первой, и поместил её так, что свет, проходящий через обе призмы, может преломляться противоположным образом …

Ньютон неоднократно ссылался на этот опыт, особенно в связи с возникшей дискуссией, в которой были высказаны сомнения в его достижениях. Доказательство Ньютона было физическим, а не статистическим, но оно непосредственно касалось планирования эксперимента.

В его сочинениях имеется много рассуждений, относящихся к этой дисциплине, см., например, (1959, с. 136 – 139, 407 – 411, 421 – 425), а в *Лекциях* он (1669 – 1671/1946, с. 59) описывает измерение рефракции при переходе из воздуха в различные среды и замечает:

Способ [наблюдения] *лёгкий и наименее подверженный ошибкам, особенно если угол призмы большой и точно известен, квадрант большой и точный, а наблюдение делается вдали от призмы, где легче различать сильно расширенные цвета.*

Ньютон и его *друг* независимо регистрировали границы между различными цветами солнечного спектра. Разности между регистрациями оказались небольшими, и Ньютон (1757/1927, с. 150) принимал средние из них.

В своей астрономической переписке Ньютон (1967а, с. 67 и 134) выразил желание получать *сырые* результаты наблюдения. Причинами были стремление облегчить себе возможность редуцирования их, которого могла потребовать более продвинутая теория, и предотвратить возможные ошибки в вычислениях, допущенные другими лицами.

Мы лишь перечислим источники его исследования влияния ошибок и аберраций оптических систем:

1672, РТ-1, с. 712 – 714; РТ-2, с. 13 – 29 (см. с. 14 – 15);

1673, РТ-2, с. 91 – 93;

Письма, вошедшие в сборники корреспонденции: (1959, с. 247 – 253, 269 – 271); (1960, с. 254 – 260).

Интересно рассуждение Ньютона (1669 – 1671/1946, с. 52 – 53):

Малая ошибка в желаемом положении [призмы] *не значит почти ничего, ибо, на взгляд, преломлённый угол* [...] *почти не меняется при этом, как обнаруживается на опыте. Ибо* *преломлённый угол этот – наименьший, а в наибольших и наименьших количествах, создаваемых движением, т. е. в момент их попятного перемещения, движения в большинстве случаев бесконечно малы*.

Следует подробное пояснение. Напомним, что дифференциальное исчисление (которое здесь требуется для аналитического исследования) позволило уточнить известный древним астрономам факт о малом воздействии ошибок в определённые интервалы времени. Краткое замечание на ту же тему содержится в письме Ньютона 1676 г. (РТ-2, с . 276 – 280).

3. Вероятностные идеи в астрономии

В нескольких местах Ньютон заявил, что система мира не могла возникнуть случайно. Так,

Изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа (1687/1969, с. 659).

Он (1704/1954, с. 280) задал и более чёткий риторический вопрос:

Почему все планеты движутся в одном и том же направлении по концентрическим орбитам, в то время как кометы движутся по всевозможным направлениям по очень эксцентричным орбитам [...].

И на с. 304 – 305: *При помощи этих начал* [принципов движения] *составлены, по-видимому, все вещи из жёстких, твёрдых частиц* [...], *различным образом сочетавшиеся при первом творении по замыслу разумного агента. Ибо тот, кто создал их, расположил их в порядке.* [...]

Слепая судьба никогда не могла бы заставить планеты двигаться по одному и тому же направлению по концентрическим орбитам, за исключением некоторых незначительных неправильностей, которые могут происходить от взаимных действий комет и планет друг на друга, способных нарастать за время преобразования системы. Столь чудесная однородность планетной системы должна предполагать действие выбора. О том же свидетельствует однообразие в телах животных.

В английском издании 1782 г. сказано: ... *склонных нарастать, пока эта система не станет нуждаться в реформации* (очевидно, божественной).

Ньютон безусловно считал свои рассуждения безупречными, потому что на с. 280 он заявил, что натуральная философия не должна измышлять гипотез. Более известно его аналогичное высказывание из *Математических начал* (1687/1989, с. 662):

Причину же этих свойств тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Редактор английского издания этого сочинения 1934 г. добавил длинное пояснение этой фразы.

Вероятность независимого вращения всех шести известных в то время планет в одном и том же направлении равна $(1/2)^6 = 1/64$; как-то учитывая и примерную концентричность орбит, мы получим намного более низкую вероятность. Всё так, но ту же вероятность, 1/64, имело бы вращение планет в любом порядке. Впрочем, довод, исходящий из незначительности вероятности, всё же не был бы поколеблен в силу нематематического замечания Лапласа [i, § 3]: если проверяемая правильность имеет смысл, то она должна была быть вызвана какой-то причиной.

Рассуждения Ньютона обсуждались в письме Conduitt религиозного философа У. Дерхама 18 июля 1733 г. (Manuel 1968, с. 127):

Своеобразное доказательство существования Бога, которое Сэр Исаак Ньютон упомянул в какой-то нашей беседе вскоре после публикации моей <u>*Астротеологии*</u>*: он заявил, что 3 обстоятельства во вращении небесных тел явно свидетельствуют о Всемогуществе и мудром Замысле. 1. Что движение, внушённое этим небесным телам, было боковым. т. е. в направлениях, перпендикулярных их радиусам, а не вдоль них или параллельно им. 2. Что их движения направлены в одну и ту же сторону. 3. Что их орбиты имеют одно и то же наклонение.*

О вероятностях или шансах речи не было, но если Ньютон представлял себе позднейшее рассуждение Лапласа, то он, следовательно, имел их в виду.

4. Влияние Ньютона

Самое чёткое утверждение о влиянии Ньютона на развитие вероятностных идей оставил Пирсон (1926):

Идея Ньютона о вездесущем активизирующем божестве, которое сохраняет средние статистические значения, составила фундамент статистического развития по цепочке Дерхам – Зюссмильх – Нивентит – Прайс – Кетле – Флоренс Найтингейл.

Всё-таки подобных идей у Ньютона не было. В 1971 г., отвечая на наш вопрос по этому поводу, Э. Пирсон написал:

Прочитав [отредактированное им посмертное сочинение К. Пирсона (1978)], *я думаю, что понимаю, что имел в виду К. П.* [...] *Он пошёл дальше Ньютона в том смысле, что утверждал, что законы, которые свидетельствуют о предначертании, проявляются в устойчивости средних значений наблюдений.*

Первым популяризатором идей Ньютона оказался Р. Бентли (1662 – 1742), будущий известный богослов и член Королевского общества. В 1692 г.он выступил с циклом проповедей, – первыми лекциями им. Бойля, предназначенными защитить христианскую религию от неверующих. Некоторые проповеди были посвящены астрономии, и Бентли пришлось ознакомиться с идеями Бойля и Ньютона, к которому он и обратился за разъяснениями.

Ньютон благосклонно отнёсся к просьбе Бентли и ответил на его письма. Вся их переписка опубликована (Ньютон, *Correspondence*, vol. 3, 1961); письма Ньютона с комментариями и две проповеди Бентли были впервые опубликованы в 1693 г. в другом источнике, см. Ньютон (1958). Там же (с. 316 – 318) содержится пояснение понятия случайности, которое во всяком случае вряд ли противоречило мыслям Ньютона: случай (fortune) происходит от необходимых причин, которые неизвестны данному лицу. Из этого утверждения (которое можно пояснить, например, броском монеты) Бентли непонятным образом доказывал, что мир не был создан случайно.

Вернёмся к Пирсону. Он (1926, с. 552) перешёл к Муавру и Бейесу и заявил, что

Причины, которые привели Муавра к его Аппроксимированию [1733] *или Бейеса к его теореме, были более теологическими и социологическими, чем чисто математическими, и пока не будет признано, что посленьютоновские английские математики находились под большим влиянием теологии Ньютона, чем под влиянием его математики, история науки XVIII века, и особенно история науки учёных – членов Королевского общества останется непонятной*.

У Бейеса не было *теоремы* (но было серьёзное исследование), а науку целого века Пирсон, пожалуй, упомянул напрасно.

В заключение мы сообщим мнение Винера (Wiener 1956, с. 8), которое косвенно связано со случайностью, и даже с хаотическими процессами, но которое он не уточнил:

В работах Ньютона фактически содержалось важное статистическое условие, хоть XVIII век и пренебрёг им. Ни одно физическое измерение не является точным; и, говоря о машине или иной динамической системе, мы на самом деле описываем то, что относится к ожидаемому не при абсолютной точности заданных начальных положений и моментов (что никогда не имеет места), а при достижимой точности. […] *Нам известны не все начальные условия, а лишь что-то об их распределении*.

Впрочем, если исключить распределения, то аналогичное мнение вполне могло быть уже у Кеплера и Галилея.

Библиография

Ньютон

PTi = *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. i. 1809.

1661 – 1709, *Correspondence*, vols 1 – 4. Cambridge, 1959, 1960, 1961, 1967a за годы 1661 – 1675, 1676 – 1687, 1688 – 1694 и 1694 – 1709 соответственно. Частично в PT.
1669 – 1671, латин. *Лекции по оптике*. М., 1946.
1676a, Particular answer to Linus' objections. PT2, pp. 276 – 280.
1676b, Answer to letter of Mr Lucas. PT2, pp. 338 – 343.
1687, латин. *Математические начала натуральной философии*. М., 1989.
1704, латин. *Оптика*. М., 1954.
1728, *Chronology of Ancient Kingdoms Amended*. London. [London, 1771.]
1757, англ. Одна гипотеза, объясняющая свойства света, изложенная в нескольких моих статьях. *Успехи физич. наук*, № 3, 1927, с. 135 – 158.
1958, *Papers and Letters on Natural Philosophy*. Cambridge.
1967b, *Mathematical Papers*, vol. 1. Cambridge.

Другие авторы

Галилей Г. (1632, итал.), *Диалог о двух главнейших системах мира*. М. – Л., 1948.
Перес Л. М. Т. (1985), К истории понятия геометрической вероятности. *Вопр. истории естествознания и техники*, № 4, с. 100 – 103.
De Moivre A. (1712, in Latin), De mensura sortis, or The measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 236 – 262.
Ellis R. L. (1844), On a question in the theory of probability. In author's book *Math. and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 173 – 179.
Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.
Manuel F. E. (1963), *Newton Historian*. Cambridge, Mass.
--- (1968), *A Portrait of Newton*. Cambridge, Mass.
Pearson K. (1926), Abraham De Moivre. *Nature*, vol. 117, pp. 551 – 552.
--- (1928), Biometry and chronology. *Biometrika*, vol. A20, pp. 241 – 262, 424.
--- (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries etc*. Lectures 1921 – 1933. London. Editor E. S. Pearson.
Sheynin O. B. (1993), Treatment of observations in early astronomy. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 46, pp. 153 – 192.
Simpson T. (1740), *The Nature and Laws of Chance*. London.
Todhunter I. (1865), *History of Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.
Wiener N. (1956), *The Human Use of Human Beings*. New York. [Винер Н. *Кибернетика и общество*. М., 1958.]

III

Работа И. Г. Ламберта по теории вероятностей

J. H. Lambert's work on probability.
Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 7, 1971, pp. 244 – 256

1. Введение

Сочинения Иоганна Генриха Ламберта (1728 – 1777) относятся к различным ветвям математики и её приложений, включая оптику, картографические проекции и геодезию, а также к астрономии и метеорологии, см. Wolf (1860), Scriba (1973) и Gray et al (1978), а библиографию его работ составил Steck (1970). Детскую оспенную смертность изучали Mahlig (1980) и Daw (1980), а Shafer (1978) и Halperin (1988) описали неаддитивные вероятности в философских сочинениях Ламберта.
В собственно теории вероятностей Ламберт работал мало, хотя некоторые его философские соображения представляют немалый интерес, а кроме того он плодотворно исследовал определённые вопросы статистики населения и медицинской статистики и оказался главным предшественником Гаусса в теории ошибок.

Ламберт изучал влияние Луны на различные метеорологические элементы, что в его время было актуальным [viii, § 2]. В письме 13 июня 1759 г. Даниил Бернулли (Radelet De Grave et al 1979, с. 62) сообщил ему:

Ваши соображения […] *вполне обоснованы; публикуйте их без колебаний,* […] *каковы бы ни были результаты,* […] *но постарайтесь надлежаще установить их*.

Lalande (1802 – 1803/1985, с. 465, 491, 508, 515) одобрительно отзывался об астрономических работах Ламберта. В последнем случае он заметил по поводу их и сочинений Даниила Бернулли: *С этого времени* [1776 г. французским] *астрономам следует изучать немецкий язык*, а на юбилейной дате Лейбница в 1828 г. Erman (Wolf 1860, p. 339) назвал этого учёного немецким Платоном, а Ламберта, безусловно имея в виду его разносторонность, – немецким Аристотелем. Впрочем, уже тогда нельзя было забывать о Гумбольдте.

2. Теория вероятностей

Ламберт [6] решил задачу о совпадениях: n писем случайно вкладываются в конверты с написанными и не совпадающими адресами. Какова вероятность, что в точности r писем ($0 \le r \le n$) окажутся на своём месте? Несколько учёных уже решили эту задачу, и мы лишь заметим, что в 1819 г. естествоиспытатель и историк Томас Юнг (Kendall 1968) решил ту же задачу о совпадении слов двух различных языков.

Ламберт частично посвятил своё сочинение [2] введению понятия субъективной вероятности. Она может иметь объективный смысл, если примерно характеризует одно из многих событий, происходящих при аналогичных обстоятельствах (Колмогоров 1971). Под это утверждение, видимо, подходят и экспертные оценки.

Стяжкин (1967) описал философские достижения Ламберта в математике. Со своей стороны заметим, что Ламберт следовал древней традиции, которую можно проследить по меньшей мере до Фомы Аквинского, а затем и почти до нашего времени и которая поясняла случайность незнанием. Вообще же Ламберта можно считать первым последователем Лейбница в его стремлении включить исчисление вероятностей в общую систему логики.

Ламберт [2, *Феноменология*, § 152] специально рассуждал о равной возможности ряда событий, которая основана на

существовании множества отдельных причин [к примеру] *в азартных играх* […], *действующих таким образом совместно, каждая по своим собственным законам*, *что один случай оказывается столь же лёгким, как другой*, и при продолжении игры компенсируют друг друга. Поэтому *каждый случай происходит тем чаще*, *чем вероятнее он сам по себе*.

Всё это малопонятно, к тому же случайные обстоятельства не компенсируются, а проявляются, но гораздо слабее систематических. В другом сочинении Ламберт [5, §§ 314 и 324] сравнил слепой случай (т. е. равномерное распределение) по невозможности познания с мнимой единицей. Это утверждение частично противоречило предыдущему, да и вообще не имело смысла: начиная быть может именно с введения комплексных чисел, новые математические понятия не *познаются* в обычном смысле. Сам Ламберт (там же, § 311) связывал слепой случай с неведением соответствующих причин; известно, что так считал и Бейес. Точнее: не сам слепой случай, а его появление. Пуанкаре (Шейнин 1991, § 8) обосновывал его весьма сложным образом, хотя мог бы сослаться на эргодические свойства однородных цепей Маркова с конечным числом состояний.

Ту же тему Ламберт затрагивал в §§ 315 – 317 и 327.

Интереснее попытка Ламберта [8] связать случайность с беспорядком. В десятичном разложении корня из 12 он (ч. 1, § 7) заметил *порядок связи* (каждая цифра *необходимо занимает своё место*), хотя *порядок сходства* отсутствует (цифры расположены как бы случайно) и *исчисление вероятностей здесь полностью применимо*. Здесь мы, однако, встречаемся со сложной проблемой случайных чисел; см. также Хинчин (1936).

Ламберт (§ 11) затем ввёл меру беспорядка в числовых перестановках, – сумму произведений значения каждого элемента перестановки на его расстояние от *надлежащего* места. Первую часть сочинения Ламберт закончил попыткой вычисления оптимального места элемента в последовательности в соответствии с тремя противоречивыми правилами. Так появилась элементарная многокритериальная задача исследования операций, вторая же часть не представляет для нас интереса.

Рассуждения Ламберта о случайности первым комментировал Курно (Шейнин 2002, с. 305 – 306). Впрочем, еще в письме 1764 г. философ Мендельсон (Wolf 1860, с. 338) назвал идеи Ламберта о логике вероятного *плодоносными*.

3. Статистика населения

Она возникла в XVII веке (Граунт) и стала отдельной статистической дисциплиной в XVIII веке (Зюссмильх). Ламберт [7] принял определённые законы смертности (§§ 9 и 44), изучал среднюю и вероятную продолжительности жизни (§ 36) и продолжительность женитьб (§ 53), количество детей в семьях (§ 108), количество женитьб в различных возрастных группах (§ 113) и, наконец, детскую оспенную смертность (§ 125).

Эмпирический закон смертности Ламберт принял в виде двух членов по аналогии с вытеканием воды из цилиндра (первое слагаемое: квадратный трёхчлен) и термическими процессами (второе: разность двух экспоненциальных функций). См. также [4, § 58]. Представляется, что в *Гидродинамике* Даниила Бернулли 1738 г., в соответствующем месте третьей части, квадратного трёхчлена не было. Ламберт [9, Письмо № 33 6 дек. 1776 г., с. 365 – 368] пояснил, что его закон смертности был обоснован лишь указанными аналогиями. Впрочем, он далее, в § 44, предложил закон смертности в виде степенного ряда. Заметим, что первоначальный закон Ламберта был образован кривыми, впоследствии названными пирсоновскими типов IX и X, но что универсального закона смертности, видимо, не существует.

Продолжительность женитьб в 1768 г. исследовал Даниил Бернулли, Ламберт же лишь формализовал соответствующие проблемы; их решение он возможно полагал чисто статистическим. Изучая распределение числа детей в семьях, Ламберт исходил из данных по 612 семьям с различным количеством детей вплоть до 14 и их общим числом 1518.

Выравненное распределение количества детей, как оказалось, можно представить дугой окружности, но соответствующие данные относились к 906 семьям с общим числом детей равным 3480 и их числом в семьях до 18. Уменьшив указанное общее число в отношении 906/612, мы получим 2350, т. е. в 1.55 раз больше, чем их было на самом деле. Возможно, что Ламберт пытался учесть мёртворождённых и умерших детей. Произведенных действий он не объяснил, полагая своё исследование лишь *примером*, но в § 68 Ламберт указал, что статистическая обработка должна включать выявление неправильностей; мы бы сказали: особенностей, систематических влияний и в том числе обмана.

В § 69 Ламберт вернулся к изучению смертности и принял некоторые качественные свойства её кривой, в частности асимптотическое сближение кривой с горизонтальной осью. В § 70 он представил эту кривую для возрастов, превышающих 45 лет, параболой пятого порядка, параметры которой он вычислил без уравнивания по необходимому числу эмпирических точек.

При рассмотрении смертности от оспы Ламберт по существу лишь комментировал исследование Даниила Бернулли 1766 г. о вариоляции оспы, но вот существенного мемуара Эйлера (1767) о статистике населения не упомянул. О его результатах по исследованию смертности см. Loewy (1927), Linder (1936) и Eisenring (1948).

4. Теория ошибок

4.1. Предшественники. Наше предварительное сообщение (1966) было первым, обратившим внимание на достижения Ламберта в теории ошибок. Galle (1924), правда, указал, что Гаусс обратился к этой теме при чтении Ламберта, да и сам Гаусс (1812) назвал его в числе своих предшественников. Мы покажем, что он был одним из первых, занявшихся теорией ошибок. До него был Симпсон (1756; 1757), а Котс, Мопертюи и Буге изучали влияние ошибок наблюдений на вычисляемые функции. И, конечно же, следует упомянуть Кеплера, который, изучив последствия возможных погрешностей наблюдений Тихо Браге, понял, что систему мира Птолемея нельзя совместить с ними. Наконец, ряд исследований, особенно Бошковича, относились к уравниванию переопределённых систем линейных уравнений (числом, превышающим число неизвестных).

4.2. *Фотометрия* [1]. В §§ 271 – 306, выпущенных из немецкого перевода как устаревших, Ламберт описал свойства обычных ошибок наблюдений и подразделил их по происхождению (§ 282). Он ошибочно доказывал целесообразность отбрасывания крайнего наблюдения (§§ 287 – 291) по сравнению средних арифметических из всех наблюдений и из всех, кроме крайнего. Точность наблюдений Ламберт (§ 294) оценивал по относительной величине разности тех же средних.

Пусть $\bar{u}$ – среднее арифметическое из наблюдений и $\bar{v}$ – среднее из оставшихся. Тогда, заявил Ламберт, $\bar{u}$ вряд ли отклонится от искомого истинного значения больше, чем на $|\bar{u} - \bar{v}|$. Однако, если отброшенное наблюдение было грубо ошибочно, эта рекомендация окажется неудачной. Интересна здесь сама постановка вопросов; оценке точности в то время не придавалось должного внимания и даже сам Ламберт не связывал её с числом наблюдений; сравнивать точность рядов наблюдений различного объёма он не смог бы. Delambre (1912), который умер в 1822 г., нормировал свою оценку точности (например, на с. 39 и 235) примерно одновременно с Гауссом: на с. 258 он сослался на книгу 1818 г.

Ламберт (§ 295) поставил вопрос о нахождении статистики, которая с наивысшей вероятностью менее всего уклонялась бы от истинного значения измеряемой величины, но впоследствии [3, § 420] признал, что не смог применить этот принцип *в общем случае и без околичностей*. Впрочем, вряд ли желаемая статистика могла существовать, ведь наименьшее уклонение равно нулю.

В 1826 г. Фурье [vi, § 3] определил истинное значение измеряемой постоянной как предел соответствующего среднего арифметического, однако Ламберт [1, § 286] частично предвосхитил его, косвенно заявив то же самое. Он (§ 290), правда, бездоказательно добавил, что погрешность среднего намного меньше, чем у отдельного наблюдения; Симпсон обосновал это только для равномерного и треугольного распределений. Позднее Ламберт [3, § 3] повторил, что среднее арифметическое тем ближе к *истине*, чем больше было измерений. Впрочем, этим свойством *состоятельности* обладают линейные оценки вообще.

В той же *Фотометрии* (§ 303) Ламберт сформулировал принцип наибольшего правдоподобия для некоей непрерывной одновершинной кривой плотности, общий вид которой соответствовал свойствам *обычных* случайных ошибок. Он (§ 306), однако, указал, что в большинстве случаев оценка наибольшего правдоподобия совпадает со средним арифметическим. Доказывать это он и не пытался.

4.3. Последующие сочинения. Ламберт [3, § 320] назвал среднее арифметическое, *разумеется, самым надёжным*, если только погрешности обоих знаков равно возможны и снова, см. наш § 4.2, добавил, что это среднее состоятельно. В [4, § 4] он заявил, что наибольшее удаление наблюдения от среднего равнозначно такому же его удалению от истинного значения, и, наконец [3, § 441], что применение среднего основано на его наибольшей вероятности. В соответствии с § 4.2 это последнее соблюдалось лишь в большинстве случаев. Всё сказанное было обосновано лишь качественными соображениями [3, §§ 443 – 445].

Ламберт рассматривал и другие вопросы.

1. Классификация ошибок (§ 311). Он упомянул несовершенство инструментов и зрения. Кроме того, существуют и пренебрегаемые погрешности, вызванные, например, моделью прямолинейного распространения света. Он таким образом ограничился рассмотрением ошибок оптических инструментов.

2. Свойства *обычных* ошибок (§ 434).

3. Проверка этих свойств (§§ 435 – 436). Ламберт осуществил её на примере 80 переносов длины отрезка циркулем. Здесь же (§§ 429 – 430) он дал умозрительный вывод закона распределения ошибок наведения прибора на визирную цель.

4. Влияние заданной ошибки на результат [3, §§ 340 – 426]. Ссылаясь на Marinoni (1751) и применяя дифференциальное исчисление, Ламберт определил оптимальную форму стандартных геодезических фигур.

5. Как и прежде, Ламберт оценивал точность наблюдений.

6. Ламберт [4, § 20] выравнивал эмпирические точки наблюдений. Он разделял их на группы с меньшими и большими абсциссами и проводил прямую через *центры тяжести* этих групп. При отыскании выравнивающей кривой он поступал аналогично, выделяя несколько групп наблюдений, разумно

полагая (§ 66), что выравнивание целесообразнее чем определение кривой, проходящей через все эмпирические точки.

Сам термин *теория ошибок* (Theorie der Fehler) ввёл Ламберт [3, Vorberichte (Предварительное сообщение)] и там же в § 321. Её целями были установление *соотношений между ошибками, их последствиями, обстоятельствами измерений и качеством инструмента*. Он отдельно ввёл *теорию последствий ошибок* (Theorie d. Folgen), см. выше пункт 4, ограничив таким образом теорию ошибок. Но кроме того Ламберт [4, § 1] назвал в качестве задач обработки измерений определение истинного значения измеряемой величины и наибольшего возможного отклонения от него, которое оценивало надёжность измерений.

Общий круг задач он указал удачно, но разбивка введенных теорий не была продумана. Ни Лаплас, ни Гаусс не применяли термина *теория ошибок*, но он встречался у Бесселя (1820, с. 166; 1838, § 9) без ссылки на Ламберта и вошёл в употребление в середине XIX в., снова без всяких ссылок. Появление у Ламберта этой теории как отдельной дисциплины можно объяснить его явным желанием классифицировать науку, которое хорошо заметно в его философских сочинениях [11].

Здесь же добавим сведения (Bullynek 2010), не вполне относящиеся к теории ошибок. Автор описал работу Ламберта по измерению влажности, его рассуждения об исследовании инструментов и, особо, о конструировании гигрометра. Он привёл фотографию гигрометра Ламберта – Брандеса.

Библиография

И. Г. Ламберт

1. *Photometria etc*. Augsburg, 1760. Немецкий перевод: описанный материал не включен, *Ostwald's Klassiker*, NNo. 31 – 33, 1892.

2. *Neue Organon etc*., Bde 1 – 2. Leipzig, 1764. Перепечатан: [11, Bde 1 – 2].

3. Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie. In author's *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1. Berlin, 1765, pp. 1 – 313.

4. Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. Ibidem, pp. 424 – 488.

5. *Anlage zur Architectonic*, Bd. 1. Riga, 1771. Перепечатан: [11, Bde 3 – 4].

6. Examen d'une espèce de superstition ramenée au calcul des probabilités. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres Berlin* pour 1771 (1773), pp. 411 – 420.

7. Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen. In *Beyträge*, Tl 3. Berlin, 1772, pp. 476 – 569.

8. Essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres Berlin*, 1770. Berlin, 1772, pp. 327 – 342; 1773 (1775), pp. 347 – 368. Перепечатан: [11, Bd. 8/1].

9. *Lamberts deutscher Gelehrter Briefwechsel*, Bd. 4, Abt. 2. Hrsg. Joh. Bernoulli. Berlin, 1784.

10. Mathematische Ergötzungen über die Glücksspiele. Posthumous publ. 1799. *Opera math*., Bd. 2. Zürich, 1948, pp. 315 – 323.

11. *Philosophische Schriften*, Bde 1 – 10. Hildesheim, 1965 – 2008.

Другие авторы

Бессель Ф. В., Bessel F. W. (1820), Beschreibung des auf des Königsberger Sternwarte. *Astron. Jahrb.* für 1823. Berlin, pp. 161 – 168.

--- (1838, нем.), Градусное измерение в Восточной Пруссии. Частичный перевод в книге автора *Избр. геод. соч.* М., 1961, с. 99 – 186.

Колмогоров А. Н. (1971), Вероятность. БСЭ, 3-е изд., т. 4, с. 544.

Стяжкин Н. И. (1967), *История математической логики* … М.
Хинчин А. Я. (1936), Метрические задачи теории иррациональных чисел. *Успехи математич. наук*, вып. 1, с. 7 – 32.
Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1966), Origin of the theory of errors. *Nature*, vol. 211, No. 5052, pp. 1003 – 1004.
--- (1991), Poincaré's work in probability. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 42, pp. 137 – 172.
--- (2002), О теоретико-вероятностном наследии Курно. *Историко-математич. исследования*, вып. 7 (42), с. 301 – 316.
Bullynek M. (2010), J. H. Lambert's scientific tool kit etc. *Science in Context*, vol. 23, pp. 65 – 89.
Daw B. H. (1980), J. H. Lambert, 1728 – 1777. *J. Inst. Actuaries*, vol. 107, pt 1, pp. 345 – 350.
Delambre J. B. J. (1912), *Grandeur et figure de la terre*. Paris.
Eisenring M. E. (1948), Bemerkungen zu den Sterbetafeln von Lambert. *Mitt. Vereinigung Schweiz. Versicherungsmath.*, Bd. 48, pp. 116 – 125.
Euler L. (1767), Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig, 1923, pp. 79 – 100.
Galle A. (1924), Über die geodätischen Arbeiten von Gauss. In Gauss (1924 – 1929), *Werke*, Bd. 11, Abt. 2, Abh. 1. Separate paging.
Gauss C. F. (1812), Brief nach H. W. Olbers 24 Jan. 1812. *Werke*, Bd. 8, 1900, p. 140.
Gray J. J., Tilling Laura (1978), J. H. Lambert, mathematician and scientist. *Hist. Math.*, vol. 5, pp. 13 – 41.
Halperin T. (1988), The development of probability logic from Leibniz to MacColl. *Hist. and Phil. of Logic*, vol. 9, pp. 131 – 191.
Kendall M. G. (1968), T. Young on coincidences. *Biometrika*, vol. 55, pp. 249 – 250.
Lalande J. J. (1802 – 1803), *Bibliographie astronomique*. Osnabrück, 1985.
Linder A. (1936), D. Bernoulli and J. H. Lambert on mortality statistics. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 99, pt. 1, pp. 138 – 141.
Loewy A. (1927), Lamberts Bedeutung für die Grundlagen des Versicherungswesens. In *Festgabe für A. Manes*. Berlin, pp. 280 – 287.
Marinoni J. J. (1751), *De re ichnographica.* Wien.
Mahlig W. W. (1980), Mortality of smallpox in children. *J. Inst. Actuaries*, vol. 107, pt 1, pp. 351 – 363.
Radelet-de Grave P., Scheuber V. (1979), *Correspondence entre D. Bernoulli et J. H. Lambert*. Paris.
Scriba Chr. J. (1973), Lambert. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 7, pp. 595 – 600.
Shafer G. (1978), Non-additive probabilities in the work of [J.] Bernoulli and Lambert. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 19, pp. 309 – 370.
Simpson T. (1756), A letter […] on the advantage of taking the mean etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.* for 1755, vol. 49, pt. 1, pp. 82 – 93.
--- (1757), То же название, расширенный вариант. В книге автора *Misc. Notes on Some Curious Subjects etc*. London, pp. 64 – 75.
Steck M. (1970), *Bibliographia Lambertiana*. Hildesheim.
Wolf R. (1860), J. H. Lambert aus Mühlhausen. *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, 3. Cyclus. Zürich, pp. 317 – 356.

IV

К. Ф. Гаусс и теория ошибок

C. F. Gauss and the theory of errors.
Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 20, 1979, pp. 21 – 72

1. Введение

1.1. Пояснение. Некоторые наши предыдущие статьи были целиком или частично посвящены предыстории и ранней истории теории ошибок, равно как и работам Лапласа, который создал теорию математической обработки большого числа измерений, основанную на нестрого доказанной им ЦПТ. Здесь мы описываем работы Карла Фридриха Гаусса (1777 – 1855), который изучал математическую обработку конечного, в том числе и небольшого числа измерений, и чья теория ошибок оказалась единственно практически приемлемой.

§§ 3 – 6 посвящены трём соответствующим сочинениям Гаусса. История принципа наименьших квадратов (ПрНКв) до 1809 г. описана в § 2, а в § 7 в контексте нашей темы обсуждается его работа в геодезии и в §§ 8 – 9 дополнительно изучаются его результаты в теории вероятностей и статистике и отношения с двумя учёными. Многие авторы, – Czuber (1891), Идельсон (1947), Seal (1967), – уже описывали нашу тему, но наше исследование гораздо подробнее. По возможности мы ссылаемся не на переписку Гаусса, а на его *Труды* (*Werke*), в которых перепечатаны некоторые его письма. Вот принятые нами сокращения:

Г – Б: письма Гаусса Бесселю
Г – Г: письма Гаусса Герлингу
Г – О: письма Гаусса Ольберсу
Г – Ш: письма Гаусса Шумахеру
W-i = Werke (*Труды* Гаусса), том *i*.

Переписка Гаусса, впервые опубликованная в разное время в нескольких источниках, собрана воедино в серии *Werke*, *Ergänzungsreihe*, см. Библиографию:

W/Erg-i = Werke, Egänzungsreihe, том *i*.

Введенные Гауссом (1811, § 13) сокращения

$$[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$
$$[bc,1] = [bc] - [ab][ac]/[aa],\ [cd,2] = [cd,1] - [bc,1[bd,1]/[bb1],\ \ldots$$

Без принятых им запятых они употребляются и теперь при описании решения систем нормальных уравнений.

Мы значительно расширили изложение по сравнению с 1979 г.

1.2. Принцип и метод наименьших квадратов. Измерения l_1, l_2, …, l_n константы называются *прямыми*; подобные же измерения констант *x, y*, … числом, не обязательно совпадающим с *n*, – *косвенными*. В классической теории ошибок Гаусса рассматриваются косвенные измерения, приводящие к линейным уравнениям

$$a_i x + b_i y + \ldots + l_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

с числом k неизвестных констант ($k < n$), коэффициентами, заданными соответствующей теорией, и измеренными свободными членами. Линейность системы (1) не является ограничительной, поскольку можно отыскивать приближённые значения неизвестных из любых k её уравнений и линеаризовать её. До введения понятия линейной независимости измерения всё же считались *физически* независимыми и системы (1) не имели решения.

За решение приходилось принимать любой набор чисел $\hat{x},\ \hat{y},\ \ldots$, приводивший к разумным остаточным свободным членам v_i. ПрНКв означал введение дополнительного условия

$$[vv] = \min$$

относительно любого набора чисел $\{v_i\}$, т. е. среди всех наборов чисел $\hat{x},\ \hat{y},\ \ldots$ С *методом* (по прежней терминологии, *способом*) *наименьших квадратов* (МНКв) мы соотносим применение ПрНКв, обоснованного его установленными оптимальными свойствами.

До введения ПрНКв вводились иные дополнительные условия, в том числе условия Бошковича (Maire & Boscovich 1770, с. 501)

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0,\ |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| = \min \qquad (2a, b)$$

и условие метода минимакса

$$|v_{\max}| = \min,$$

в котором максимум понимался относительно всех v_i, а минимум – относительно любых наборов $\{v_i\}$. Этот метод не обладал никакими оптимальными свойствами; он даже не обеспечивал достаточно хорошего *уравнивания* измерений, но позволял определить, верна ли теория, лежащая в основе систем (1). Действительно, если $|v_{\max}|$ оказывалось слишком крупным, то либо теория была неверна, либо измерения недостаточно точны. Алгоритм для применения метода минимакса разработал Лаплас, но можно считать, что Кеплер испытал несколько разумных вариантов уравнивания наблюдений Тихо Браге и решил, что они, эти наблюдения, будучи достаточно точными, не соответствовали системе Птолемея.

2. Принцип наименьших квадратов до 1809 г.

2.1. Предшественники Гаусса. В своём комментарии к мемуару Даниила Бернулли 1778 г. Эйлер, в том же году, ввёл принцип, от которого можно было бы легко перейти к ПрНКв (Шейнин 2007, § 3.4.2). Гаусс не сослался на этот комментарий, а соответствующий том журнала Петербургской академии наук не упомянут в (к сожалению, неполном) списке библиотечных книг

(Dunnington 1955, с. 398 – 404), которые он читал в свои студенческие годы.

Гаусс (Г – О 24.1.1812, *W*-8, с. 140; Г – Ш 24.6.1850, *W/Erg*-5.3, с. 89 второй пагинации) удивлялся, что ПрНКв не был открыт до него Эйлером, Ламбертом, Галлеем или Томасом Мейером. Galle (1924), правда, утверждал, что Гаусс обратился к теории ошибок под влиянием Ламберта. Впрочем, сам Гаусс (Г – Ш 12.2.1841, *W/Erg*-5.2, с. 9 второй пагинации) признал, что плохо запоминает прочитанное.

Анонимный автор (1805), видимо, фон Цах, описал мемуар Даниила Бернулли и комментарий Эйлера, но ничего подобного указанному выше не заметил.

Лежандр (1805) ввёл ПрНКв, утверждая, что он устанавливает *некоторое равновесие* между ошибками и препятствует преобладающему влиянию наибольших ошибок. Это качественное обоснование сопровождалось неточностью (упоминались ошибки вместо остаточных свободных членов) и почти прямым утверждением, что ПрНКв обеспечивает минимальное значение абсолютной величины наибольшей ошибки (вторая неточность). На самом деле, как Гаусс (1809b, § 186) указал впоследствии (и как можно легко доказать), метод минимакса соответствует условию

$$\lim(v_1^{2m} + v_2^{2m} + ... + v_n^{2m}) = \min,\ m \to \infty.$$

В том же 1805 г. Puissant (с. 137 – 141), см. также Harter (1974), упомянул мемуар Лежандра.

Американский математик Роберт Эдрейн опубликовал статью (Adrain 1808), см. Coolidge (1926), Шейнин (1965), Dutka (1990), содержавшую вывод ПрНКв. Hogan (1977) установил, однако, что статья Эдрейна фактически вышла в 1809 г., притом сам вывод был малоудовлетворительным. Впоследствии Эдрейн (1818a; 1818b) привёл соображения, обосновывающие вывод размеров Земли и применил ПрНКв к установлению сжатия земного эллипсоида. Несмотря на низкий математический уровень его исходной статьи и её длительное забвение, он бесспорно заслуживает упоминания. Ольберс, правда, узнал о ней по одной из его статей 1818 г. и в письме Гауссу 24.2.1819, *W/Erg*-4.1, с. 711 указал, что *Также и некий американец приписывает себе* […] *открытие метода наименьших квадратов*. Гаусс ничего не ответил; с него, видимо, был более чем достаточен приоритетный спор с Лежандром, см. § 2.3.

Длительное время считалось, что швейцарский математик и астроном Хубер пришёл к ПрНКв уже до 1802 г., однако Dutka (1990) обнаружил забытую статью Spieß (1939), который опровергнул это мнение. Оказалось, что Хубер был лишь знаком с ПрНКв по мемуару Лежандра (но неверно приписал ему связь этого принципа с вероятнейшими значениями неизвестных).

2.2. Гаусс. Он (1809a/1957, с. 150; 1809b, § 186) указал, что применял ПрНКв с 1794 или 1795 г. Во втором случае он упомянул *наш принцип*, а позднее, в письме Лапласу 30.1.1812, *W*-10/1, с. 373 – 374) пояснил:

Я применял метод [принцип] *наименьших квадратов с 1795 г.* […] *Но я начал часто применять этот метод лишь с 1802 г. и с тех пор применяю его, можно сказать, ежедневно в астрономических вычислениях* [орбит] *малых планет.* […]. *Я не спешил публиковать изолированный отрывок, и Лежандр меня опередил.* […]. *Я не думал. что г-н Лежандр может так высоко ценить идею столь простую, что следовало бы скорее удивляться, что ее не* [опубликовали] *сто лет назад* [...]. *Но я верю, что все, знающие меня, поверят мне на слово, так же, как я поверил бы от всего сердца, скажи Лежандр, что он владел этим методом до 1795 г.*

В одном из своих писем Гаусс (Г – О 24.1.1812, *W/Erg*-4.1, с. 493) чётко указал, что осенью 1802 г. вычислял орбиту Цереры, первой открытой малой планеты, по МНКв (пожалуй, по ПрНКв). И вот его архивное письмо Маскелайну 19.5.1802 (Roy. Greenwich Obs., Code 4/122:2) о вычислении орбит малых планет:

Получив результаты наблюдений до 17 апреля от Ольберса, я из любознательности попробовал применять к ним тот же метод, который я использовал при вычислении орбиты Цереры и который без всяких предположений обеспечивает истинное коническое сечение настолько точно, насколько позволяют суть проблемы и точность наблюдений.

И здесь, и во многих других случаях неразъяснённый *метод* следует считать методом (или принципом) наименьших квадратов! Вот теперь другие возможные случаи раннего применения ПрНКв Гауссом, см. также § 4.1. Он (May 1972, с. 299) *видимо* сформулировал ПрНКв *при уравнивании приближений* при вычислении квадратных корней и *поисках закономерностей в распределении простых чисел*. Пояснений Мей не привёл, но вот Maennchen (1918/1930, с. 19 – 20) указал:

Напрашивается вопрос, как при помощи этих обоих приближённых значений возможно ближе подойти к истинному значению? Этим вопросом в более общей форме Гаусс, как известно, усиленно занимался и отыскал его завершение в знаменитом методе наименьших квадратов.

Раннее применение Гауссом ПрНКв косвенно, но необоснованно подтвердил фон Цах (1813, с. 98 прим.):

Прославленный д-р Гаусс владел этим методом с 1795 г. и с выгодой применил его при определении эллиптических орбит четырех новых [малых] *планет, что усматривается из его замечательной работы* [*Теории движения*].

Оговоримся: из указанного сочинения этого всё-таки не следует. Но вот Gerardy (1977, с. 19, прим. 16), основываясь на архивных источниках, сообщил что-то подобное. Он, к сожалению, уделил особое внимание вычислениям простых геодезических построений.

Имеется и много других случаев, в которых Гаусс вполне мог применять ПрНКв хотя бы для предварительных пробных вычислений или прикидок, притом что для него этот метод не был жесткой процедурой (1809b, § 185). Кроме того, возможны ошибки вычислений, которые Гаусс допускал ввиду необычно быстрого вычисления (Maennchen 1918/1930, с. 65 и след.), а неизвестный способ взвешивания наблюдений мог сделать подтверждение невозможным. Наконец, нельзя сбрасывать со счетов мнение современников Гаусса (например, того же фон Цаха), которые единодушно подтверждали его утверждение, сформулированное в письме Лапласу (см. выше).

Гаусс сообщил о своём принципе многим коллегам и друзьям ещё до 1805 г., в том числе Бесселю (Бессель 1832/1848, с. 27) и Вольфгангу Больяи (Sartorius von Waltershausen 1856/1965, с. 43), отцу более известного Яноша Больяи, одного из авторов неевклидовой геометрии, и Ольберсу. Стиглер (1986, с. 145) заявил, что Гаусс *выпрашивал неохотные свидетельства у друзей*, и ещё отвратительнее было его позднейшее заявление (1981/1999, с. 322): Ольберс будто бы поддержал Гаусса *только после семи лет повторных подталкиваний*.

27.6.1809 Гаусс (*W/Erg*-4(1), с. 44) спросил Ольберса, помнит ли он, что узнал о ПрНКв от него, Гаусса, до 1805 г. Ответ Ольберса неизвестен, но позднее Гаусс (24.12. 1812, там же, с. 493) спросил, готов ли Ольберс подтвердить это в печати, и на этот раз Ольберс 10.3.1812 (там же, с. 495) чётко ответил: *да, и охотно*. Но в 1812 – 1815 гг. Ольберс не опубликовал ничего подходящего (см. соответствующий том источника *Catalogue of Scient. Literature*, Royal Society). Первая возможность появилась позже: Да, Гаусс разъяснил ему свой принцип в июне 1803 г. (Ольберс 1816, с. 192 прим.).

Стиглер высказал и другие сногсшибательные истины, например (1986, с. 143): *лишь Лаплас спас* гауссово обоснование ПрНКв 1809 г. *от забвения в накапливаемой куче искусственных построений*. На самом же деле это обоснование повторили с тех пор авторы сотен руководств и учебников. Невольно вспоминается утверждение Трусдела (1977/1984, с. 292), вполне подходящее Стиглеру:

Знание больше не является целью научного обучения [...]. *Ныне, по определению, истина отвергается как отжившее суеверие*.

Следует добавить, что в 1798 г. Гаусс (*W*-10.1, с. 533) записал в своём дневнике, что *защитил теорию вероятностей от Лапласа*. В письме Г – О 24.3.1807, *W/Erg*-4.1, с. 329, он разъяснил: ПрНКв предпочтительнее принципа Лапласа, который принял условия (2a, b), – т. е. условия Бошковича. Можно показать, продолжал

Гаусс, что *основы исчисления вероятностей не допускают этих условий, которые приводят к противоречиям*.

Через несколько лет Гаусс вернулся к этой теме (Г – О 24.1.1812; там же, с. 493 – 494):

В июне 1798 г. […] *я впервые увидел метод Лапласа и* […] *указал на его несовместимость с основными положениями исчисления вероятностей.*

Он, видимо, исходил из мемуара Лапласа (1776). Метод Лапласа, а точнее Бошковича, приводил к нулевым значениям некоторых v_i, см. § 3.3, что Гаусс (§ 3.1) считал неблагоприятным. Впрочем, этот метод приводит к выбору медианы (Шейнин 1973b, § 1.3.4) и потому вполне пригоден в тех случаях, когда медиана предпочтительнее среднего арифметического.

2.3. Продолжение: спор о приоритете. Лаплас (1812/1886, с. 353) объективно описал историю открытия ПрНКв:

Лежандр возымел простую идею рассматривать сумму квадратов ошибок наблюдений и приводить ее к минимуму, что непосредственно приводит к стольким же окончательным уравнениям, сколько элементов следует исправить. Этот ученый геометр первым опубликовал указанный метод, но надо отдать должное Гауссу, заметив, что за много лет до публикации Лежандра он постоянно пользовался той же идеей и сообщил о ней многим астрономам.

Лаплас, правда, не добавил, что к МНКв Лежандр уже не имел никакого отношения. Но одна фраза Гаусса (1809b, § 186), с которой вряд ли кто-либо согласился бы, крайне обострила положение: *Наш принцип, которым мы пользуемся с 1795 г., ещё недавно был изложен известным Лежандром*. Ну, что стоило ему бы добавить: *которому таким образом принадлежит приоритет публикации*? Более того, он и в дальнейшем (Гаусс 1821/1957, с. 143) написал:

Этот метод, который он затем, в особенности с 1801 г., имел возможность применять почти ежедневно в различных астрономических вычислениях, и к которому пришёл также Лежандр …

Это написано в третьем лице, как было принято для предварительных авторских сообщений. В протестующем письме 31.5.1809 Гауссу Лежандр (*W*-10.1, с. 380) заявил, что приоритет устанавливается только публикациями. Не получив ответа, в 1820 г. он (Шейнин 1973c, с. 124) обрушился на Гаусса, добавив аналогичное обвинение по поводу теории чисел. И снова Гаусс ничего не ответил, если не считать его утверждения, приведенного чуть выше, которому он предпослал пояснение:

Автор […], *впервые исследовавший эту задачу в 1797 г., скоро убедился, что разыскание* <u>*вероятнейших*</u> *значений неизвестных величин было бы невозможным, если не будет известна функция, которая представляет собой вероятность ошибок. Но так как этого нет, не остаётся ничего больше, как гипотетически принять такую функцию.* […] *Отсюда получается, что вероятность ошибки должна* [следовать нормальному закону; позднейший термин] *и тогда необходимо принять как имеющий общее значение тот самый метод, к которому автор пришёл уже несколько лет назад на основании других соображений.*

Уже после смерти Гаусса Sartorius von Waltershausen (1856/1965, с. 43) указал, что Гаусс, вспоминая спор, произнёс фразу: *Метод наименьших квадратов не является моим самым крупным изобретением*. В другой раз, продолжал этот автор, Гаусс лишь подчеркнул, что ему *вполне могли бы и поверить*.

Эту же тему затронул и Шумахер в письме Гауссу 3.3.1832 (*W/Erg*-5.1, с. 299 второй пагинации):

Из каждого правила есть выдающиеся исключения, и здесь одно такое имеет место. […] *Вы вначале публично упомянули метод наименьших квадратов* […] *и требовалось лишь не очень разработанное публичное упоминание.*

Он, видимо, имел в виду письмо Гаусса фон Цаху 24.8.1799 (*W*-8, с. 136). В нём Гаусс, однако, упоминал некий неразъяснённый метод уравнивания наблюдений, фон Цах же ничего о ПрНКв не знал, см. письмо Г – Ш 1831 г. (*W/Erg*-5.1, с. 292 второй пагинации).

3. Гаусс: особые черты его творчества

3.1. Задержка публикаций. Гаусс обычно очень долго не публиковал свои по-видимому готовые исследования. Клейн (1926, с. 11 – 12) именно это и указал, задал соответствующий вопрос и сам на него ответил:

Что могло служить причиной этого странного поведения? Возможно, её следует искать в определённой ипохондрии, которая подчас настигала его в разгар самого успешного творчества […] *ввиду гнетущего убожества будней* и являлась *оборотной стороной слишком большого напряжения его работы*.

См. также Biermann (1966; 1976, с. 8 – 10), который в основном оправдывал Гаусса. Усилия Бесселя убедить Гаусса в крайней нежелательности подобных задержек оказались безуспешными. В письме Гауссу 28.5.1837, *W/Erg*-1, с. 516 – 520, см. также Dunnington (1955, с. 216), он указал по поводу его геофизических исследований:

Вы никогда не признавали обязанности способствовать существующему знанию предмета своевременным сообщением *соответствующей части своего исследования. Вы живёте для потомков, но это полностью противоречит моему мнению*.

Гаусс ответил 28.2.1839, *W/Erg*-1, с. 523 – 529: он ничего не удерживает у себя (!), но не имеет времени подготавливать свои труды к публикации. Аналогично Гаусс оправдывался в письме Герлингу 29.12.1839, *W/Erg*-3, с. 591: ему пришлось три или четыре раза переписывать *Дополнение* (1828). Задолго до этого, в письме Ольберсу 14.4.1819, *W/Erg*-4.1, с. 720, он указал, что *хрупкий латинский язык часто противится простому, естественному выражению мыслей.*

Наконец, Гаусс (Г – Ш 9.1.1841, *W/Erg*-5.2, с. 2 второй пагинации) заметил, что разумно удерживать публикации, чтобы ознакомиться с аналогичными работами других авторов.

Не принимая объяснений Гаусса, Бессель (28.6.1839, *W/Erg*-1, с. 526 – 529) возобновил свои упрёки. Указав на несовершенство некоторых работ Лагранжа (и, косвенно, Эйлера), он риторически спросил:

Не должна ли сама главная идея, выступающая в подобающем, пусть не в наиболее достижимом изложении, быстрее способствовать науке, чем Ваши отсрочки до того времени, пока не станет благоприятным её самое добротное появление? От Вас не может скрыться, что то, что не будет взято у Вас, грозит оказаться полностью утерянным.

В письме Бесселю 25.1.1825 Ольберс (Dunnington 1955, с. 216; Biermann 1966, с. 12) указал:

Наш Гаусс сам часто виноват, коль скоро другие приходят к изобретениям, которые он также обнаружил. […] *Мне думается, однако, что Гаусс хочет срывать только наилучшие плоды* […] *до того, как показывать их другим. Я тем более считаю это небольшой слабостью такого в остальном великого человека, что он при своём неизмеримом богатстве идеями так много подарил другим*.

Действительно *наилучшие плоды*: Гаусс (Г – О 30.7.1806, *W/Erg*-4.1, с. 307) заявил, что его девиз *либо Цезарь, либо никто*.

И вот мнение современных комментаторов (Biermann 1966, с. 18; May 1972, с. 309):

То, что запрещено обычному автору, вполне должно быть разрешено гауссам, и во всяком случае мы обязаны уважать его основания.

Гаусс очень заботился о своём приоритете. […] *Но для него это означало первым изобрести, а не опубликовать; и ему было достаточно устанавливать даты по личным записям, переписке, загадочным замечаниям в своих публикациях*. […] *Намеренно или* *нет, он этим поведением сохранял преимущество тайны без потери приоритета в глазах последующих поколений.*

Сошлёмся теперь на старинную геодезическую задачу Потенота, которая в определённом случае имела бесконечное число решений. В письме 24.10.1840 Гаусс (Г – Г, *W/Erg*-3, с. 615) разъяснил, как проще всего определить, когда этот случай имел место, но (с. 617) попросил своего ученика *пока* не разглашать его мысли, потому что он сам хотел бы это сделать. 14.1.1842 (там же, с. 633 – 634) он пояснил, как при решении этой задачи можно применить комплексные числа, указал, что знал решение уже почти полвека назад (!), и хотел бы сам больше сказать о применении комплексных величин. В противном случае у него, Гаусса, отпадёт желание возвращаться к этой задаче. Её решение с применением комплексных чисел, но без пояснений и без упоминания указанного особого случая, содержалось в бумагах Гаусса (*W*-9, с. 221 – 224).

3.2. Отношение к работам других авторов. Гаусс далеко не всегда следовал своему желанию (§ 3.1) знакомиться с работами других авторов. Так (§ 2.1), он ничего не ответил по поводу *некоего американца*. Не ответил и по меньшей мере в двух других случаях (письма Ольберса 28.9.1819, *W/Erg*-4.1, с. 711, и 28.1.1825, *W/Erg*-4.2, с. 370) о статьях Т. Юнга с доказательством, очевидно нестрогим, ЦПТ и Пуассона (1824).

Далее, Энке (Encke 1850, с. 333) ошибочно приписал ПрНКв Лагранжу (1776, § 17, Задача № 5). 24.6.1850 Гаусс (Г – Ш, *W/Erg*-5.3, с. 67 второй пагинации) сообщил, что знает о мемуаре Лагранжа и прочтёт его когда появится возможность, но добавил, что не придаёт большого значения необоснованным идеям. Последнему утверждению несколько противоречат другие высказывания Гаусса. Вот запись из его дневника (1796 – 1814, 1796/1976, с. 66): *Открыт закон. Если он к тому же доказан, мы привели систему к завершению*. Далее, Г – О 31.12.1814, *W/Erg*-4.1, с. 567: мемуар Лапласа 1813 г., рецензию на который он (1815) опубликовал,

По моему суждению никак не достоин этого великого геометра. Я обнаружил в нём две очень существенные ошибки. До сих пор я неизменно представлял себе, что для геометров первого ранга исчисление всегда является лишь одеянием, в котором появляется то, что найдено не исчислением, а размышлением о самом предмете. Но мемуар Лапласа доказывает, что это правило всё же допускает исключения.

В 1806 г. Гаусс (*W*-6, с. 275 – 277) не попытался достать мемуар Лежандра (1805), чтобы не нарушить ход своих мыслей. Вообще же Гаусс редко ссылался на других. Он не упомянул Лежандра в своём основном сочинении о конформных отображениях и в течение 20 долгих лет не сослался ни на К. Якоби, ни на Дирихле (Biermann 1966, с. 17 – 18). В сочинении о земном магнетизме он (May 1972, с. 305) *типичным образом признал помощь Вебера, но* *не включил его как соавтора*. Гаусс (Г – Ш 6.7.1840, *W/Erg*-5.2, с. 385 и 388 первой пагинации) разъяснил, что ссылается на других только тогда, когда они этого полностью заслуживают, но для необходимых для установления этого специальных *литературных исследований* у него (никогда) нет времени, и нет у него к этому и наклонности.

Он мог бы вспомнить, что дважды ошибочно сослался на Лапласа (что могло повлиять на его *наклонности*): и по поводу условий (2a, b), и приписав ему вычисление интеграла от отрицательного квадрата экспоненциальной функции, которое удалось Эйлеру. На это Гауссу указал Лежандр в письме 30.5.1809 (§ 2.3).

Но добавим, что в своей переписке (May 1972, с. 304) Гаусс высказал высокое мнение и о Якоби, и о Дирихле, а в письме 17.10.1824 (Г – Ш, *W/Erg*-5.1, с. 413 первой пагинации) сообщил, что

С негодованием и печалью […] *прочёл, что старика Лежандра, красу и гордость своей страны и своей эпохи, лишили пенсии.*

4. *Теория движения* (1809b)

4.1. Публикация. Книга появилась на латинском языке, потому что издатель не согласился на её выход в свет на немецком. Вот что 27.6.1809 указал Гауссу по этому поводу Ольберс (*W/Erg*-4.1, с. 436):

Вы были вполне правы, когда сказали мне, что при последовательном совершенствовании Вашего метода он в теперешнем виде вряд ли подобен своему первоначальному состоянию. И переработка на латинский язык, насколько я могу припомнить по своему прежнему и лишь беглому просмотру немецкого текста, также намного усовершенствовала его.

Немецкий текст не сохранился, а упомянутый Ольберсом метод видимо относился к МНКв, см. начало § 2.2. Это же замечание следует иметь в виду и в нескольких случаях ниже.

В 1861 г. появился русский перевод книги, выполненный И. М. Догелем, студентом Московского университета. Его фамилия не была указана на титульном листе, см. *Русская энц.*, т. 5, с. 201. Год издания этого источника неизвестен; первый том энциклопедии вышел в 1911 г.

Сам Гаусс ещё ранее несколько раз описывал те же изменения.

1) Гаусс (примерно 1805, *W*-12, с. 161):

За это время [с октября 1801 г.] *я так много постепенно изменил в своём впервые применённом методе, столь многое указал и для многих частей совсем новые пути предложил, так что между тем, как я вначале в действительности вычислял планетные орбиты и как теперь излагаю в нынешнем сочинении, можно найти лишь очень немного схожего*.

Ольберс вернул Гауссу этот *Набросок* в 1805 г. (О – Г 2.11.1805, *W/Erg*-4.1, с. 276), что и позволило установить его дату. Предыдущий вариант, составленный в 1802 г. (Г – О 6.8.1802, там же, с. 65) утерян, см. замечание редактора переписки C. Schilling на той же странице.

2) Письмо Г – О 30.7.1806, *W/Erg*-4.1, с. 305. Гаусс указал, что к этому времени его *метод* был *настолько полно изменён, что на его первоначальный вид, который Вы имели, он более вряд ли похож*.

3) Гаусс (1806, *W*-6, с. 275 – 277): с 1802 г. он

Неизменно работал над совершенствованием самого метода, особенно прошлой зимой, так что его нынешний вид более почти не похож на первоначальный.

Гаусс начал работать над *Теорией движения* осенью 1806 г. и закончил её в апреле или мае 1807 г. В мае он стал переводить текст на латинский язык, а *набор начался* (видимо) в ноябре.

4) Г – О 24.3.1807, *W/Erg*-4.1, с. 329): *Теперь я занят разработкой* [уравнивания наблюдений] *на основе исчисления вероятностей*. В то время Гаусс уже, видимо, уточнял или дополнял своё изложение. Действительно, в мае 1807 г. он начал переводить немецкий текст, законченный в апреле или мае того же года, см. № 3 выше.

4.2. Предварительные замечания. Имея в виду вычисление орбит небесных тел, Гаусс (§ 172) заметил, что математическая обработка большого числа наблюдений требует их *целесообразной комбинации*. В § 173 он указал, что комбинировать их следует так, чтобы *случайные ошибки по возможности уничтожались* и что, *поскольку нет оснований предпочитать ту или иную величину*, следует *принять среднее арифметическое* из наблюдений. Он (§ 174) далее рассмотрел косвенные измерения: *нет никакого основания принимать за абсолютно точные те или другие шесть данных* и орбита, *которая точно удовлетворяет шести данным*, но отклоняется от других, менее соответствует истине, *согласно законам теории вероятностей*, нежели другая, которая *лучше сходится с остальными*.

Шесть данных необходимы для установления параметров и расположения эллипса в пространстве. Требуется, продолжал Гаусс, знать закон распределения вероятностей ошибок наблюдений (мы употребили позднейшую терминологию), и он переходит к выводу этого закона.

Пусть число взаимно независимых наблюдений равно n ($n > 6$), их ошибки обозначим через

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \qquad (3)$$

а соответствующая плотность φ(x) пусть будет чётной и одновершинной кривой. Вероятность появления указанных ошибок будет пропорциональна произведению

$$\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ \ldots\ \varphi(x_n)$$

и, по Гауссу, случай шести нулевых ошибок неблагоприятен (Гаусс 1809 b, § 174).

4.3. Нормальное распределение и принцип наименьших квадратов. Формальные математические рассуждения начинаются в § 175. Как гипотезу Гаусс принял, что среднее арифметическое из равноточных (как следовало из поставленных условий) наблюдений окажется

наиболее вероятным значением, если и не абсолютно точно, то по крайней мере очень близко к этому, так что всегда будет наиболее надёжно придерживаться именно [его].

Выбор среднего арифметического Бертран (1888b, § 138) назвал *постулатом*; сам же Гаусс (§ 179) сформулировал равносильное утверждение, но лишь для нормального распределения, хотя и отказался от этого ограничения.

Гаусс доказал, что в классе одновершинных, симметричных и (молчаливо) дифференцируемых распределений $\varphi(x-\overline{x})$ существует особый закон (нормальный), для которого оценка наибольшего правдоподобия $\hat{x}$ параметра сдвига (позднейшая терминология) совпадает со средним арифметическим $\overline{x}$ из наблюдений. Принцип наибольшего правдоподобия Гаусс ввёл независимо от своих предшественников, Ламберта [iii, § 3.2] и Даниила Бернулли (1778).

Само доказательство известно по его изложению в многочисленных источниках, и мы лишь укажем на одно малоизвестное обстоятельство (Уиттекер и Робинсон 1924/1949, с. 219 прим.): дополнительно принимать, как это сделал Гаусс (§ 176), что априорно множества (3) распределены равномерно (и далее исходить из принципа обращённой вероятности), не обязательно, потому что *это можно вывести из постулата среднего арифметического*.

Формулу нормального распределения Гаусс (§ 177) записал в виде

$$\varphi(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2\Delta^2),\ h^2=-\frac{k}{2}. \qquad (4)$$

ПрНКв Гаусс обобщил на случай неравноточных наблюдений, и (Г – Г 2.4.1840, *W*-8, с. 153 – 154) на уравнивание неоднородных величин (углов и сторон геодезической сети).

В 1829 г. Гаусс (*W*-5, с. 28) заметил аналогию между ПрНКв и механическим принципом наименьшего принуждения:

Весьма примечательно, что свободные движения, если они не могут происходить при необходимых условиях, видоизменяются природой точно как математик уравнивает по МНКв опыты, которые относятся к величинам, связанным друг с другом необходимой зависимостью.

В XX в. аналогия между геодезическими и механическими системами была замечена, и появились различные варианты *геодезической релаксации*, восходящие к Гауссу, см. § 6.10.4.

4.3.1. Случайные ошибки. Гаусс не различал в явной форме случайные и систематические ошибки и (§ 175) рассматривал ошибки с одновершинной и *в большинстве случаев* симметричными плотностями. Именно для таких ошибок он и вывел нормальное распределение, хотя указанные свойства он использовал лишь косвенно, применяя среднее арифметическое. Впрочем, Гаусс позднее (1823b, § 1) назвал случайными те ошибки, которые происходят от *несовершенства наших чувств*, а также зависящие *от внешних причин, например* […] *колебаний воздуха*.

Можно просто сказать, что случайные ошибки являются случайными величинами, но для приложений этого недостаточно, современное же математическое определение (Никулин 1999) явно неудачно. Было замечено (Merriman 1877, с. 165; Czuber 1891, с. 108), что вывод Гаусса относился не к ошибкам наблюдения, а к остаточным свободным членам систем (1), и ещё раньше это заметил Helmert (1872, с. 75), однако эти последние величины связаны с истинными ошибками (назовём их ε_i) линейной зависимостью

$$v_i = \varepsilon_i - \sum\varepsilon_i/n,$$

и потому также нормальны ввиду устойчивости нормального закона. Быть может это было известно Гауссу.

4.3.2. Дополнительно о принципе среднего арифметического. Этот принцип применялся и до Гаусса, хотя и без обоснования. Кеплер (1609/1992, с. 200/63), см. Шейнин (1993, § 5.3А), косвенно назвал его *буквой закона*; в XVII и XVIII веках среднее арифметическое применялось учёными, проводившими градусные измерения (Шейнин 1973c, с. 122 – 123), а Симпсон и Лагранж доказали вероятностную предпочтительность среднего перед отдельным измерением соответственно для двух и нескольких распределений (Шейнин 1973a, §§ 1.2.2 и 2).

В 1845 г. сам Гаусс (*W*-4, с. 143) повторил своё утверждение о предпочтительности среднего, позднее он (там же) заметил, что для независимых наблюдений применение среднего арифметического является *в общем совершенно верным* и привело к *блестящим результатам* в естествознании. И вот мнение Гильберта (неопубликованная лекция 1905 г., см. Corry 1997, с. 161):

Если для некоторой величины получены из наблюдений многие значения, то ее вероятнейшим значением является среднее арифметическое …

В наше время Chakrabarti (1989) попытался применить тот же принцип к термодинамике.

Без особого обоснования и Ламберт, см. также [iii, § 3.3], и Лаплас [vi, § 2] указывали, что следует применять среднее арифметическое, а Марков (1924, с. 323), и видимо только он, фактически заявил, что следовало предположить, что истинное значение измеряемой константы существует. Но важнее указать, что Фурье [vi, § 3] определил подобное истинное значение как предел среднего арифметического при неограниченном возрастании числа наблюдений.

Многие авторы, начиная быть может с Энке (Encke 1832), пытались обосновать принцип среднего арифметического детерминированными аксиомами. В 1831 г. Гаусс (*W*-8, с. 145 – 146), который, видимо, прочёл его работу в рукописи, указал, что *не без интереса* ознакомился с ней. Цох (1935) заключил, что, хотя успех и не был никем здесь достигнут, этот принцип всё-таки может быть установлен без привлечения стохастических понятий. Содержательная сторона подобных исследований привела к появлению элементов теории инвариантных гипотез и оценок (Lehmann 1959/1997, гл. 6).

5. *Определение точности наблюдений* (1816)

5.1. Мера точности и вероятная ошибка. Гаусс определял меру точности h, – параметр нормального закона (4), – исходя из квадратов и более высоких степеней ошибок.

Пусть ошибки m [независимых] наблюдений обозначены через α, β, γ, … Гаусс указал, что вероятнейшее значение $\hat{h}$ меры h определяется из условия

$$h^m \exp[-h^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots)] = \max,$$

откуда

$$\hat{h} = \sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}}\,.$$

Заметим, что $\hat{h} = 1/(\mu\sqrt{2})$, где μ – средняя квадратическая ошибка наблюдения. Гаусс также установил, что

$$P(\hat{h}-\lambda \le h \le \hat{h}+\lambda) = \theta\left(\frac{\lambda\sqrt{m}}{\hat{h}}\right),\ \theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-z^2)dz,$$

так что, для $P = 1/2$, $\lambda = \rho\hat{h}/\sqrt{m}$, где $\rho \approx 0.477$ – корень уравнения $\theta(t) = 1/2$.

Наконец, для распределения (4) $P(|x| \le \rho/h) = 1/2$ и, следовательно,

$$r = \rho/h \qquad (5)$$

есть вероятная ошибка, которую формально ввел Бессель (§ 5.5).

5.2. Вывод вероятной ошибки. Пусть

$$S_n = |\alpha|^n + |\beta|^n + |\gamma|^n + \ldots,\ K_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \varphi(x)dx.$$

Тогда для больших значений m

$$P(-\lambda \le S_n - mK_n \le \lambda) = \theta[\frac{\lambda}{\sqrt{2m(K_{2n} - K_n^2)}}], \qquad (6)$$

где mK_n – вероятнейшее значение S_n.

Эту формулу Гаусс не обосновал, доказали ее Helmert (1875; 1876) и Lipschitz (1890), а Крамер (1946, § 28.2) указал, что предложение Гаусса является очевидным частным случаем ЦПТ. Фактически Гаусс применил абсолютные моменты и его выражение для K_n формально неверно. Кроме того, mK_n – это среднее, а не вероятнейшее значение S_n.

Гаусс также вывел выражение для абсолютных моментов нормального закона

$$mK_n = \bar{S}_n = m\frac{\Pi[(n-1)/2]}{h^n\sqrt{\pi}},\ \Pi(x) = \Gamma(x+1),$$

так что h, а потому и r, см. формулу (5), могли быть оценены по S_n, а кроме того могли быть вычислены вероятные интервалы для r. Сравнивая их для различных значений n, Гаусс заключил, что наилучшая оценка r достигается при $n = 2$.

5.3. Асимптотическое распределение хи-квадрат. Пусть $1/(h\sqrt{2}) = \alpha$ и $n = 2$. Тогда

$$\sqrt{m(K_4 - K_2^2)} = \alpha^2\sqrt{2m}$$

и, см. формулу (6),

$$P(-\lambda \le S_2 - mK_2 \le \lambda) = N(0;\alpha^2\sqrt{2m}),$$

так что S_2 подчиняется нормальному закону. Это и есть асимптотическое распределение хи-квадрат (Крамер 1946, § 20.2).

5.4. Средняя абсолютная ошибка. Гаусс также ввёл более удобный, но *значительно менее точный* метод вывода r для нормального распределения. Обозначим среднюю абсолютную ошибку через M. Тогда вероятнейшее значение этой меры можно принять за r с вероятными пределами

$$M[1 \mp \sqrt{\frac{\pi}{8m}} \exp(\rho^2)] = M[1 \mp \frac{0.7520974}{\sqrt{m}}]. \qquad (7)$$

Доказал эту формулу не он сам, а Дирихле (1834). Он же исправил числитель в формуле (7), который должен был равняться 0.786716. В соответствии с уже тогда давно устаревшей традицией этот числитель был приведен обоими выдающимися авторами с умопомрачительной точностью.

5.5. О вероятной ошибке. Вероятности появления и непоявления события сравнивались в теории вероятностей с самого начала. В своей переписке 1669 г. Гюйгенс (1895, с. 248) ввёл вероятную продолжительность жизни. Вероятную ошибку Бессель (1815) применил как меру точности наблюдений, затем (1816, с. 141 – 142) не только применил, но и определил её формально.

Исследованиям, связанным с применением этой меры, мы в основном обязаны, однако, Гауссу (§§ 5.1 и 5.2). Уже впоследствии он упоминал её в своей переписке (Гаусс – Энке 25.2.1819, *W*-12, с. 200 – 201; Г – Ш 2.2.1825, *W*-8, с. 143):

Этот результат [формула (8) для эмпирической дисперсии, см. наш § 6.7, или быть может её прежний смещённый вариант] […] *не зависит от закона распределения вероятностей. Лишь определение точности самой вероятной ошибки зависит от него, причём её установление не является вполне лёгкой задачей. Весьма примечательно, однако, что, когда принята формула* [нормального закона], *указанное установление оказывается таким же надёжным, как будто эта ошибка основана на действительно известных* ($n – k$) [см. ту же формулу] *ошибках наблюдения*.

Вероятной ошибкой Гаусс назвал саму величину σ, см. указанную формулу (8). Он косвенно добавил: не *вероятнейшая*. Мы усматриваем здесь несоответствие с его общей терминологией, см. конец нашего § 6.1.

Так называемую вероятную ошибку я, по существу говоря, хотел бы запретить как зависящую от гипотезы. Впрочем, её можно вычислить, умножив среднюю ошибку на 0.6744897.

Это утверждение (в котором *вероятная ошибка* понимается обычным образом) неясно: указанное соотношение пригодно лишь для нормального распределения. Средней ошибкой Гаусс (см. наш § 6.2) называл ту, которая впоследствии была названа средней квадратической.

И тем не менее, видимо в силу своей простоты и привлекательности, сам Гаусс иногда применял её в своей переписке (Г – О, примерно 19.5.1819, *W/Erg*-4.1, с. 726 и 26 – 30.7.1825, *W/Erg*-4.2, с. 424 – 425; Г – Ш 14.8.1825 и между 14.7 и 8.9.1826, *W/Erg*-5.1, с. 30 и 65).

Более того, естествоиспытатели продолжали пользоваться вероятной ошибкой, и мы могли бы сослаться на Ньюкома и Менделеева, но быть может достаточно сказать, что Марков не вполне определённо высказывался о ней. Он (1899/1951, с. 247) назвал вероятную ошибку *сомнительной величиной*, которую можно применять лишь при нормальном распределении, но в редком источнике 1903 г. (Шейнин 2006/2009, с. 114) без комментариев упомянул правило, в котором требовалось её вычисление. А Бомфорд лишь в третьем издании своего фундаментального руководства (1952/1971, с. 610 – 611) *неохотно* перешёл к средней квадратической ошибке от вероятной. Отрицательное мнение Л. Струве (1887, см. *Тезисы* на последней ненумерованной странице) о вероятной ошибке было, видимо, исключением.

6. *Теория комбинаций* (1823b)

Более правильный, но не традиционный перевод названия этого мемуара был бы *Теория сочетания* (наблюдений). Гаусс снова установил ПрНКв, исходя теперь из принципа наибольшего веса (наименьшей дисперсии). Подход к уравниванию по методу *условных наблюдений*, описанный Гауссом в *Дополнении* (1828) к этому мемуару, практически очень важен, хотя никаких существенно новых идей в нем нет, см. § 9.1. Собственно уравнивание по этому методу состоит в определении условного минимума суммы квадратов поправок с обычным применением множителей Лагранжа. Как ни странно, четкое пояснение сути указанного метода представил лишь Helmert (1872, с. 197).

6.1. Случайные ошибки и нормальный закон. Новый подход. Первым стохастические свойства *обычных* случайных ошибок описал Галилей, см. Майстров (1964) и Хальд (1990, § 10.3). Их изучал Ламберт [iii, § 3.3], но лишь Даниил Бернулли (1780) чётко разделил ошибки на систематические (постоянные) и случайные (нормально распределённые).

Гаусс (§ 1) выделил случайные (irregulares seu fortuiti) и систематические (constantes seu regulares) ошибки. Первые, не поддающиеся вычислению, вызваны либо несовершенством органов чувств или инструментов, либо внешними условиями (§§ 1 – 3), см. наш § 4.3.1. Понятие случайной величины еще не появилось.

Гаусс (§ 4) предположил, что плотность ошибок наблюдений φ(x) существует, одновершинна и, как и раньше (1809b, § 175), *в большинстве случаев* четна, так что (§ 5) их среднее значение равно нулю. Однако, очевидно понимая, что наблюдения не могут всегда обладать плотностями, которые отличаются друг от друга лишь параметрами (1809b), он отказался от ограничения случайности нормальностью.

Вторую важную причину нового подхода Гаусс сообщил в некоторых своих письмах, особенно ясно в письме Бесселю в 1839 г. (*W*-8, с. 146 – 147):

То, что я впоследствии отказался от метафизики метода *наименьших квадратов, приведенной в* [1809 г.], *произошло главным образом по причине, о которой я сам публично не упоминал. Именно, я считаю во всех случаях менее важным отыскание такого значения неизвестной величины, вероятность которой максимальна, но всегда остается бесконечно малой, нежели того, с которым получаешь наименее невыгодную игру. Иными словами, если fa обозначает вероятность значения a для неизвестного x, то менее важно привести к максимуму fa, нежели к минимуму интеграл* $\int fxF(x-a)dx$*, распространенный на все возможные значения x, в котором за F берется функция всегда положительная и подходящим образом неизменно возрастающая при возрастании аргумента*.

Под метафизическими соображениями в то время понимались общие рассуждения, не подкреплённые математически, так что упоминание метафизики означало введение исходных предпосылок (постулата среднего и совпадения среднего с оценкой наибольшего правдоподобия).

Вот более раннее письмо Гаусса 23.8.1831 Энке (там же, с. 145 – 146):

Строго рассматривая этот вопрос, видно, что именно поэтому [бесконечная малость вероятности, см. письмо Бесселю] *подобное вероятнейшее значение имеет лишь малый практический интерес, намного меньший, чем когда грозящая ошибка в среднем менее всего вредна. Поэтому, не говоря о других, разумеется, столь же или намного более важных причинах, я предпочёл этот второй принцип, который не следует путать с первым*.

Наконец, мы полагаем, что Гаусс недолго был удовлетворен своим первым обоснованием МНКв, т. е. *метафизикой*. Действительно, его принцип среднего арифметического содержал оговорку, а выведенный ПрНКв должен был *считаться за аксиому* (§ 179). Неудивительно, что Freudenthal & Steiner (1966, с. 177) заявили, что первое обоснование было *затейливым и малоубедительным*. Заметим, наконец, раннее признание нового обоснования МНКв: Назимов (1889) указал, что *в этом году* будет преподавать *теорию наименьших квадратов* по первой части мемуара Гаусса.

В § 17 Гаусс заметил, что надеется

Оказать услугу математикам, приведя здесь новое изложение вопроса и показав, что способ наименьших квадратов даёт наилучшую комбинацию наблюдений, притом не приближённую, а точную, каков бы ни был закон вероятности ошибок и каково бы ни было число ошибок, если только понятие средней ошибки принимать не согласно определению Лапласа, а так, как установлено нами.

Примерно то же Гаусс указал в другом месте (1821/1957, с. 100) и в письмах 25.2.1819 Энке и 25.11.1844 Шумахеру (*W*-12, с. 200 – 201 и 147 – 148). Во втором письме он заметил, что допустимым он считает только обоснование МНКв, данное в 1823 г. Он оставил ещё одно замечание по поводу Лапласа (1811 и 1812, §§ 20 – 21) в письме Г – О 22.2.1819 (*W*-8, с. 142 – 143): обобщение его результатов с двух неизвестных на большее их число *видимо ещё недостаточно убедительно*. То же замечание сделал Чубер (1891, с. 252). Однако, в *Теории комбинаций* такого замечания не было, так не смог ли Гаусс сам осуществить это обобщение?

Укажем, наконец, что в своём новом мемуаре Гаусс соответственно поменял терминологию: *вероятнейшие* значения (*maxime probabile*), см., например (1809b, § 177), стали *наиболее надёжными, maxime plausibiles* (1823b, § 21), русский перевод 1957 г. неверен! В немецких авторских сообщениях Гаусс употреблял соответственно *wahrscheinlichste* и *sicherste*.

6.2. Мера точности. Гаусс (§ 6) ввел меру точности [дисперсию],

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ была плотностью ошибок наблюдения. Выборочное значение дисперсии оказалось непараметрической оценкой. Он также указал, что среди подходящих функций x простейшей является x^2, а в § 7 назвал *m средней ожидаемой ошибкой или просто средней ошибкой* (errorem medium metuendum, sive simpliciter errorem medium). *Ожидаемую* ошибку быть может следовало бы называть *грозящей*. Точность и вес (pondus) Гаусс там же определил как величины, обратно пропорциональные m и m^2 соответственно.

Гаусс (1821/1957, с. 142) указал, что его выбор был

связан с некоторыми другими чрезвычайно важными преимуществами, которых не имеет ни одна другая функция. Впрочем, может быть принята и любая другая степень с чётными показателями.

Могла быть принята несмотря на преимущества дисперсии? Bienaymé (1853/1867, с. 167 – 169) доказал, что весьма простая формула для оценки точности линейной формы независимых аргументов (§ 6.4) не имеет места ни при каких других чётных показателях, см. Идельсон (1947, с. 269 – 271). Поэтому, продолжал Бьенеме, выбор дисперсии был неизбежен; он также полагал (с. 169), что Гаусс здесь ошибался, но мы вовсе не уверены в этом.

Также в § 6 Гаусс заметил, что *знаменитый Лаплас рассматривал этот вопрос почти подобным же образом*, однако его допущение было *не менее произвольно* и к тому же было в *высокой степени неудобно в аналитической трактовке*. Его критерием был минимум абсолютного ожидания ошибки, и вычисление было практически возможно лишь при нормальном распределении.

6.3. Неравенство типа Бьенеме – Чебышева. Гаусс (§ 9) рассмотрел вероятность

$$\mu = P(|\xi| \le \lambda m) = \int_{-\lambda m}^{\lambda m} \varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ была [одновершинной] плотностью случайных ошибок ξ, для которых, естественно, $E\xi = 0$. Заметим, что в одном из своих примеров Гаусс записал нормальное распределение не так, как раньше, поскольку принял иное определение для h. В § 10 он доказал свою *замечательную теорему*:

$$\lambda \le \mu\sqrt{3} \text{ для } \mu \le 2/3; \ \lambda \le \frac{2}{3\sqrt{1-\mu}} \text{ для } 2/3 \le \mu < 1.$$

Крамер (1946, § 15.7 и Упр. 4 к главам 15 – 20) привел современное доказательство иного вида формулы:

$$P[|\xi - x_0| \ge k\tau] \le \frac{4}{9k^2}, \ k, \tau > 0.$$

Здесь x_0 было модой $\varphi(x)$ и $\tau^2 = \sigma^2 + (x_0 - E\xi)^2$ – второй момент относительно моды. У Гаусса $x_0 = E\xi = 0$.

Seal (1967/1970, с. 210) полагала, что неравенство Гаусса имело место для непрерывных распределений, симметричных относительно своей единственной моды, однако ни Гаусс, ни Крамер не вводили свойство симметрии. Она также предположила, что желание Гаусса отказаться от нормального распределения можно объяснить его открытием неравенства

$$P[|\xi| \le 2m] \ge 0.89.$$

Всё же этот интересный довод, видимо, сыграл только вспомогательную роль.

6.4. Независимость. Впервые это понятие определил Муавр в 1712 г. Гаусс (§ 18) ввёл иное определение, особо пригодное для естествознания. Ошибки e_1 и e_2 двух функций наблюдений, V_1 и V_2 (линейных, добавил он почему-то позже, в § 19), как он заявил, *не будут полностью независимы друг от друга*, если [хотя бы] одно наблюдение является их общим аргументом. Без указанного ограничения утверждение Гаусса было бы ошибочным.

Действительно. В соответствии с теоремой Стьюдента – Фишера, как мы назовем ее, при нормальном распределении выборочные среднее и дисперсия независимы. Не ссылаясь ни на Гаусса, ни друг на друга, его определение неизменно повторяли, а иногда подразумевали в геодезии, и можно заключить, что его применяли и до Гаусса. Новой, однако, была его оговорка в § 19.

Гаусс привел несколько примеров и в одном из них вычислил дисперсию линейной формы $W = [ce]$ независимых ошибок e_i:

$$m_W^2 = \sum c_i^2 m_i^2,$$

где m_i^2 – среднее значение квадрата e_i. Для двух функций таких ошибок, $V_1 = [\alpha e]$ и $V_2 = [\beta e]$,

$$\mathrm{E}(V_1 V_2) = \sum \alpha_i \beta_i m_i^2 \neq 0.$$

6.5. Принцип наибольшего веса. Пусть исходные уравнения с k неизвестными будут

$$a_i x + b_i y + c_i z = L_i = l_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n > k.$$

Если их неравные веса, обозначенные через p_i, натуральные числа, то, для приведения уравнений к одному и тому же весу, каждое i-е из них следует выписать p_i раз, или, при любых весах, умножить его на $\sqrt{p_i}$. По условию наибольшего веса (см. ниже) оба случая приводят к обобщенному принципу наименьших квадратов $[pvv] = \min$. Таким образом, вся теория может быть рассмотрена в предположении $p_i = \mathrm{Const}$.

Ошибки наблюдений предполагаются несмещенными, $\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$, и требуется определить оценки неизвестных $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z},$ также несмещенные,

$$\mathrm{E}x = \hat{x},\ \mathrm{E}y = \hat{y},\ \mathrm{E}z = \hat{z},$$

и обладающие наибольшими весами. Вывод Гаусса тяжеловесен и мы рекомендуем придерживаться изложения у Идельсона (1947, § 11). В математической статистике несмещенные оценки с наименьшими дисперсиями, подчиняющиеся определенным аналитическим условиям, называются *эффективными*, так что оценки МНКв, полученные в 1823 г., являются эффективными.

Ярошенко (1893) попытался обосновать МНКв неравенством Бьенеме – Чебышева. Если задать некоторую вероятность P, то *теснейший* интервал 2ε для неравенства $P(|\xi - \mathrm{E}\xi| < \varepsilon)$ имеет место при наименьшей дисперсии $\mathrm{var}\xi$, и этот очевидный вывод позволяет выбрать оптимальные множители и *наилучшие* оценки (оценки МНКв) неизвестных. Можно сказать, что Ярошенко не сказал ничего нового, но по крайней мере включение неравенства Бьенеме – Чебышева явилось здесь интересным. Впрочем, Усов (1867) намного опередил Ярошенко.

6.6. Линейные функции оценок. Оценки неизвестных нельзя считать независимыми, поэтому оценивать вес (или дисперсию) их функции приходится косвенным образом. Эта задача естественно появляется в геодезии, чего Гаусс не указал. Пример: определить вес какой-либо стороны триангуляции после её уравнивания. Мы снова рекомендуем читателям воспользоваться изложением у Идельсона (1947, § 13).

6.7. Точность наблюдений (§§ 37 – 38). В случае k неизвестных, как доказал Гаусс,

$$m^2 = \frac{\mathrm{E}[vv]}{n-k}, \tag{8}$$

но, поскольку невозможно установить E[vv], приходится вместо него подставлять само [vv]. Лаплас (1816) косвенно применил аналогичную формулу с n вместо (n – k) в знаменателе, хотя только для нормального распределения, Гаусс (1823а/1957, с. 146) же, не называя никого, указал, что соотношение (8) следует предпочитать и по существу, и для поддержания *достоинства науки*. Несмещённая оценка (8) практически не применялась, неизменно подсчитывалось не m^2, а m, которое было смещено!

Гаусс (§§ 39 – 40) определил и границы для дисперсии m^2, т. е. для varm^2. Его прямые вычисления несколько тягостны, но достаточно ясны и его окончательные границы были такими:

$$\frac{2(\nu_4 - 2m^4)}{n-k},\ \frac{\nu_4 - m^4}{n-k} + \frac{k(3m^4 - \nu_4)}{n}, \tag{9}$$

где ν_4 – четвертый момент ошибок. Словесно Гаусс добавил, что для нормального распределения ($\nu_4 = 3m^4$)

$$\mathrm{var}m^2 = \frac{2m^4}{n-k}. \tag{10}$$

Более точно, выражения (9) и правая часть формулы (10) должны были включать не m^2, а неизвестную величину $\mathrm{E}\varepsilon_i^2$. Действительно, $\mathrm{E}m^2 = \mathrm{E}\varepsilon_i^2 \equiv s^2$, но $m^2 \neq \mathrm{E}\varepsilon_i^2$. Здесь ε_i – истинная ошибка наблюдения l_i. Заметим также, что первое из двух выражений в (9) не всегда является нижней границей; их относительное расположение зависит от распределения ошибок. Первая граница ошибочна, см. ниже.

Колмогоров озаглавил один из разделов своей статьи (1946) *Догматическое изложение результатов Гаусса*. В нем он привел формулу (8), сразу же без символа ожидания, и формулу (10), – в его нумерации, формулы (XII) и (XIV), – но почему-то не упомянул, что последняя относилась только к нормальному распределению. Он указал еще, что формула (XII) является *просто определением*, но, к сожалению, не развил этой мысли и никто из позднейших авторов не комментировал ее. Впоследствии Колмогоров с соавторами (1947) исправили ошибку Гаусса и, независимо повторяя и несколько подправляя Гельмерта (1904a; 1904b), получили

$$\frac{\nu_4 - s^4}{n-k} - \frac{\rho}{n-k}\frac{k}{n} < \mathrm{var}\, m^2 < \frac{\nu_4 - s^4}{n-k},$$

причём Мальцев (1947) доказал, что в обоих случаях строгое неравенство можно ослабить. Здесь $\mathrm{E}m^2 = \mathrm{E}\varepsilon_i^2 = s^2$. Мы ограничились приведением формулы для случая ρ = $\nu_4 - 3s^4$ при ρ ≤ 0. Наконец, Крамер (1946/1948, с. 382) предложил формулу для одного неизвестного

$$\operatorname{var} m^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$$

и дополнительно, для нормального распределения,

$$\operatorname{var} m^2 = \frac{2(n-1)}{n^2} m^4.$$

Здесь величины μ – центральные моменты и m^2 – смещенная оценка, соответствующая случаю $k = 0$.

Существенна ли несмещённость? Представляется, что она ныне допускается (Sprott 1978, с. 194) и во всяком случае несмещённые оценки не всегда существуют. Czuber (1891, с. 460) обсуждал эту тему с Гельмертом, и они заключили, что основным является не сама дисперсия, а её относительная величина, var m^2/m^2, причём Eddington (1933, с. 280) независимо выразил то же мнение. Более того, по поводу смещённости неизвестных в (1) можно высказать аналогичное утверждение: важнее её отношение к дисперсии, или иначе: остаточная систематическая ошибка не так важна, как её отношение к случайным ошибкам. Опираясь на сомнительные соображения, так полагали по крайней мере советские геодезисты.

Bertrand (1888a) критиковал формулу (8). Молчаливо допустив нормальное распределение, он привёл пример, в котором его собственная оценка дисперсии оказалась меньше, но он упустил из вида её несмещённость, которая у него исчезла,
а кроме того он напрасно вычислял дисперсию, забыв про дополнительную формулу Гаусса (10) для нормального распределения.

6.8. Упрощенное изложение второго обоснования. Колмогоров (§ 6.7) заметил, что формула (8) является лишь определением. Да, с учётом числа степеней свободы корень из выборочной дисперсии *должен* иметь указанный вид, но мы полагаем, что доказывать эту формулу всё-таки нужно. И доказательство, предложенное многими авторами начиная с Гаусса, достаточно просто. Необходимыми ограничениями были линейность исходных уравнений, независимость их свободных членов (т. е. измерений) и несмещённость искомых оценок $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$

Основное, однако, в том, что ПрНКв не потребовался. Напротив, его можно ввести сейчас, хотя формулы Гаусса для составления и решения нормальных уравнений и вычисления весов $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ будут по-прежнему нужны. Мы должны подчеркнуть, что ввиду своей сложности мемуар 1823 г., в

отличие от первого мемуара 1809 г., почти никогда не описывался в учебниках или руководствах. Вот, например, мнение нашего современника (Stewart 1995, с. 222) о §§ 12 и 13: *Нужно быть очень великодушным, чтобы заключить, что Гаусс действительно что-то доказал*.
Теперь же ввиду нашего замечания положение коренным образом изменилось.

Можно предположить, что Гаусс фактически предложил два обоснования (мы же оставили только второе). Но почему он даже не намекнул на это? Мы можем только сослаться на двух авторов, Кронекера (Kronecker 1901, с. 42) и того же Стьюарта (Stewart 1995, с. 235):

Способ изложения в <u>Арифметических</u> [*<u>исследованиях</u>* 1801 г.], *как и вообще в работах Гаусса, евклидов. Он формулирует и доказывает теоремы, причём тщательно уничтожает все следы хода своих мыслей, которые привели его к результатам. Эта догматическая форма наверняка явилась причиной того, что его труды так долго оставались непонятыми*.

Гаусс может быть таким же загадочным для нас, каким он был для своих современников.

6.9. Включение нового наблюдения в проделанное уравнивание (§ 35). Современное доказательство формул Гаусса, относящихся к этой теме, или к *рекуррентному МНКв*, как он теперь называется (Sprott 1978, с. 185), предложил Plackett (1950). Сославшись на другого автора, Спротт заметил, что этот метод стал исключительно важным при обработке данных.

6.10. Изменение веса наблюдения (§ 36). Пусть после уравнивания обнаружилось, что одно из исходных уравнений должно было изменить свой вес. Требуется исправить оценки неизвестных, не прибегая к новому уравниванию. Гаусс заметил, что эта задача аналогична только что рассмотренной и привел необходимые формулы. Изменение веса равносильно добавлению нового наблюдения с весом, равным требуемому изменению веса.

6.11. Практические соображения

6.11.1. Число наблюдений. Сколько раз следует измерять углы треугольников при заданной степени точности результатов? Ни формула (8), ни теория ошибок в целом не учитывают наличия систематических ошибок и поэтому наблюдатель сможет установить достигнутую точность, да и то лишь частично, только после измерения всех трех углов каждого треугольника. Но к окончательной оценке приведет лишь измерение базисов и азимутов на обоих концах цепи и вычисление соответствующих невязок.

Однако, если углы измерены при благоприятных условиях с соблюдением установленных правил для исключения систематических ошибок, надлежащим типом инструмента и определенным числом приемов, можно разумно надеяться, что заданная точность будет достигнута и что формула (8) это подтвердит. Зная заранее количество приёмов измерений (n), можно полнее исключать систематические ошибки деления лимба (сдвигать его между приёмами на 180°/*n*), а также добиться примерно равного числа приёмов в утренние и предвечерние часы. Наше рассуждение в принципе пригодно для экспериментальных наук вообще.

Соответственно, к концу XIX в. или, возможно, несколько позднее, по крайней мере в некоторых странах (например в Советском Союзе), см. Bomford (1952/1971, с. 24), были введены жесткие правила для исполнения триангуляции высшего класса. Гауссу, однако, пришлось действовать иначе и он с этим успешно справился. Так (Schreiber 1879, с. 141),

Из его [Гаусса] *полевых журналов, которые находятся передо мной, скорее следует, что на каждой станции он наблюдал так долго, пока не убеждался, что каждый угол был измерен столько раз, сколько полагалось. И после этого он* [...] *вводил полученные значения направлений в уравнивание системы в качестве равноточных и независимых друг от друга*.

Добавим: вводил таким образом, несмотря на то, что углы измерялись резко отличными друг от друга количествами приемов (Г – Г 26.12.1823, *W*-9, с. 278 – 281). Герлинг (1839, с. 166 – 167), бывший студент Гаусса, придерживался того же подхода и указал, что после некоторого числа приемов наблюдатель убеждался, что *всякое продолжение* [...] *будет только напрасным* [...]. *И я именно так* [т. е. соответственно] *и поступал по примеру Гаусса*.

И вот свидетельство Бесселя (1833, с. 464): существуют

Постоянные колебания в границах неизбежного несовершенства [...] *сообразно с самой сутью результатов, выводимых из наблюдений.*

Последующие авторы (Clarke 1880, с. 18 и 52; Dorsey & Eisenhart 1969, с. 53) согласны в том, что число измерений не должно превышать определенной границы. Они, равно как и Курно (1843, §§ 130 и 138) и даже Бейес (Stigler 1986, с. 94 – 95), обосновывали это утверждение наличием неизбежных [остаточных] систематических ошибок, и, добавим мы, некоторой зависимостью между отдельными наблюдениями.

6.11.2. Оценка действия случайных ошибок наблюдений. Наилучшей для этого является формула (8), дополненная верно установленными границами. Она, однако, несколько ошибочна, поскольку [*vv*], будучи случайной величиной, не может всегда совпадать со своим ожиданием E[*vv*]. Видимо по этой причине Гаусс, по крайней мере однажды (Г – Г 17.4.1844, W/Erg-3, с. 687), вывел единое общее значение m^2 по результатам измерений на нескольких станциях, указав, что при небольшом числе наблюдений оценка их точности ненадежна. В других письмах 29.1.1847 Герлингу (там же, с. 744) и 19.4.1821 Бесселю (W/Erg-1, с. 382) он повторил свое указание и современные авторы (Ku 1967, с. 309) согласны с этим.

6.11.3. Отбраковка уклоняющихся наблюдений. В каких случаях следует исключать наблюдение только потому, что оно уклоняется от других? Многие ученые упоминали или даже пытались изучить целесообразность отбраковки. Видимо имея в виду оценку точности наблюдений, Лаплас (1818, с. 534) разумно заключил, что

Чтобы успешно применять формулы вероятности к геодезическим наблюдениям, следует правдиво сообщать о всех тех обособленных результатах, которые были приняты, и не исключать никаких по той лишь причине, что они несколько [!] *удалены от остальных.*

И вот Гаусс (Г – О 3.5.1827, *W*-8, с. 152 – 153) указал:

Для успешного применения исчисления вероятностей к наблюдениям наивысшую важность всегда имеет обширное знание предмета. Если такого знания нет, то при не очень большом числе имеющихся наблюдений отбрасывание ввиду большого расхождения всегда сомнительно. Все отдельные составные части ошибок наблюдений, избежать которых вне нашей власти, имеют определенные границы, даже если мы и не в состоянии их точно указать. Существует очень много случаев, когда мы можем уверенно сказать, что происшедшая крупная ошибка лежит вне пределов возможности подобных ошибок и что по-видимому совершена чрезвычайная ошибка.

Естественно, ее следует отбросить. Но поскольку можно представить, что эта ошибка возникла ввиду несчастливого стечения составных частей, ее не следует исключать. Иногда могут, конечно, иметься и такие случаи, когда сомнительно, следует ли причислять ошибки к первому или ко второму классу; [тогда] *можно поступать как угодно, но принять себе за правило ничего не скрывать, чтобы другие могли по своему усмотрению считать также и по-другому.*

Числовые результаты будут, как ни считай, иметь равную пригодность, но, если слишком проворно отбрасывать наблюдения, возникнет опасность преувеличить их точность. Мне представляется, что это занятие более похоже на поступки в жизни, где разве лишь редко имеется математическая строгость и где приходится поступать по наилучшему продуманному усмотрению.

И в своей переписке, и в одном авторском сообщении (1826/1957, с. 149) Гаусс неоднократно упрекал геодезистов за умалчивание отброшенных измерений. И можно только добавить, что при наличии неизбежных систематических ошибок многочисленные статистические критерии отбраковки почти бесполезны.

6.11.4. Вычисления. При жизни Гаусса вычисления требовали больших усилий, и решение обширных систем нормальных уравнений было особо тягостным. Гауссу удалось облегчить последнюю задачу, введя метод последовательного исключения неизвестных, который стал стандартным и практически единственным, применявшимся до введения компьютеров. 14.5.1826 он (Г – О, *W*-9, с. 320), сообщил, что решил систему из 55 уравнений и много случаев других крупных вычислений он перечислил в своей переписке. Кроме того, немалый труд приходилось затрачивать, чтобы составлять нормальные уравнения.

Вместе с тем, он по крайней мере однажды (Г – Г 26.12.1823, там же, с. 278 – 281) решил систему нормальных уравнений итеративным методом, – тем его вариантом, который сейчас называется методом релаксации (Forsythe 1951; Шейнин 1963). Иногда он применял приближенные методы и полагал, например (Гаусс 1809b, § 185), что часто бывает достаточно вычислять коэффициенты нормальных уравнений приближенно. Этим замечанием воспользовались Bond (1857) и Newcomb (1897, с. 31).

Как вычислитель высочайшего класса (Maennchen 1918/1930, с. 3),

Гаусс часто подходил к своим открытиям при помощи точных и мучительных для ума вычислений [...]. *Мы находим* [в его работах] *длинные таблицы, чье составление само по себе целиком заняло бы рабочую жизнь нескольких вычислителей обычного толка.*

Менхен не рассматривал геодезических вычислений Гаусса возможно потому, что в то время математики еще не интересовались решением систем линейных алгебраических уравнений. И вот вывод Субботина (1956, с. 297) об определении орбит небесных тел, но пригодный и для нашей темы: Лагранж и Лаплас

Ограничились лишь математической стороной дела, тогда как Гаусс не только тщательно обработал свое решение с точки зрения вычислительной техники, но и учел все условия работы и все привычки астрономов-вычислителей.

6.12. Восприятие метода наименьших квадратов. Сразу скажем, что результаты Гаусса оставались плохо известными. Хуже того: многие ученые, занимавшиеся обработкой наблюдений, были плохо знакомы с практически необходимыми формулами этого метода и вообще с теорией ошибок. Так, Ivory, которого Гаусс (Г – О 15.3.1827, *W/Erg*-4.2, с. 475 – 476) назвал *проницательным математиком*, опубликовал ряд статей об уравнивании маятниковых наблюдений, последнюю из их в 1830 г., имея вначале лишь смутное представление о своей теме.

Еще менее известными были пояснения Гаусса, которыми он обосновывал свой подход и, в частности, его авторские сообщения (см. Библиографию) и появлялись совершенно ошибочные утверждения. Вот некоторые из них. Цингер (1862, с. 1): Лаплас будто бы предложил

Строгое [?] *и беспристрастное исследование. Из его анализа видно, что результаты способа наименьших квадратов получают более или менее значительную вероятность только при условии большого числа наблюдений, между тем как Гаусс старался на основании посторонних соображений придать этому способу безусловное значение* [ничего подобного]. *Если мы обратим внимание на то, что в законе больших чисел заключается вся сущность Теории случаев и что только при большом числе испытаний получают действительное фактическое значение все свойства случайных явлений, то нетрудно будет видеть справедливость лапласова вывода. При ограниченном же числе наблюдений мы вовсе не можем рассчитывать на взаимное уничтожение погрешностей и* […] *всякое сочетание наблюдений может* […] *повести столько же к увеличению погрешностей, сколько и к ослаблению их.*

На самом деле Гаусс (1809b, § 172; 1821/1957, с. 142; 1823b, § 6) указывал, что МНКв, хоть и целесообразен, но условен. В последнем случае он добавил: *Интересующий нас вопрос по самой своей природе содержит в себе нечто неопределённое.* Вообще же Цингер не был знаком с историей успешного применения ПрНКв и высказал распространенное убеждение неосведомленных математиков. И вот просто бессмысленное утверждение (П. А. Некрасов, письмо Маркову 1913 г. (Архив РАН, фонд 173, опись 1, 55, № 5:

Точки зрения Гаусса и Лапласа я различаю моментами относительно опыта. Первая точка зрения à posteriori, а вторая – à priori. Судить à posteriori удобнее, ибо данных больше, но эта точка зрения запаздывает, отстает, плетется за событием.

О Некрасове см. Шейнин (2003).

Чебышев (1880/1936, с. 277 и след.) колебался между обоими обоснованиями, так и не сказав, что второе предпочтительнее. Пуанкаре (1896/1999, § 127) назвал отказ Гаусса от первого обоснования ПрНКв *достаточно странным*, однако Марков (1899/1951), решительно защитил принцип наименьшей дисперсии, который стал поэтому хорошо известен русским геодезистам. Странным образом он (с. 246) тем не менее заявил, что МНКв удобен, но никакими другими достоинствами не обладает, – так для чего вообще надо было его обосновывать? В конце жизни Марков (1924, с. 323 прим.) указал, что остался при своем прежнем мнении о МНКв.

Даже при жизни Гаусса появилась *теория* элементарных ошибок (Hagen 1837). Каждая ошибка считалась составленной из многих элементарных, а потому была распределена нормально в соответствии с (нестрого доказанной) ЦПТ, и первое обоснование

МНКв было допустимым. Hagen (1837/1867, с. 34) принял весьма стеснительные условия и не сослался на Даниила Бернулли (1780), который применил идею элементарных ошибок при исследовании маятниковых наблюдений. Вообще же мы сомневаемся, что существует теория этих ошибок.

Иные учёные, хоть и предпочитали второе обоснование, не занимали принципиальной позиции. Даже Гельмерт (Гаусс 1887, Предисловие) просто сослался на мнение Гаусса, и так же он поступил в своём руководстве (1872).

Что *Теория комбинаций* оставалась малоизвестной видно и по утверждению Фишера (Fisher 1925/1990, с. 260):

В тех случаях, где он подходящ, этот метод [наименьших квадратов] *является специальным приложением метода наибольшего правдоподобия, из которого его можно вывести*.

Почти тогда же Campbell (1928, с. 156 – 167) отрицал МНКв, не зная о существовании мемуара 1823 г., а несколько десятилетий спустя Eisenhart (1964, с. 24) заметил, что существование второго обоснования МНКв

Видимо по существу не известно почти никому из его американских пользователей за исключением студентов, изучающих повышенный курс математической статистики.

Наконец, следует указать, что в своё время некоторые авторы (Encke 1832, с. 74; Merriman 1877, с. 165, 174; Harter 1977, с. 28) вообще не признавали ни первого, ни второго обоснования МНКв. Harter заявил, что оба обоснования исходят из правдоподобных, но не всегда применимых постулатов, приводящих к очевидным выводам. Однако, Гаусс (см. наш § 6.12) чётко указал, что обработка наблюдений включает в себя *нечто неопределённое*, а математический вывод и должен приводить к очевидным результатам.

О работе Маркова высказывались различные мнения. Во-первых, Neyman (1934, с. 595) ошибочно приписал ему второе гауссово обоснование МНКв, а David и он (1938) усугубили эту ошибку, доказав *обобщенную теорему Маркова*, фактически установленную Гауссом. Неудивительно, что в 1950-е годы появилась на свет мистическая теорема Гаусса – Маркова, дожившая, как ни странно, до наших дней (Chatterjee 2003, с. 248 – 249). Ошибку Неймана заметили Plackett (1949, с. 460) и Seal (1967/1970, с. 212), но он (1938/1952, с. 228) сам признал её.

Во-вторых, Линник и др. (1951, с. 637) заявили, что Марков по существу ввел понятия о несмещенных и эффективных оценках, но с таким же правом они могли бы здесь сослаться на Гаусса.

Добавим, что в 1910 г. сам Марков (Ондар 1977, с. 29) признал, что глава о МНКв в его руководстве, как ему *часто приходилось слышать*, изложена *недостаточно ясно*, Идельсон (1947, с. 101) же назвал ее *трудно написанной.*

Классическая формула (8) Гаусса для оценки точности наблюдений также описывалась неточно (Чебышев 1880/1936, с. 249 – 250) или даже вообще ошибочно отрицалась [v, § 14].

Два слова о других мерах точности. Обозначим наблюдения некоторой константы a через $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_1 \le x_2 ... \le x_n$). Ученые древности измеряли надежность наблюдений их размахом ($x_n - x_1$), и эта практика сохранилась даже в XIX в. (Ivory 1830, с. 415). Кроме размаха естествоиспытатели и математики основывались на одной из мер

$$(x_n - \overline{x})/\overline{x}, \text{ или } (\overline{x} - x_1)/\overline{x}, \text{ или } (x_n - \overline{x}), \text{ или } (\overline{x} - x_1),$$

а в 1883 г. Rayleigh (Mendoza 1991, с. 294) заявил, что *успех* наблюдений можно измерять *степенью соответствия чисел*.

Интервал [$x_n - x_1$] вероятно возрастает с *n,* так что основываться на размахе сомнительно, а кроме того крайние наблюдения возможно искажены крупными ошибками; и, наконец, как оценивать косвенные наблюдения? Даже в 1955 г. Корнфельд, чью статью представил М. А. Леонтович, утверждал, что достоинство измерений достаточно измерять вероятностью

$$P\,(x_1 \le a \le x_n) = 1 - (1/2)^{n-1},$$

где a – искомая величина. Этот метод, если его можно так назвать, обоснован не более, чем применение размаха. Впервые его предложил Берви (1899), на которого Корнфельд не сослался.

7. Триангуляция

7.1. Общие сведения. Уже в 1802 – 1807 гг. и для собственного удовольствия Гаусс проложил микротриангуляцию (Gerardy 1977). Он измерил углы секстантом и, видимо, применил ПрНКв для уравнивания координат засекаемых пунктов. *Видимо* потому, что автор уделил основное внимание элементарным вычислениям, так что определённый вывод затруднителен. Для Гаусса эта работа оказалась лишь предварительным упражнением.

Примерно через 15 лет Гаусс оказался ответственным за проведение, и непосредственным участником всех стадий триангуляции Ганноверского королевства, см. его переписку и официальные доклады (*W*-9), а также Galle (1924). Триангуляция оказалась несовершенной, в основном ввиду сложности её системы треугольников (Багратуни 1958, с. 11), которая в свою очередь была вызвана (Гаусс 1840/1958, с. 225) тем, что первоначальная скромная цель работ была значительно изменена.

Здесь и ниже в высказываниях Гаусса о ганноверской триангуляции первая дата относится к его отчётам (видимо, оставшимися лишь в его архиве).

Вот пример внимательности Гаусса (Г – Б 15.11.1822, *W*-9, с. 353):

Я неизменно следовал правилу идти в ногу со всеми сделанными измерениями (вплоть до последней строки), и лишь поэтому оказалось возможным прокладывать все просеки с наивысшей точностью, чтобы либо без необходимости ни один ствол не был срублен, либо как можно более срочно определять, что просеки невозможны.

Он, как представляется, не только экономил средства, но и заботился о природе.

Гаусс (Г – О 8.7.1824, 1958, с. 200 – 201) указал, что иногда допускал острые углы в треугольниках, если только противолежащие стороны не были связующими (не были необходимы для вычисления последующих сторон). Он избегал этого

не потому, что рассчитывал таким путём выиграть кое-что в <u>*точности*</u>*, а исходя из вполне известного* [понятного] *желания придать системе, насколько возможно, помимо внутренней содержательности, также изящество и законченность.*

Эти слова вероятно характеризуют Гаусса и его творчество в целом. Но проблема острых углов вряд ли может быть решена подобным образом; Гаусс сам (там же) усомнился в своём мнении. Позднейшие авторы либо повторяют его соображение о меньшей важности некоторых сторон триангуляции (Bomford 1952/1971, с. 7), либо указывают, что каждая её сторона может стать связующей в триангуляции низшего класса и потому должна быть определена с той же точностью (Красовский 1955, с. 72 – 73).

Вообще же Гаусс (Г – Г 5.10.1821, *W*-9, с. 380) и письмо Шперу (Spehr, 18.11.1828, *W*-12, с. 98) считал, что триангуляцию следует прокладывать с наивысшей достижимой точностью, а в отчёте о ганноверской триангуляции указал (из архива Гаусса/1958, с. 211):

При тригонометрической съёмке страны […] *целесообразно доводить точность определения* […] *главных пунктов до такого уровня, какой только* [возможен], *тем более, что это приводит к возможности получать во многих случаях достаточно точные определения второстепенных пунктов* [значительно проще]. *Когда подобная* […] *съёмка стоит изолированно, подробное опубликование её составных частей* […] *не представляет общего интереса.* […] *Но чем более тригонометрические измерения, выполненные в различных частях Европы, вступают между собой в связь* […], *тем больше отдельные составные части приобретают характер ценного общественного достояния*.

О международной значимости триангуляции Гаусс (Г – О 13.1.1821, *W*-9, с. 368 и Г – Bonnenberg 16.11.1823, там же, с. 365) упоминал и в своей переписке.

Уже издавна закреплению на местности пунктов триангуляции и их центров придаётся особое значение. Во времена Гаусса этой обязательной процедуры ещё не было, но он включал в сеть фундаментальные местные здания, в основном церкви и колокольни Так, он (1844/1958, с. 225) указал: *Во всём королевстве без определения осталось лишь небольшое число колоколен*.

Некоторое время так поступали и советские геодезисты, однако церкви начали уничтожать, и им было официально объявлено, что церкви и колокольни нельзя считать долговременными сооружениями. Это нам рассказал геодезист, человек предыдущего поколения.

7.2. Погрешности измерений. Изобретение *повторительных* теодолитов в конце XVIII в. позволило уравнять порядок действия главных погрешностей геодезических измерений, наведения и грубого отсчёта. Точность триангуляции значительно возросла, и, видимо, все были удовлетворены, – все, кроме Гаусса. В 1825 г. он предложил действенную процедуру исключения небольшой систематической ошибки *метода повторений* (Г – Г 8.4.1844, *W/Erg*-3, с. 677), заметил же он эту ошибку не позднее 1824 г. (Г – О 12.11.1824, *W/Erg*-4.2, с. 356) и позднее описал её (Г – О июль 1825, *W*-9, с. 490 – 491; Г – Ш 14.8.1825, там же, с. 493 – 494; Г – Б 29.10.1843, там же, с. 494 – 495 и 15.8.1844, там же, с. 498 – 499).

Гаусс изучал и другие существенные погрешности, и случайные, и систематические. О систематическом воздействии горизонтальной рефракции он сообщил в письмах Г – О июль 1825 и 14.5. 1826, *W*-9, с. 491 – 492 и 320, и Г – Ш 14.8.1825, там же, с. 493.

Об ошибках градуировки лимбов Гаусс (Г – Ш) указывал 10.7.1826 и между 14 июля и 8 сентября того же года, *W/Erg*-5.1, с. 59 и 65 второй пагинации. В первом из этих писем Гаусс описал свои мысли об исключении указанных ошибок при помощи целесообразной программы наблюдений, см. § 6.11.1.

Уже 15.6.1818 Бессель (его письмо Гауссу, *W/Erg*-1, с. 272) посчитал Гаусса мастером экспериментальной науки:

Мы благодарны Вам за основную роль в сегодняшнем совершенствовании астрономии, и не только ввиду Ваших наименьших квадратов, но и за пробуждение смысла элегантности, который, видимо, исчез с лица Земли после эпохи Брадлея и который появился вновь 18 лет назад. Мы лишь теперь подошли к представлению о необходимости выслеживания малых ошибок или уклонений с той же тщательностью, с которой ранее охотились за крупными.

Аналогичную мысль высказал Субботин (1956, с. 246):

Вся его деятельность, столь плодотворная не только в области астрономии и геодезии, но и в области физики и *геофизики (заниматься которыми никакие внешние обстоятельства его не принуждали), свидетельствует о том, что, подобно Ньютону, Гаусс был не только математиком, но и в неменьшей степени естествоиспытателем, чувствовавшим потребность в непосредственном соприкосновении с природой, с физической реальностью.*

Крылов (1934/1951, с. 287) заметил, что Гаусс внёс беспримерную точность и в магнитные наблюдения, однако, оценивая Вебера наравне с Гауссом, Крылов возможно ошибался.

Субботин (с. 268) продолжал: Гаусс никогда не думал о сборе обширных данных, его интересовало исследование инструментов. Он и Бессель создали новую традицию в астрономии. Субботин мог бы добавить, что Гаусс продвинул вычислительную работу в астрономии и геодезии. Теория ошибок Лапласа забыта также и ввиду тщательной работы Гаусса, в частности его крайне удачных обозначений и т. д. Вот мнение Бесселя (письмо Гауссу 12.12.1826, *W/Erg*-1, с. 468): *Из Ваших нынешних работ меня больше всего, пожалуй, интересует статья о приложении метода наименьших квадратов к геодезическим измерениям.*

Статью он не назвал.

Особого внимания заслуживает метод Гаусса определения разности между примерно равными весами двух тел (A и B), поскольку он существенно усовершенствовал метод Борда (Helmert 1872, с. 47 – 49). Мало того, Pukelsheim (1993, с. 427) указал на близость метода Гаусса современным понятиям взвешивания, сам же Гаусс описал его только в письмах Г – Ш 1836 и 1839 гг. (*W/Erg*-5.2, с. 99 – 101, 268, 272 – 275 и 330 – 333 первой пагинации).

Борда взвешивал A и B по отдельности и уравнивал их веса добавлением к ним весов a_i или b_i, добиваясь одного и того же отсчета T на весах и учитывая при этом постоянную ошибку измерения c и другую возможную ошибку w, пропорциональную времени. Вот его уравнения:

$$T = A + a_1 + c + \varepsilon_1,\ T = B + b_2 + c + 2w + \varepsilon_3,$$
$$T = B + b_1 + c + w + \varepsilon_2,\ T = A + a_2 + c + 3w + \varepsilon_4,$$

в которых ε_i – случайные ошибки взвешивания. Исключая c и w, Борда получил

$$A - B = (1/2)\{[(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)] + [(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)]\}.$$

Гаусс, однако, взвешивал A и B одновременно:

$$B = A + a_1 + c + \varepsilon_1,\ A = B + b_2 + c + 2w + \varepsilon_3,$$
$$A = B + b_1 + c + w + \varepsilon_2,\ B = A + a_2 + c + 3w + \varepsilon_4.$$

Таким образом,

$$A - B = (1/4)\{[(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)] + [(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)]\}$$

и точность результата оказывалась вдвое выше, поскольку исключалось дополнительное неизвестное *T*.

Бессель (письмо Гауссу в конце 1822 г., *W/Erg*-1, с. 415) порицал Гаусса за, казалось бы, излишнее рвение к полевой геодезической работе:

Чтобы узнать всё, что могло бы ускользнуть, хватило бы одного или двух треугольников, остальные же должен NN измерить, а не Гаусс.

Гаусс (15.11.1822, 1958, с. 191) ответил:

Эти исследования связаны с богатой, почти неисчерпаемо богатой областью, и, как в этом, так и во многих других случаях, я часто с грустью чувствую, как мешают мои внешние обстоятельства важным теоретическим работам. Чтобы подобные работы были успешны, надо иметь возможность им целиком отдаться и не отрываться ежечасно на разнообразные дела, как чтение лекций, различные мелкие детали, связанные с наблюдениями и их обработкой, …

И, кроме того (там же, с. 192 – 193), *ежедневная обработка* триангуляции *всегда доставляла* Гауссу *развлечение*. *Эту работу я так полюбил, что обнаружение, отыскание и вычисление положения новой колокольни доставляло мне столько же удовольствия, сколько и наблюдения нового светила*.

Но всё же впоследствии Гаусс (Г – Б 14.3.1824, *W/Erg*-1, с. 428) признал, что *Все измерения в мире не уравновешивают теорему, которая поистине приближает науку к вечным истинам*. Однако, времени для важных исследований всё равно нет, а он должен учитывать жизненные потребности многочисленной семьи.

Со временём Гаусс (1958, с. 227) всё же должен был постепенно отойти от полевой работы:

Что же касается измерений первого класса, которые я до сих пор брал только на себя, то я надеялся, что позднее можно будет постепенно обучить подобным точным работам и других офицеров.

Это высказывание из архива Гаусса не было включено в его отчёты.

8. Теория вероятностей и статистика населения

8.1. Теория вероятностей. Гаусс читал лекции по теории вероятностей. По свидетельству Dedekind (1901/1931, с. 305) они включали

Особо ясное и поясненное оригинальными примерами описание развития основных понятий и главных теорем исчисления вероятностей.

Дедекинд, как представляется, также указал, что курс Гаусса (как позднее Чебышёва!) охватывал изучение теории определённых интегралов.

Гаусс безусловно был знаком с современной ему теорией вероятностей, хоть он был мало заинтересован в изучении литературы, см. наш § 3.2. Далее, его переписка и посмертные бумаги содержали весьма интересные идеи, относящиеся к ней, см. ниже. Наконец, Гаусс обращал внимание на принципы приложения стохастических рассуждений в естествознании и других науках. Так, в письме Бенценбергу (Benzenberg) он (Biermann 1965) высказался против вероятностного доказательства суточного вращения Земли. Даже исключительно высокая вероятность вращения, как он утверждал, не может заменить его аналитического доказательства.

В том же письме он усомнился в принципе обращённой вероятности (хотя в 1809 г., см. наш § 4.3, применил его для математического рассуждения): *Заключая о вероятности причин по вероятности появления события, находишься на скользкой почве*.

В письме Фрису (Fries) 12.2.1841 Вебер (*W*-12, с. 201 – 204) описал некоторые мысли о вероятности, которые Гаусс сообщил ему и указал более подробно, чем сам Гаусс в письме Бенценбергу, см. выше, что стохастические рассуждения допустимы только когда ничего не известно о сути изучаемого явления:

Он сразу же признал, что Вы правы. В приложении исчисления вероятностей можно серьёзно ошибиться, если основываться только на числах, следующих из повторных наблюдений, а не на каком-либо ином знании, исходящем из природы вещи и её связей [с другими вещами], *хоть это часто и очень трудно.*

[…] *В этом отношении французские математики, видимо, не всегда были в достаточной мере осмотрительны. В своих лекциях Гаусс* […] *всегда утверждал, что исчисление вероятностей имеет целью предоставлять определённые сведения только, если кроме результатов наблюдений о предмете ничего не известно или не желают ничего принимать во внимание.* […] *Высокая значимость исчисления вероятностей состоит* […] *в том, что как раз в случаях, когда никаких других знаний нет*, […] *оно предоставляет путеводную нить, к примеру, при учреждении кассы пожизненных рент. Таким же образом исчисление вероятностей, хоть оно ничему и не учит в отдельных случаях, обеспечивает путеводную нить законодателю при определении числа свидетелей и судей.*

Вот пояснения. Подготавливая свою книгу (1842), Фрис обратился к Гауссу с просьбой сообщить своё мнение об общих принципах теории вероятностей, но вместо Гаусса ему ответил Вебер. Можно ли сравнить поэтому Вебера и Гаусса с Бентли и Ньютоном? По поводу французских математиков, которых упомянул Вебер, он привёл в качестве примера только исследование Лапласа (1776), который совершил довольно элементарную ошибку в своём исследовании кометных орбит. Гаусс же впервые заметил эту ошибку в своей переписке (Г – О 25.7.1813, *W/Erg*-4.1, с. 527). Об этом см. Курно (1843, гл. 12).

Вебер также заметил, что повторение события обеспечивает лучшее знание соответствующих законов.

8.1.1. Формула обращения для преобразования Фурье. В посмертных бумагах Гаусса (*W*-8, с. 88) содержится формула обращения для преобразования Фурье для плотности распределения вероятностей. Написана она была, возможно, после работ Фурье, Коши и Пуассона, но, по мнению редактора, до 1814 г. Заглавие, под которым была выписана формула, *Прекрасная теорема исчисления вероятностей*, *действительно побуждает мысль* (Seal 1949/1977, с. 79).

8.1.2. Первая задача метрической теории чисел. В письме Лапласу 30.1.1812 (*W*-10.1, с. 371 – 374) Гаусс сформулировал первую задачу метрической теории чисел. Некоторое число M, $0 < M < 1$, разложено в непрерывную дробь

$$\frac{1}{a_1 + (1/a_2 + ...)}.$$

Требуется отыскать вероятность $P(n, x)$ того, что *хвост* дроби

$$\frac{1}{a_{n+1} + (1/a_{n+2} + ...)}$$

окажется меньше, чем x.

Если $P(0, x) = x$, т. е. если все допустимые значения M равновероятны, то, по Гауссу,

$$\lim P(n,x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}, n \to \infty. \qquad (11)$$

Он, однако, не смог вывести асимптотическую формулу для этой вероятности. Гаусс упоминал эту задачу (но, видимо, не асимптотическую формулу) в 1789 г. и снова в 1800 г. Во втором случае он (1796 – 1814/1976, с. 77) написал: *Решил задачу исчисления вероятностей, которую вначале тщетно исследовал*. Так (но на языке оригинала, латинском) озаглавлена эта задача в его *Трудах* (*W*-10.1, с. 552 – 554).

Формулу (11) доказал Штекель (там же, с. 554 – 556), затем Кузьмин (1928) и он же вывел асимптотическую формулу.

8.1.3. Элементы теории случайных размещений. В посмертных бумагах Гаусса есть краткая записка (*W*-8, с. 134 – 135), которую теперь можно отнести к теории случайных размещений. Он, возможно, заинтересовался этой темой при изучении распределения карт (например, тузов), различающихся по масти или нет, между игроками, см. наш § 8.2.1. Указанная теория появилась в наше время, однако уже Якоб Бернулли в 3-й части своего *Искусства предположений* рассматривал подобные задачи.

Допустив, что распределения *чисто случайны* и обозначив количество мест через $p = 1/x$ и число объектов через m, Гаусс подсчитал вероятности (m, n) того, что эти объекты займут $m - n$ мест, оставив свободными $[p - (m - n)]$ мест. Результаты его вычислений таковы:

$$(2, 0) = 1 - x,\ (2, 1) = x,\ (3, 0) = (1 - x)(1 - 2x),$$
$$(3, 1) = 3x(1 - x),\ (3, 2) = x^2,\ (4, 0) = (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x),$$
$$(4, 1) = 6x(1 - x)(1 - 2x),\ (4, 2) = 7x^2(1 - x),\ (4, 3) = x^3, \ldots$$

Затем, обнаружив правило для подсчёта коэффициентов этих произведений, Гаусс выписал уравнение в конечных разностях относительно ожидаемого значения n,

$$\mathrm{E}n = (m, 1) + 2(m, 2) + 3(m, 3) + \ldots + n(m, n)$$

и, решив его, получил

$$\mathrm{E}n = \frac{(1-x)^m - (1-mx)}{x}.$$

8.1.4. Ожидаемые значения функций случайных переменных. В другой краткой записке (*W*-8, с. 133) Гаусс обсуждал испытания Бернулли, как их назвали позднее. Пусть некоторое событие происходит при каждом испытании с вероятностью p. Тогда в n независимых испытаниях оно появится μ раз $(0 \le \mu \le n)$ и $\mathrm{E}\mu = pn$. Указав эти общеизвестные факты, Гаусс также заметил, что

$$\mathrm{E}[\mu(\mu - 1)] = n(n - 1)p^2, \qquad (12)$$
$$\mathrm{E}[\mu(\mu - 1)(\mu - 2)] = n(n - 1)(n - 2)p^3, \qquad (13)$$
$$\mathrm{E}[(\mu - pn)^2] = pqn,\ q = 1 - p. \qquad (14)$$

Формулу (12) можно вывести, исходя из выражения для дисперсии

$$\mathrm{var}\ \mu = pqn = \mathrm{E}\mu^2 - (\mathrm{E}\mu)^2 = \mathrm{E}\mu^2 - p^2n^2,\ \mathrm{E}\mu^2 = pqn + p^2n^2, \ldots$$

Также нетрудно вывести формулу (13):

$$P[\mu = k) \equiv p_k = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,...,n,$$

$$E[\mu(\mu-1)(\mu-2)] = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)p^k = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)C_n^k p^k q^{n-k} = \qquad (15)$$

$$n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{k=3}^{n} C_{n-3}^{k-3} p^{k-3} q^{n-k} =$$

$$n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{\alpha=0}^{\beta} C_{\beta}^{\alpha} p^{\alpha} q^{\beta-\alpha} = n(n-1)(n-2)p^3.$$

Уравнение (15) представляется очевидным, но его можно вывести, используя производящую функцию

$$P(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n$$

величины

$$E[\mu(\mu-1)(\mu-2) = P'''(1).$$

Разумеется, аналогично можно получить формулу (12). И, наконец, формула (14) не нуждается в обосновании, поскольку является известным выражением дисперсии varμ.

Таким образом, Гаусс вывел средние значения некоторых функций случайной величины, распределённой по биномиальному закону. Рассматривал ли он другие распределения? Это неизвестно.

8.2. Статистика населения

8.2.1. Сбор статистических данных. Гаусс неизменно чувствовал наклонность собирать статистические данные, см. его письма Г – О 26.10.1802, (*W/Erg*-4.1, с. 106) и Гумбольдту 14.4.1846 (Гаусс 1977, с. 92 – 97). Во втором случае он заметил, что в статистике смертности, как и вообще в науке, существенный продвиг может быть достигнут, если не будут ограничиваться требованиями непосредственных приложений. И поэтому он в этой статистике в основном интересуется смертностью младенцев (причины смерти которых, впрочем, более понятны) и очень старых людей.

Он также сообщил о своём (чисто теоретическом) интересе в данных о смертях, вызванных ударами молний, и количеством молний на единицу поверхности Земли за год. Эту последнюю задачу Гаусс отнёс к метеорологии, – к метеорологической статистике, сказали бы мы сейчас.

Sartorius Von Waltershausen (1856/1965, с 89) сообщил, что Гаусс собирал данные о продолжительности жизни в днях многих известных лиц, включая своих покойных друзей, и о датах гроз, а его изучение экономической и финансовой статистики позволило ему скопить немалые средства. Автор (с. 90) добавил, что из Гаусса вышел бы прекрасный министр финансов, но что этого, к счастью, не произошло. Наконец, Гаусс (Dunnington 1955, с. 227) вёл учёт распределения карт в своих частых играх с друзьями.

Изучая различные стороны творчества Гаусса, комментаторы редко вспоминают его учителей, потому что его работа была оригинальна и глубока. Но в связи со сбором статистических данных следует упомянуть профессора Циммермана (E. A. W. Zimmermann, 1743 – 1815) из Брунсвикского (Брауншвейгского) Collegium Carolinum. Он читал лекции по математике, физике, естественной истории и физической географии, а его научная деятельность включала статистику. В 1849 г., вспоминая свои студенческие годы, Гаусс в первую очередь с особой теплотой сообщил о нём.

8.2.2. Законы смертности. Гаусс ввёл два закона смертности младенцев. Первый из них (Г – Ш 12.7.1847, *W*-12, с. 71 – 72) описывал количество (x) смертей новорожденных, доживших до n месяцев, и основанное на данных Quetelet (1835/1838, с. 170) по Бельгии:

$$x = 100\ 000 - A\sqrt[3]{n},\ \ \lg A = 3.98273.$$

Здесь 100 000 – исходное число младенцев. Гаусс заметил, что его формула сходна с законом Мозера (Moser 1839, с. 281), который, в отличие от Гаусса, ввёл корень четвёртой степени. Мы сравнили данные Кетле с числами, соответствующими этой формуле. Для смертей в возрасте 2 месяца разность оказалась равной 44, для возраста 12 месяцев – 470, что ещё было возможно объяснить неизбежными ошибками исходных данных, а для 18 месяцев разность достигла 1448. Кетле сообщил данные и по отдельности для городов и сельских местностей, а также для мальчиков и девочек, Гаусс же никаких пояснений не привёл и возможно применил обобщённые данные. Он также полагал, что при других значениях A его формула могла бы быть применена к другим странам.

Второй закон смертности у Гаусса (его архив, *W*-8, с. 155 – 156) относился к участникам тонтин, т. е. коллективов лиц, совместно застрахованных на определённых условиях. Обозначив число лиц, доживших до возрастов n лет, n = 3, 7(5)97, через x, Гаусс привёл соответствующую таблицу значений $\lg x$, представив эту величину в виде

$$\lg x = A_n + Bb^n - Cc^n,$$

$$\lg B = \bar{4}.66231,\ \ \lg C = \bar{1}.67925,\ \ \lg b = 0.039097,\ \ \lg c = -\ 0.0042225\,.$$

Он вычислил A_n, а также без объяснений и другие параметры своей формулы, но как? Источника своих данных Гаусс не сообщил. Сравнив значения $\lg x$, соответствующие этим данным, и вычисленные по формуле Гаусса, мы обнаружили разности, доходящие лишь до двух единиц последнего знака, но вот среднее значение A, которое он также вычислил, было ошибочно; он, видимо, упустил частное значение для возраста 82 года.

Закон Гаусса является частным случаем формулы Lazarus 1867 г., см. Loewy (1906). Об эмпирических законах смертности Gompertz, Makeham и Lazarus, имеющих, видимо, лишь исторический интерес, см. Чубер (1903/1968, с. 276 – 278).

Гаусс не указал источник своих данных; мы полагаем, что он использовал таблицу, которую Deparcieux (1746, табл. 13) составил по французским тонтинам 1689 и 1696 гг. для возрастов 3, 7, 12, …, 97 лет, которые, видимо, следует считать равными (n – 1/2), и приняв исходное число лиц равным a = 1000. Гаусс несомненно несколько видоизменил таблицу Deparcieux. Так, в отличие от последнего он принял, что до возраста 97 лет всё-таки доживает один человек. Сравнив данные Deparcieux с вычисленными по формуле Гаусса, мы обнаружили, что наибольшие разности доходили лишь до восьми человек в одном случае и до семи в нескольких других случаях.

8.2.3. Вдовья касса. Среди бумаг Гаусса находится его отчёт 1845 – 1851 гг. (*W*-4, с. 119 – 169) о работе вдовьей кассы Гёттингенского университета, которой он ведал. Использовав данные из различных источников, Гаусс смог решить ряд важных практических вопросов, а некоторые из его предположений, например, о вероятностях женитьбы, *иногда могут быть применены и сегодня* (Sofonea 1955, с. 65*). Наконец, Гаусс (там же, с. 170 – 183) составил таблицу стоимости пожизненных рент.

9. Гаусс, Бессель и Кетле

9.1. Гаусс и Бессель. Достижения Бесселя в астрономии и геодезии включают определение астрономических констант, первое определение параллакса звезды, открытие личного уравнения, разработку одного метода уравнивания триангуляции (впрочем, слишком громоздкого) и вывод параметров земного эллипсоида, см. Шейнин (2000). В этой статье мы обратили внимание на его подчас недопустимые небрежности.

Остановимся прежде всего на уравнивании триангуляции. Бессель, или точнее его студент Rosenberger (1827), на которого Бессель (1838b/1961, с. 147) сослался, описал уравнивание *косвенных наблюдений с условиями*, т. е. уравнений

$$a_ix + b_iy + c_iz + l_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

k неизвестных в которых удовлетворяют условиям

$$\alpha_jx + \beta_jy + \gamma_jz + \delta_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s,\ n - s > k.$$

Уравнивание указанного вида может быть выполнено при помощи множителей Лагранжа и потому не представляет ничего существенно нового, притом Гаусс (1823b, часть 2-я) уже описал этот материал, а в авторском сообщении о своём *Дополнении* (1828) он (1826/1957, с. 147) заметил: *Этот случай отличается* [от уравнивания без дополнительных условий] *не принципиально, а скорее формально*.

Зато Бессель оказался при этом первым, кто уравнял наблюдения, разбив их на группы. Уравнивание у Бесселя (1838b, гл. 3) было громоздким. Во-первых, он придал измеренным направлениям формально введенные веса. Во-вторых, он уравнял заодно станции и сеть в целом. Гаусс поступал совсем иначе, и метод Бесселя не прижился.

В своем основном сочинении по теории ошибок Бессель (1838a) попытался доказать ЦПТ, чтобы тем самым обосновать нормальное распределение ошибок наблюдений. В его время это было невозможно, но мемуар Бесселя содержал иные интересные идеи. В § 10 он перечислил 13 независимых источников ошибок, возникающих при измерении зенитных расстояний звезд. В § 2 он подметил существование составляющей ошибки измерения с антимодальной плотностью. Это еще не опровергало возможности приложения нормального распределения, и вообще вряд ли многие читатели обратили внимание на подобный особый случай, поскольку Бессель посвятил свой мемуар обоснованию ЦПТ.

В §§ 1 – 2 Бессель привел два примера вычисления плотности распределения функции случайной величины, но допустил несколько ошибок. В том же мемуаре Бессель доказывал, что распределение вероятностей ошибок астрономических наблюдений нормально, но его соображения были явно ошибочны.

Далее, Бессель (§ 7) доказал, что нормальный закон устойчив, т.е. что сумма двух (а потому и любого конечного числа) нормально распределенных случайных величин снова нормальна. Это было известно Гауссу (1809b, рукописное примечание к § 183) и Лапласу (прим. 1819), но они не выписали соответствующих формул.

Бессель установил существование *личного уравнения* астронома. Однако, в одном случае его исследование было ошибочно. И приходится добавить, что Бесселю были присущи неверные суждения, и, кроме того, мы (2000) обнаружили 33 ошибки в проделанных им арифметических и простейших алгебраических действиях. Не будучи существенными, они подрывают веру в надежность его более сложных вычислений.

Biermann (1966) односторонне описал взаимоотношения Гаусса и Бесселя, мы же постараемся быть объективными. В 1919 г. Бессель назвал Гаусса мастером экспериментальной науки (§ 7.2); в 1826 г. он интересовался работами Гаусса (там же); в 1837 – 1839 гг. Бессель (тщетно) пытался убедить Гаусса бросить полевые геодезические работы (§ 3.1).

В 1839 г. Гаусс сообщил Бесселю о причине отказа от своего первого обоснования МНКв (§ 6.1); до 1805 г. он ознакомил Бесселя, в числе многих других, с ПрНКв (§ 2.2), а в письме Шумахеру 27.12.1846 (*W/Erg*-5.3, с. 270 первой пагинации) весьма положительно отозвался о вычислениях, проведенных Бесселем:

Не следует отрицать, что во многих столь исключительных мемуарах проявляется дух Бесселя и его умелое обращение с *исчислением, его неустрашимая настойчивость в тяжёлых вычислениях.*

Но в 1817 г. Ольберс (Erman 1852, т. 2, с. 69) сообщил Бесселю, что сожалеет о плохих отношениях Гаусса и Бесселя. В 1825 г. во время встречи они рассорились по какому-то научному поводу (Bruhns 1869, с. 108 прим.). Можно предположить, что Гаусс был возмущён халтурными вывертами Бесселя (Шейнин 2000).

Уже после смерти Бесселя Gerling (1861) описал его попытку вопреки результатам Гаусса установить свой приоритет в уравнивании триангуляции (см. выше), а также и свою полемическую переписку с Бесселем 1843 г., в которую тот вовлек его. Предметом спора о книге Герлинга того же года было то же уравнивание триангуляции (по этому поводу Бессель вообще не упомянул Гаусса), а также отсутствие у Герлинга описания его, Бесселя, заслуг в теории вероятностей, которых Герлинг и не был обязан описывать, да их и вообще не существовало.

9.2. Гаусс и Кетле. В середине XIX в. статистика развивалась под сильным влиянием Кетле, чьи произведения содержат большое число замечаний о роли различных причин на социальные явления, формулировки важных проблем и социальных статистических гипотез, выявление важных фактов общественной жизни (Шейнин 1986). К примеру, Кетле интересовался установлением изменений в промышленности, стоимости земли и жизни населения в результате постройки железных дорог и изменениями смертности и рождаемости в связи с колебаниями стоимости хлеба. О недочётах и ошибках Кетле мы не будем упоминать, но приведём разумное мнение о нём (Knapp 1872, с. 124): *Дух, богатый идеями, но не методический, а потому не философский.*

Основное препятствие развитию статистики Кетле (1846, с. 362 – 364) видел в отсутствии единой системы статистических данных; соответственно, он считал важнейшей задачей сбор таких данных во всемирном масштабе. Впрочем, важно было и совершенствование математического аппарата статистики.

Особо значимой была деятельность статистиков по введению, в 1875 г., метрической системы мер в 17 странах. Здесь можно вспомнить мысли Гаусса (§ 7.1) о единой европейской системе триангуляции и указать на его и Вебера усилия по введению абсолютной системы единиц. Уместно и мнение Гаусса (Г – О 8.12.1817, *W/Erg*-4.1, с. 674) о метрической системе мер:

Весьма интересны перспективы возможно общего введения французской системы мер, и эту систему я считаю очень удобной. Я всегда охотно пользуюсь ей и полагаю, что всё или основное, сказанное против её общего введения, было основано на предубеждении. Думаю, что при введении естественной системы мер большие неудобства появятся лишь при самых тонких измерениях, так что придётся всегда дополнительно иметь какой-то иной эталон. […] *Каждое градусное измерение* *имеет прямой или косвенной целью определить метр. Если выразить его в метрах, то метр будет означать не 1: 10 000 000 часть четверти меридиана, а длину этого куска железа*. […] *Это выразится вечными преобразованиями* [из одной системы в другую].

Бессель (Hamel 1984, с. 51), следует сказать, был настроен *весьма скептически* по отношению к метрической системе мер.

Гаусс, при всём своём интересе к статистике, не занимался её математической структурой, даже в своей переписке он не касался этой темы, что тем более разочаровывает в связи со свидетельством Кетле (1867, с. 655):

Представляется, что в то же самое время [1847] *Гаусс* (?*) и Шумахер с живым интересом занимались приложением теории вероятностей к законам социальной жизни. В письме, которое написал мне Шумахер в июле 1846 г., говорилось о его желании перевести мои Письма* [1846].

Интересуясь метеорологической статистикой (§ 8.2.1), Гаусс, видимо, не комментировал первый том сочинения Кетле (1849) о климате Бельгии. (Второй том этого сочинения вышел в свет после смерти Гаусса.) Указанный том был наполнен статистическими данными и содержал некоторые выводы, в основном полученные при помощи простейших стохастических правил; установив многие факты общественной жизни вообще просто по собранным данным, он уже поэтому мог особенно не беспокоиться о математическом обосновании статистики. О Кетле см. также [i, § 5].

Библиография

Сокращения: ИМИ = *Историко-математич. исследования*
AHES = *Arch. Hist. Ex. Sci.*
Hist. Scient. = *Historia Scientiarum* (Tokyo)

C. F. Gauss, К. Ф. Гаусс

1796 – 1814, *Gauss' mathematisches Tagebuch.* Leipzig, 1976. Ostwald Klassiker No. 256.

1809a, нем., Теория движения, авторское сообщение. В книге автора (1957, с. 150).

1809b, латин., Теория движения и т. д. Там же, с. 89 – 109.

1811, латин., Исследование об эллиптических элементах Паллады и т. д. Там же, с. 111 – 120.

1815, Рецензия на мемуар Лапласа (1813). *W*-6, pp. 581 – 586.

1816, нем., Определение точности наблюдений. В книге автора (1957, с. 121 – 128).

1821, нем., Теория комбинаций наблюдений и т. д., часть 1-я, авторское сообщение. Там же, с. 141 – 144.

1823a, нем., Теория комбинаций наблюдений и т. д., часть 2-я, авторское сообщение. Там же, с. 144 – 147.

1823b, латин., Теория комбинаций наблюдений и т. д., части 1 и 2. Там же, с. 17 – 57.

1826, нем., Дополнение к теории комбинаций наблюдений и т. д., авторское сообщение. Там же, с. 147 – 150.

1828, латин., Дополнение к Теории комбинаций наблюдений и т. д. Там же, с. 59 – 88.
1863 – 1930, *Werke*, Bde 1 – 12. Göttingen. Reprint: Hildesheim, 1973 – 1981.
1887, *Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate*. Hrsg. A. Borsch, P. Simon. Vaduz, 1998.
1957 – 1958, *Избранные геодезические сочинения*, тт. 1 – 2. Редактор Г. В. Багратуни. М.
1975 – 1987, *Werke, Ergänzungsreihe*, Bde 1 – 5. Hildesheim. Переписка Гаусса с Бесселем (т. 1), Больяи (т. 2), Герлингом (т. 3), Ольберсом (тт. 4.1 и 4.2), Шумахером (тт. 5.1, 5.2, 5.3).
1977, *Briefwechsel zwischen von Humboldt und Gauss*. Berlin.

Другие авторы

Багратуни Г. В. (1958), Введение. В книге Гаусс (1958, с. 3 – 18).
Берви Н. В. (1899), Определение вероятнейшего значения измеряемого объекта помимо постулата Гаусса. *Имп. Моск. общ. любителей естествознания, антропологии и этнографии*, отд. физич. наук, т. 10, вып. 1, с. 41 – 45.
Идельсон Н. И. (1947), *Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений*. М.
Колмогоров А. Н. (1946), К обоснованию метода наименьших квадратов. *Успехи математич. наук*, т. 1, № 1, с. 57 – 71.
Колмогоров А. Н. и др. (1947), Одна формула из теории метода наименьших квадратов. *Изв. АН СССР*, сер. математич., т. 11, с. 561 – 566.
Корнфельд М. (1955), К теории ошибок. *Докл. АН СССР*, т. 103, № 2, с. 213 – 214.
Красовский Ф. Н. (1955), *Избр. соч.*, т. 3. М.
Крылов А. Н. (1934), К. Ф. Гаусс. *Собрание трудов*, т. 1/2. М. – Л., 1951, с. 279 – 297.
Кузьмин Р. (1928), Об одной задаче Гаусса. *Докл. АН СССР*, А18 – 19, с. 375 – 380.
Линник Ю. В. и др. (1951), Очерк работ А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей. В книге Марков (1951, с. 614 – 640).
Майстров Л. Е. (1964), Элементы теории вероятностей у Галилея. *Вопр. истории естествознания и техн.*, вып. 16, с. 94 – 98.
Мальцев А. И. (1947), Замечание к работе Колмогоров и др. (1947). *Изв. АН СССР*, сер. математич., т. 11, с. 567 – 578.
Марков А. А. (1899), Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. В книге автора (1951, с. 231 – 251).
--- (1924), *Исчисление вероятностей*, 4-е изд. М.
--- (1951), *Избранные труды.* Без места.
Назимов П. С. (1889), По поводу одного мемуара Гаусса. *Варш. унив. изв.*, № 4, отдельная пагинация.
Ондар Х. О., редактор (1977), *О теории вероятностей и математической статистике. Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова.* М.
Субботин М. Ф. (1956), Астрономические и геодезические работы Гаусса. В сб. *К. Ф. Гаусс*. М., с. 243 – 310.
Усов Н. А. (1867), Замечание по поводу теоремы П. Л. Чебышева. *Математич. Сб.*, т. 2, с. 93 – 95.
Цингер В. Я. (1862), *Способ наименьших квадратов.* Диссертация. М.
Чебышев П. Л. (лекции 1879 – 1880), *Теория вероятностей.* М. – Л., 1936.
Шейнин О. Б., Sheynin O. (1963), Adjustment of a trilateration figure by frame structure analogue. *Empire Surv. Rev.*, vol. 17, No. 127, pp. 55 – 56.
--- (1965), О работах Р. Эдрейна в теории ошибок. ИМИ, вып. 16, с. 325 – 336.
--- (1973a), Finite random sums. AHES, vol. 9, pp. 275 – 305.
--- (1973b), Boscovich's work on probability. AHES, pp. 306 – 324.
--- (1973c), Mathematical treatment of observations. AHES, vol. 11, pp. 97 – 126.
--- (1993), Treatment of observations in early astronomy. AHES, vol. 46, pp. 39 – 54.
--- (2000), Bessel: some remarks on his work. *Hist. Scient.*, vol. 10, pp. 77 – 83.

--- (2003), Nekrasov's work on the central limit theorem. The background. AHES, vol. 57, pp. 337 – 353.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Английский вариант: Берлин, 2009.

--- (2006, англ.), Математическая обработка наблюдений у Маркова. ИМИ, вып. 13 (48), с. 110 – 128.

--- (2007), Euler's work in probability and statistics. In *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*. Heber City, Uta, pp. 281 – 316.

Ярошенко С. П., Yarochenko S. (1893), К теории способа наименьших квадратов. *Зап. Новоросс. унив.*, т. 58, с. 193 – 208 второй пагинации. Sur la méthode des moindres carrés. *Bull. sciences math.*, sér. 2, t. 17, pp. 113 – 125.

Adrain R. (1809), Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations. In Stigler (1980, vol. 1, separate paging).

--- (1818a), Investigation of the figure of the Earth and of the gravity in different latitudes. Ibidem.

--- (1818b), Research concerning the mean diameter of the Earth. Ibidem.

Anonymous; von Zach F. X.?, (1805), Versuch einer auf Erfahrung gegründeten Bestimmung terrestrischer Refractionen. *Monatl. Corr.*, Bd. 11, pp. 389 – 415, 485 – 504.

Bernoulli D. (1778, in Latin), The most probable choice between several discrepant observations etc. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 1 – 13. Reprint: Pearson & Kendall (1970, pp. 157 – 167).

--- (1780), Specimen philosophicum de compensationibus horologicis. *Werke*, Bd. 2. Basel, 1982, pp. 376 – 390.

Bertrand J. (1888a), Sur les conséquences de l'égalité acceptée entre la valeur vraie d'un polynôme et sa valeur moyenne. *C. r. Acad. sci. Paris*, t. 106, pp. 887 – 891.

--- (1888b), *Calcul des probabilités*. Paris, 1907. Reprint: New York, 1970, 1972.

Bessel F. W., Бессель Ф. В. (1815), Untersuchung der Größe und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen. In author's book (1876, Bd. 1, pp. 262 – 285).

--- (1816), Untersuchung über die Bahn des Olbersschen Kometen. *Abh. Preuss. Akad. Berlin*, Math. Kl., für 1812 – 1813, pp. 119 – 160.

--- (read 1832), Über den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie. *Populäre Vorlesungen*. Hamburg, 1848, pp. 1 – 33.

--- (1833), Letter to G. B. Airy. In author's book (1876, Bd. 3, pp. 462 – 465).

--- (1838a, нем.), Исследование о вероятности ошибок наблюдения. В книге автора (1961, с. 226 – 258).

--- (1838b, нем.), *Градусное измерение в Восточной Пруссии и т. д.* Там же, с. 99 – 186 (частичный перевод).

--- (1876), *Abhandlungen*, Bde 1 – 3. Leipzig.

--- (1961), *Избр. геодезич. соч.* М.

Bienaymé I. J. (1853), Considérations à l'appui de la découverte de Laplace. *C. r. Acad. sci. Paris*, t. 37, pp. 309 – 324. Also (1867), *J. math. pures appl.*, sér. 2, t. 12, pp. 158 – 176.

Biermann K.-R. (1965), Aus der Entstehung der Fachsprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen u. Fortschritte*, Bd. 39, No. 5, pp. 142 – 144.

--- (1966), Über die Beziehungen zwischen Gauss und Bessel. *Mitt. Gauss-Ges. Göttingen*, Bd. 3, pp. 7 – 20.

--- (1976), Historische Einführung. In Gauss (1796 – 1814/1976, pp. 7 – 20).

Bomford G., **Бомфорд Г.** (1952), *Geodesy.* Oxford, 1962, 1971. *Геодезия*. М., 1958.

Bond G. P. (1857), On the use of equivalent factors in the method of least squares. *Mem. Amer. Acad. Arts and Sciences*, new ser., vol. 6, pt. 1, pp. 179 – 212.

Bruhns C. (1869), *J. F. Encke*. Leipzig.

Campbell N. R. (1928), *Account of the Principles of Measurement and Calculations*. London.

Chakrabarti C. G. C. (1989), Gauss' principle and statistical thermodynamics. *Appl. Math. Lett.*, vol. 2, No. 2, pp. 121 – 123.

Chatterjee S. K. (2003), *Statistical Thought: a Perspective and History.* Oxford.

Clarke A. R. (1880), *Geodesy*. Oxford.

Coolidge J. L. (1926), R. Adrain and the beginnings of American mathematics. *Amer. Math. Monthly*, vol. 33, pp. 61 – 76.

Corry L. (1997), D. Hilbert and the axiomatization of physics. AHES, vol. 51, No. 2 (the whole issue).

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970.

Cramér H., Крамер Г. (1946, англ.), *Математические методы статистики*. М., 1948.

Czuber E. (1891), *Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig.

--- (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Bd. 1. New York, 1968.

David F. N., Neyman J. (1938), Extension of the Markoff theorem on least squares. *Stat. Res. Memoirs*, vol. 2. London, pp. 105 – 117.

Dedekind R. (1901), Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate. *Ges. math. Werke*, Bd. 2. Braunschweig, 1931, pp. 293 – 306.

Deparcieux A. (1746), *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*. Paris.

Dirichlet P. G. L. (1834), Über einen von Dirichlet herrührenden Beweis aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Werke*, Bd. 2. Berlin, 1897, pp. 368 – 372.

Dorsey N. E., Eisenhart C. (1969), On absolute measurements. In Ku (1969, pp. 49 – 55).

Dunnington G. W. (1955), *Gauss: Titan of Science*. New York.

Dutka J. (1990), Adrain and the method of least squares. AHES, vol. 41, pp. 171 – 184.

Eddington A. S. (1933), Notes on the method of least squares. *Proc. Phys. Soc.*, vol. 45, pp. 271 – 287.

Eisenhart C. (1964), The meaning of *least* in least squares. *J. Wash. Acad. Sci.*, vol. 54, pp. 24 – 33. Reprint: Ku (1969, pp. 265 – 274).

Encke J. F. (1832), Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. *Abh. Kgl. Akad. Wiss. Berlin*, math. Kl., für 1831, pp. 73 – 78.

--- (1850), Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen. *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1853, pp. 310 – 351.

Erman Ad., Editor (1852), *Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel*, Bde 1 – 2. Leipzig.

Euler L. (1778, латин.), [Замечания к мемуару Д. Бернулли (1778)]. Англ. перевод 1961 г. и его перепечатка 1970 г. опубликованы совместно с переводом указанного мемуара.

Fisher R. A. (1925), *Statistical Methods for Research Workers.* In author's *Stat. Methods, Experimental Design and Scient. Inference*. Oxford, 1990. Separate paging. *Статистические методы для исследователей*. М., 1958.

Forsythe G. E. (1951), Gauss to Gerling on relaxation. *Math. Tables and Other Aids to Computation*, vol. 5, No. 36, pp. 255 – 258.

Freudenthal H., Steiner H.-G. (1966), Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematische Statistik. In *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 4. Göttingen, pp. 149 – 195.

Fries J. F. (1842), *Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Braunschweig.

Galle A. (1924), Über die geodätischen Arbeiten von Gauss. In Gauss, *Werke*, Bd. 11/2, Abh. 1. Berlin. Separate paging.

Gerardy T. (1977), Die Anfänge von Gauss' geodätischer Tätigkeit. *Z. Vermessungswesen*, Bd. 102, pp. 1 – 20.

Gerling Ch. L. (1839), *Beiträge zur Geographie Kurhessens.* Cassel.

--- (1843), *Die Ausgleichungsrechnung*. Hamburg – Gotha.

--- (1861), Notiz in Betreff der Prioritäts-Verhältnisse in Beziehung auf die Methode der kleinsten Quadrate. *Nachr. Georg-August Univ. und Kgl Ges. Wiss. Göttingen*, pp. 273 – 275.

Hagen G. (1837), *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, 1867.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

--- (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

--- (2007), *History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 – 1925*. New York.

Hamel J. (1984), *F. W. Bessel*. Leipzig.

Harter H. L. (1974), The method of least squares and some alternatives, pt. 1. *Intern. Stat. Rev*., vol. 42, pp. 147 – 174.
--- (1977, date of Preface), *Chronological Annotated Bibliography of Order Statistics*, vol. 1. US Air Force establishments.
Helmert F. R., Гельмерт Ф. Р. (1872), *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Leipzig, 1907, 1924. *Уравновешивание по методу наименьших квадратов*. М., 1914. Частичный перевод.
--- (1875), Über die Berechnung der wahrscheinlichen Fehlers etc. *Z. Math. Phys.*, Bd. 20, pp. 300 – 303.
--- (1876), Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler etc. Ibidem, Bd. 21, pp. 192 – 218.
--- (1904a), Zur Ableitung der Formel von Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. *Sitz.-Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, Hlbbd 1, pp. 950 – 964.
--- (1904b), Сокращённый вариант: *Z. Vermessungswesen*, Bd. 33, pp. 577 – 587.
Hogan E. R. (1977), Adrain: American mathematician. *Hist. Math.*, vol. 4, pp. 157 – 172.
Huygens C. (1895), Correspondence of 1669. *Oeuvr. Compl.*, t. 6. La Haye.
Ivory J. (1830), On the figure of the Earth. *London, Edinb. and Dublin Phil. Mag*., vol. 7, pp. 412 – 416.
Kendall M. G., Plackett R. L., Editors (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.
Kepler J. (1609, in Latin), *New Astronomy.* Cambridge, 1992.
Klein F. (1926), *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Tl. 1. Berlin.
Knapp G. F. (1872), Quetelet als Theoretiker. *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 18, pp. 89 – 124.
Kronecker L. (1901), *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1. Leipzig.
Ku H. H. (1967), Statistical concepts in metrology. In author's book (1969, pp. 296 – 330).
--- , Editor (1969), *Precision Measurement and Calibration. Sel. Nat. Bureau Standards Papers Stat. Concepts and Procedures*. NBS Sp. Publ. 300, vol. 1. Washington.
Lagrange J. L. (1776), Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. *Oeuvr. Compl.*, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 234.
Laplace P. S. (1776), Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies. *Oeuvr. Compl*., t. 8. Paris, 1891, pp. 69 – 197.
--- (1811), Sur les intégrales définies. *Oeuvr. Compl*., t. 12. Paris, 1898, pp. 357 – 412.
--- (1812), *Théorie analytique des probabilités*, book 2. *Oeuvr. Compl*., t. 7, No. 2. Paris, 1886, pp. 181 – 496.
--- (1813), Sur les comètes. *Oeuvr. Compl.*, t. 13. Paris, 1904, pp. 88 – 97.
--- (1816), Suppl. 1 to the *Théor. anal. prob. Oeuvr. Compl*., t. 7, No. 2, pp. 497 – 530.
--- (1818), Suppl. 2. Ibidem, pp. 531 – 580.
--- (ca. 1819), Suppl. 3. Ibidem, pp. 581 – 616.
Legendre A. M. (1805), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris.
Lehmann E. L. (1959), *Testing Statistical Hypotheses*. New York – London, 1997.
Lipschitz R. (1890), Sur la combinaison des observations. *C. r. Acad. sci. Paris*, t. 111, pp. 163 – 166.
Loewy A. (1906), Die Gauss'sche Sterbeformel. *Z. f. d. ges. Versicherungswiss.*, Bd. 6, pp. 517 – 519.
Maennchen Ph. (1918), Gauss als Zahlenrechner. *W*-10/2, Abh. 6. Göttingen, 1930, separate paging.
Maire C., Boscovich R. (1770), *Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise*. Paris.
May K. O. (1972), Gauss. *Dict. Scient. Biogr*., vol. 6, pp. 298 – 315.
Mendoza E. (1991), Physics, chemistry and the theory of errors. *Arch. Intern. Hist. Sci.*, No. 41, pp. 282 – 306.

Merriman M. (1877), List of writings relating to the method of least squares. In Stigler (1980, vol. 1, separate paging).
Moser L. (1839), *Die Gesetze der Lebensdauer*. Berlin.
Newcomb S. (1897), A new determination of the precessional constant. *Astron. Papers*, vol. 8, pp. 1 – 76.
Neyman J. (1934), On two different aspects of the representative method. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 97, pp. 558 – 625. Also in author's book (1967, pp. 98 – 141).
--- (1938), *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability*. Washington, 1952.
--- (1967), *Selection of Early Statistical Papers*. Berkeley.
Olbers W. (1816), Über den veränderlichen Stern im Halse des Schwans. *Z. f. Astron. u. verw. Wiss.*, Bd. 2, pp. 181 – 198.
Pearson E. S., Kendall M. G., Editors (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 1. London.
Plackett R. L. (1949), Historical note on the method of least squares. *Biometrika*, vol. 36, pp. 458 – 460.
--- (1950), Some theorems in least squares. Ibidem, vol. 37, pp. 149 – 157.
Poincaré H., Пуанкаре А. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912, 1923. *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.
Poisson S.-D. (1824), Sur la probabilité des résultats moyens des observations, pt 1. *Conn. des temps* pour 1827, pp. 273 – 302.
Puissant L. (1805), *Traité de géodésie*. Paris.
Pukelsheim F. (1993), *Optimal Design of Experiments*. New York.
Quetelet A. (1835), *Sur l'homme*, t. 1. Paris. German transl., 1838.
--- (1846), *Lettres* […] *sur la théorie des probabilités*. Bruxelles.
--- (1849), *Sur le climat de Belgique*, t. 1. Bruxelles.
--- (1867), *Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIX^e^ siècle*. Bruxelles.
Rosenberger O. A. (1827), Über die […] vorgenommene Gradmessung. *Astron. Nachr.*, Bd. 6, pp. 1 – 32.
Sartorius von Waltershausen W. (1856), *Gauss zum Gedächtnis.* Wiesbaden, 1965.
Schneider I., Editor (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Darmstadt.
Schreiber O. (1879), Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen. *Z. f. Vermessungswesen*, Bd. 8, pp. 97 – 149.
Seal H. L. (1949), Historical development of the use of generating functions in probability theory. *Mitt. Vereinigung Schweiz. Versicherungsmathematiker*, Bd. 49, pp. 209 – 228. Reprint: Kendall & Plackett (1977, pp. 67 – 86).
--- (1967), The historical development of the Gauss linear model. *Biometrika*, vol. 54, pp. 1 – 24. Reprint: Pearson & Kendall (1970, pp. 207 – 230).
Sofonea T. (1955), Gauss und die Versicherung. *Het Verzerkerings-Archief*, vol. 32, pp. 57* – 69*.
Spieß W. (1939), Kann man für D. Huber Ansprüche als Erfinder der *Methode der kleinsten Quadrate* geltend machen? *Schweiz. Z. Vermessungswesen u. Kulturtechnik*, Bd. 37, pp. 11 – 17, 21 – 23.
Sprott D. A. (1978), Gauss' contribution to statistics. *Hist. Math.*, vol. 5, pp. 183 – 203.
Stewart G. W. (1995), Перевод мемуара Гаусс (1823b) с Послесловием (с. 207 – 241). Филадельфия.
Stigler S. M., Editor (1980), *American Contributions to Mathematical Statistics in the 19^th^ Century*, vols 1 – 2. New York.
--- (1981), Gauss and the invention of least squares. *Ann. Stat.*, vol. 9, pp. 465 – 474.
--- (1986), *History of Statistics*. Cambridge, Mass.
--- (1999), *Statistics on the Table*. Cambridge, Mass.
Struve L. (1887), Bestimmung der Constante der Präcession etc. *Mém. Acad. Imp. Sci. St. Pétersbourg*, sér. 7, t. 35, No. 3, separate paging.
Truesdell C. (1984), *An Idiot's Fugitive Essays on Science*. New York.
Whittaker E. T., Robinson G., Уиттекер Э., Робинсон Г. (1924), *Calculus of Observations*. London 1949, 1952. *Математическая обработка результатов наблюдений.* М., 1935.

von Zach F. X. (1813), Sur le degré du méridien. *Mém. Acad. Imp. Sci., Littérature, Beaux-Arts Turin* pour 1811 – 1812. Sci. math. et phys., pp. 81 – 216.

Zoch R. T. (1935), On the postulate of the arithmetic mean. *Annals Math. Stat.*, vol. 6, pp. 171 – 182.

V

Работа Бертрана в теории вероятностей

Bertrand's work on probability.
Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 48, 1994, pp. 155 – 199

1. Введение

1.1. Общие сведения. Исследования Жозефа Луи Франсуа Бертрана (1822 – 1900) относились к нескольким отраслям математики. В 1855 г. он перевёл на французский язык сочинения Гаусса по теории ошибок и МНКв, но длительный период, прошедший с тех пор до того, как сам Бертран вплотную занялся теорией вероятностей, означает, что в тот ранний период он не заинтересовался этой дисциплиной[1].

Несколько заметок Бертрана по теории вероятностей появилось в 1875 – 1884 гг. (последняя же – в 1892 г.) и в 1887 – 1888 гг. он опубликовал ещё 25 заметок на ту же тему, а в 1888 г. выпустил в свет свой трактат [2], который, как неизбежно следует, был написан весьма спешно.

В 1856 г. Бертран был назначен профессором Политехнической школы, а в 1862 г. – также профессором Коллеж де Франс. Он был избран в Парижскую академию наук, и с 1874 г. до своей смерти был её непременным секретарём. Lévy (1900, с. 72) указал, что Бертран неоднократно читал курс лекций по теории вероятностей в обоих указанных учебных заведениях, а Darboux (1902, с. XLII) засвидетельствовал, что в 1878 г. Бертран отказался от преподавания в Коллеж де Франс, но в 1886 г. был вынужден вернуться туда. Это обстоятельство, видимо, объясняет его неожиданный интерес к теории вероятностей, проявившийся несколько лет позже.

Мы впервые полностью описываем работу Бертрана в теории вероятностей и теории ошибок, и, начиная с § 2, следуем его трактату [2], притом обычно указываем лишь номера соответствующих страниц. Мы не упускаем и его заметок. Только три [9; 21; 34] не упомянуты; первая из них весьма кратка, остальные вряд ли интересны. Вот наши общие замечания (№№ 1, 4 и 5 относятся ко всем сочинениям Бертрана).

1. Он не упомянул некоторых своих предшественников, и в первую очередь Чебышева.

2. Его трактат содержит ошибочные утверждения и опечатки. Условия многих задач сформулированы небрежно, а чертежей вообще нет. Словесные описания, которые иногда заменяют формулы, раздражают.

3. Структура трактата неудовлетворительна.

4. Бертран применяет термин *вероятное значение* наравне с математическим ожиданием.

5. Его литературный стиль в высшей степени привлекателен.

Мы опустили описание классического МНКв и двумерное нормальное распределение, которое Бертран ввёл главным образом для обсуждения стрельбы в мишень, несколько изменили его изменчивые обозначения и ввели символ Гаусса вида [*aa*] для $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$.

1.2. Трактат [2]. Американский *National Union Catalog Pre-1956 Imprints* (т. 50, с. 591) сообщает, что он был опубликован дважды, в 1888 и 1889 гг. и упоминает второе, тождественное издание 1907 г. Существует, видимо, некоторая двусмысленность по поводу даты публикации. Так, Rouché (1888b) в своей рецензии на трактат (подробной, рассчитанной на неспециалистов), утверждал, что книга появилась в 1889 г. (!) На с. 561 и 577 рецензии издатель указал дату, декабрь 1888 г., выхода соответствующего номера журнала. Далее, *C. r. Acad. Sci. Paris*, т. 107, 1888, дважды упоминают издание 1889 г. На с. 671 сказано, что (29 октября) *Бертран представил Академии сочинение, которое он публикует под названием Исчисление вероятностей*, а на с. 705 *Bulletin Bibliographique* перечислил названия полученных изданий, начав с этой книги и даты 29 октября.

Мы заключаем, что трактат был впервые опубликован в 1888 г., но что дата по крайней мере некоторых экземпляров была случайно или специально указана неверно.

В Предисловии, на с. V, Бертран утверждал, что его книга является сводкой лекций, прочитанных в Коллеж де Франс, и что он попытался обсуждать *наиболее полезные и наиболее известные результаты, основывая их на самых простых доказательствах*, ср. наш § 18. Вот вторая выдержка оттуда же (с. V – VI), которая могла относиться к *Опыту философии* Лапласа (1814):

Большинство размышлений, навеянных углубленным изучением нередко серьёзных проблем, было предложено в работе, освобождённой от всех алгебраических символов и опубликованной вот уже много лет назад.

1.3. Некоторые другие сочинения Бертрана. Мы упоминаем их только, если они касаются теории вероятностей или же должны были её касаться.

1. В своей *Термодинамике* [1] Бертран (с. XI) сосредоточил *основные пояснения вокруг трёх имен, Сади Карно,* [Юлиуса] Роберта *Майера и Пуанкаре.* Он не назвал Больцмана и не упомянул теории вероятностей. Аналогично поступил в 1892 г. Пуанкаре в своей собственной *Термодинамике*.

2. В книге о Даламбере [3, с. 49 – 55] он не отразил взглядов своего героя на теорию вероятностей, однако справедливо заметил (с. 49 – 50), что тот отказался считать эту дисциплину *законной ветвью математики* и предположил (с. 51), что Даламбер был *неизменно готов объявлять непостижимым всё, что ему казалось неясным* и что (с. 55) смутность его трудов объяснялась отсутствием у него педагогического опыта.

3. Бертран [4] отвёл несколько строк работе Паскаля в теории вероятностей: Паскаль предложил *принцип* решения задачи на раздел ставки (с. 316). *Задачи о случайном* […] *были в*

его глазах первостепенными (с. 317). И вообще (с. 315), *без Паскаля наука не получила бы книгу Якоба Бернулли и чудесной теоремы* […], *которой она заканчивается*. Забыты были и Ферма, и Гюйгенс (см. также чуть ниже).

4. Бертран опубликовал большое число подробных рецензий в *Journal des savants* (Аноним 1902). Одна из них, в 1896 г., была посвящена сочинениям Гюйгенса (*Oeuvres Complètes*, тт. 2 – 6, а не 2 – 4, как сообщил Аноним). Было бы весьма уместно обсудить работу Гюйгенса в теории вероятностей, но Бертран даже не упомянул её. В 1887 г. Бертран [37] рецензировал *Аналитическую теорию вероятностей* Лапласа и в основном повторил свои соображения в трактате [2], но в Предисловии он там ухитрился ошибочно назвать эту книгу. Её обоснованной общей оценки он не оставил.

Некоторые замечания, относящиеся к теории ошибок, имеются в другой рецензии Бертрана [38]. Фактически вслед за Гауссом он (с. 211) рекомендовал объединять наблюдения нескольких геодезистов, чтобы обеспечить более надёжную оценку их (общей) точности.

2. Вероятность случайных событий

Бертран (с. 4) указал, что случайный выбор числа из их бесконечного множества не является определённым. Так, вероятность случайного выбора действительного числа x, превышающего 50, из чисел, заключённых между 0 и 100, не обязательно равна 1/2; случайность может означать, что не x, а x^2 распределено равномерно, так что $P(x^2 < 2500) = 1/4$. Ясно, однако, что вряд ли это соображение убедительно. Далее Бертран рассматривает несколько задач.

1. Знаменитая задача о длине случайной хорды. Её историю см. [vii, § 2.6 и далее]. Здесь мы лишь повторим, что в конце концов комментаторы решили, что искомая вероятность равна 1/2, но что с точки зрения теории информации это равносильно полному незнанию.

2. На поверхности шара случайно выбраны две точки. Какова вероятность P, что расстояние между ними окажется достаточно малым? Бертран привёл отличающиеся друг от друга ответы, а на с. 170 – 171 упомянул Мичелла, который в 1767 г. попытался вычислить вероятность, что две случайно выбранные звезды окажутся близко расположенными друг к другу.

Пусть одна из двух звёзд находится в некоторой точке A небесной сферы. Тогда вторая, отстоящая от неё на расстояние, не большее α от первой, расположится на поверхности шарового сегмента с вершиной A. Отношение площадей этого сегмента и полусферы равно $\alpha^2/2$ и т. д.

Подтверждая своё утверждение (с. 7), Бертран (с. 170) заявил, что *изобретательный довод Мичелла тем не менее нельзя представить в количественном виде*, следовало учесть и другие возможные особенности расположения системы звёзд[2], см. также [vii, § 2.6]. На с. 171 он упомянул *расплывчатый термин случай* (hasard), см. также McCormmach (1968) и Gower (1982).

3. В урне содержится m шаров, которые извлекаются с возвращением по одному. Какова вероятность P, что после n тиражей по меньшей мере k как-то отмеченных шаров будут извлечены хоть один раз (с. 14)? Вот его ответ:

$$P = m^{-n}[m^n - k(m-1)^n + \frac{k(k-1)}{2}(m-2)^n - ... \pm (m-k)^n].$$

Муавр (1725; 1756, с. 315) применил подобную формулу для вычисления *стоимости самой длинной жизни* в группе данного числа людей.

4. Голосование (с. 18). В урне содержится m бюллетеней, благоприятных А, и n бюллетеней, благоприятных В. Они извлекаются по одному без возвращения. Какова вероятность, что при подсчёте голосов кандидат А будет неизменно опережать В? Бертран [10] привёл простой вывод формулы

$$P = \frac{m-n}{m+n} \qquad (1)$$

и указал, что

$$P_{m+1,s+1} = P_{m,s} + P_{m+1,s},$$

где $s = m + n$ и $P_{m,s}$ указывает на успех А. Способа решения он не разъяснил, а числа $(m + 1)$ и $(s + 1)$ не соответствуют условию задачи. Вообще же применение подобных уравнений в теории вероятностей восходит к Лагранжу. См. также Феллер (1950/1964, §§ 1.3, 2.3 и 4.6), который заметил (с. 81), что *удивительно много результатов относительно* [их] *случайных колебаний выводится из* [задачи о баллотировке]. Сам Бертран (см. наш § 5) рассмотрел пример, иллюстрирующий это утверждение.

Barbier (1887) обобщил формулу (1) и указал, что при натуральных значениях k вероятность P того, что А будет неизменно опережать В в k раз будет равна

$$P = \frac{m-kn}{m+n}, \ k < \frac{m}{n}.$$

Доказана была эта формула лишь в 1924 г. (Takacz 1967, с. 2). Takacz также указал (с. 3; 1969, с. 895), что Муавр доказал формулу (1) при решении задачи на разорение игрока, играющего с бесконечно богатым противником, точно после n игр. Всего в первых двух главах трактата Бертрана содержалось 40 задач, частично с решениями и неизменно с ответами.

3. Ожидание

Так (espérance mathématique) называлась третья глава трактата. Пуассон (1829; 1837, с. 140 – 141) определил дискретную случайную величину, назвав её явно временным термином *вещь А*. Не называя его, Бертран (с. 61) рассматривал grandeurs, т. е. их же. Так, он сформулировал две теоремы, относящиеся к их ожиданиям. Вот одна из них: *Вероятное значение произведения, если сомножители независимы, равно произведению их вероятных значений*. По крайней мере в одном случае Бертран [8] обозначил ожидаемое значение буквой Е (но не Eξ); впрочем, Meyer (1874, гл. 3) опередил его.

Таким образом, Бертран (например, на с. 80) употреблял термин *вероятное значение* наравне с ожиданием; он не последовал за Гауссом, который, в *Теории комбинаций*, § 5, назвал ожидание непрерывной случайной величины *valor medius*.

Вот некоторые задачи из трактата.

1. В урне содержится большое число m пронумерованных шаров; n шаров было вынуто по одному с возвращением. Каково ожидание Пьера, который получает по 1 франку за каждое экстремальное значение в появляющейся числовой последовательности (с. 53)? Гораздо более общую задачу обсуждал Бьенеме в 1874 и 1875 гг. Heyde & Seneta (1977, § 5.11) описали и его работу, и последующие исследования, включая заметку Бертрана [7].

Там Бертран утверждал, что любое из трёх *абсолютно неизвестных* чисел будет максимально с вероятностью 1/3 и заключил, что ожидание Пьера равно $2/3n$. То же он повторил в трактате, но разумно отказался от прежнего утверждения [7] о том, что, если 10 последовательных членов случайной числовой последовательности не экстремальны, то её следующий член окажется экстремальным с вероятностью 10/11.

Heyde & Seneta (1977, с. 125 – 126) приписали Бертрану первое применение индикаторных переменных (принимающих значения 0 и 1 с соответствующими вероятностями). Однако, непосредственно он их не вводил, первым же был Чебышев (1867/1947, с. 436).

2. Знаменитая задача Бюффона (с. 54). Игла длиной s падает на ряд параллельных прямых, расположенных на расстояниях a друг от друга ($a > s$). Пьер получает франк, если игла пересекает прямую, и требуется определить его ожидание. Лаплас (1812, гл. 5) заметил, что по результатам многократного повторения этого эксперимента можно эмпирически определить значение π [vii, § 1.5]. Бертран, в свою очередь, указал, что искомая вероятность зависит и от длины, и от формы иглы, но что ожидание Пьера от формы иглы не зависит. В этом он усматривал различие между исчислениями вероятностей и ожиданий, но дальнейших разъяснений не дал.

Он также сослался на Barbier (1860), который обобщил указанную задачу и на с. 175 указал, что в соответствии с рекомендацией Бертрана предпочитает выводить ожидания. Проблему Бюффона рассматривали многие последующие авторы, в том числе Буняковский и Марков.

3. Петербургская игра (с. 62). Игрок А подбрасывает монету. Если орёл появляется при первом броске, он получает франк от В, если же это произойдёт только при k-м броске, то он получает 2^{k-1} франков. Его ожидание оказывается бесконечным, что

противоречило здравому смыслу. Эту задачу придумал Николай Бернулли, но стала она знаменитой после появления мемуара Даниила Бернулли 1738 г., опубликованного в Петербурге. Он видоизменил задачу, введя понятие морального ожидания (Шейнин и Майстров 1972, с. 140 – 142). Бертран (с. 66) отрицал новое понятие:

Теория морального ожидания стала классической, и никогда ещё это слово не употреблялось более точно. Она изучалась и преподавалась, она развивалась в книгах поистине знаменитых, но на этом успех прекратился: она никогда не была и не могла быть применена.

Лаплас также исследовал моральное ожидание, чего мы уже не будем обсуждать. Но, чтобы избежать путаницы, он (1812/1886, с. 189) предложил уточнить классический термин *ожидание*, назвав его *математическим*. Его рекомендация была принята по крайней мере во французской и русской литературе и, к сожалению, её придерживаются до настоящего времени.

Моральное ожидание стало всё же применяться в австрийской школе экономистов (теория предельной полезности). В 1953 г. фон Нейман и Моргенштерн аксиоматически обосновали новую теорию субъективной вероятности, восходящую к Бернулли (Jorland 1987, с. 179), см также Shafer (1988). Dutka (1988) опубликовал обзор истории петербургской игры, но не упомянул ни Freudenthal (1951), ни Aaronson (1978). Мы лишь заметим, что петербургская игра оказалась достойной темой исследований; не говоря уж о Данииле Бернулли, Фрейденталь, например, изучил серию таких игр, в которой игроки менялись ролями случайным образом.

Бертран впервые занялся петербургской игрой в заметке [13], но ничего примечательного не предложил. Он, однако, сформулировал теорему о продолжительности справедливой игры двух игроков, обладающих равными капиталами. Вероятность её продолжения в течение n игр оказалась равной $n^{-3/2}$, что можно доказать, рассмотрев случай $n \to \infty$ в нашей формуле (5.10), см. ниже.

4. Биномиальное распределение

4.1. Теория. Бертран (с. 69 – 80) описал доказательство теоремы Муавра – Лапласа, ошибочно назвав её по имени Бернулли[3]. В приведенном примере он (с. 76) сравнил значения 20! с его приближением по формуле Стирлинга. Вычислял он с 14-ю или 15-ю значащими цифрами, хотя достаточно было установить соотношение этих значений, равное 1.00417.

Бертран (с. XXXII) не поверил в закон больших чисел Пуассона: *Это открытие* […] *весьма мало отличается от известных законов случайности*. Он добавил, что сам Пуассон *был почти единственным, кто признавал за этим законом большое значение*. Он ошибся в обоих случаях[4]. Мы (1978, § 4.4) описали, как закон Пуассона начал постепенно признаваться, и указали, что Чебышев (1846/1947, с. 14) назвал его *основным предложением теории вероятностей*.

Далее, отрицая среднего человека Кетле, Бертран (с. XLII – XLIII) не заметил, что это понятие было бы гораздо более приемлемо, будь оно основано на законе Пуассона, а не на теореме Якоба Бернулли.

Бертран (с. 80 – 82) определял $\mathrm{E}\xi^2$ и $\mathrm{E}|\xi|$ (или, точнее, $\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$ и $\mathrm{E}|\xi - \mathrm{E}\xi|$, в современных обозначениях) для количества успехов в схеме Бернулли[5]. В первом случае он рассматривал

$$(p + q)^n = p^n + A_1 p^{n-1} q + \ldots + A_{qn} p^{pn} q^{qn} + \ldots + q^n. \qquad (1)$$

Заметив, что

$$\sum_{k=0}^{n} (nq - k)^2 A_k p^{n-k} q^k = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2,$$

Бертран вычислил эту сумму, получив

$$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = npq. \qquad (2)$$

Он несомненно принял, что $\mathrm{E}\xi = qn$.

Ранее (см. ниже) он обозначил вероятность успеха через p, а не через q. В заметке [8] Бертран аналогичным образом получил $\mathrm{E}[(\xi/n) - p)]^2 = pq/n$ и заметил, что при $n \to \infty$ $\mathrm{E}[|(\xi/n) - p| > \varepsilon] \to 0$. Здесь и при исследовании стрельбы в цель [2, с. 244 – 245] можно было воспользоваться неравенством Бьенеме – Чебышева, а формулу (2) вывести проще, применив индикаторные переменные.

Более интересен второй случай Бертрана. Он заметил, что

$$P[(\xi - \mathrm{E}\xi) = z] = A_z p^{np+z} q^{nq-z}$$

и что сумма произведений соответствующих членов бинома $(p + q)^n$, т. е. членов, соответствующих условию $z \geq 0$, умноженных на $z = q(np + z) - p(nq - z)$, была равна

$$pq[\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}], \qquad (3)$$

где φ – сумма этих членов. Оказалось, что (3) равносильно выражению

$$C_n^{np} p^{np} q^{nq} npq = \frac{\sqrt{npq}}{\sqrt{2\pi}}$$

и что окончательный результат должен быть вдвое больше.

Бертран также заметил, что и $\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$ и $\mathrm{E}|\xi - \mathrm{E}\xi|$ совпадали со своими значениями, непосредственно вычисленными по соответствующему нормальному распределению, а на с. 101 – 103 предложил ещё *более простое* независимое доказательство того, что для биномиального распределения $(E|\xi - E\xi|/n) \to 0$ и (с. XXII) что *терпеливо* можно эмпирически вычислить $\pi/2$, примерно равное $E(\xi - E\xi)^2/(E|\xi - E\xi|)^2$. Если мы правильно понимаем его рассуждения, то он (с. XXVI – XXVII) предположил, что, если для ряда разностей мужских и женских рождений это отношение существенно отличается от $\pi/2$, то следовало выяснить причину этого. Наконец, Бертран (с. XXIV) описал результат своего исследования 10-значной таблицы логарифмов. Он проверил распределение седьмой цифры, вычислив то же отношение, но не пояснил своего метода в достаточной мере.

4.2. Задачи.

1) Определить вероятность, что в n = 20 000 тысячах испытаний Бернулли при $p = 0.45$ количество успехов превысит $n/2$ (с. 89). Вычисление по теореме Муавра – Лапласа показывает, что эта вероятность очень невелика. Ранее Бертран [18] решил ту же задачу более сложным путём. Вначале, вслед за Гауссом (1816, § 5), он вычислил чётные моменты нормального распределения $E(\xi/a)^{2s} = E[(\xi/a)^s]^2$, а затем определил их минимальное значение. Оказалось, что оно равно $e^{-s}\sqrt{2/e}$ (правильно $e^{-s}\sqrt{2}$) и имеет место при $s = a^2/2npq - 1/2$ (при $s = a^2/2npq$).

2) Урна содержит λp белых шаров и λq чёрных. Определить вероятность, что после n извлечений без возвращения появится $(np - k)$ белых шаров (с. 94). Ранее Бертран [17] привёл лишь ответ при $\lambda, n \to \infty$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - n}}\exp[\frac{k^2\lambda}{2pqn(\lambda - n)}]$$

и заметил его сходство с теоремой Муавра – Лапласа. Он (с. 1202) разумно указал, что переменная вероятность извлечения белого шара была *своего рода регулятором нормальной пропорции, предусмотренной теоремой Бернулли*.

В своём трактате Бертран привёл доказательство, применив, вслед за Муавром (1712/1984, с. 247 – 248; 1756, с. 86 – 89), гипергеометрическое распределение. В 1657 г. эту задачу рассматривал Гюйгенс в дополнительной задаче № 2 (Шейнин 1977b, с. 241 и 244).

3) Сколько безобидных игр необходимо, чтобы один из двух игроков потерял 100 000 ставок с вероятностью 0.999 (с. 106 – 107)? Иными словами, требуется определить n при $p = 1/2$ и

$$|\mu - np| \le 50\,000,\ P(|\mu - np| \le 50\,000) = 0.001 \qquad (4a, b)$$

где μ – число проигранных ставок.

По теореме Муавра – Лапласа

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^{b/\sqrt{2}} \exp(-\frac{z^2}{2})dz = 10^{-3},\ b = 10^5/\sqrt{n},$$

$$\frac{10^5}{\sqrt{2n}} = 0.9\cdot 10^{-2},\ n \approx 0.62\cdot 10^{14}.$$

Бертран, однако, вычислял иначе. Он заметил, что условие (4а) включало 100 000 возможных случаев, каждый из которых был менее вероятен, чем результат $\mu = np$. Далее, он вычислил вероятность этого последнего условия и, наконец, получил $n \geq 2\cdot 10^{16}/\pi = 0.64\cdot 10^{16}$. Тот же результат будет иметь место при подынтегральной функции в последнем интеграле, равной 1, но Бертран этого не указал. Условия задачи были необычны, и смысла в ней нет.

4.3. ***В каждой игре случай регулирует свои капризы.*** В § 4.2 мы процитировали соответствующее утверждение Бертрана. Впрочем, и Даниил Бернулли, и Лаплас привели более интересные примеры, предвосхитив знаменитую модель Эренфестов (Шейнин 1976, с. 150 – 151). После Бертрана Пуанкаре (1896, § 93) объяснил появление равномерного распределения в существенных природных явлениях, Бертран же оставил несколько подходящих высказываний; мы выбрали одно из них [2, с. XX] как заглавие этого подпараграфа. Вот ещё одно (там же, с. L):

Случай лишён положительных качеств. Бессильный в большом, он лишь нарушает малое. Но для приведения вещей в природе к уверенному и точному предназначенному состоянию в условиях бесконечного брожения и вариаций он является наилучшим и простейшим механизмом.

Здесь видна философская позиция Бертрана, и здесь можно привести уточняющее высказывание Пуанкаре (1896/1999, с. 9): *Точные законы* […] *лишь очерчивали пределы, в которых дозволялось пребывать случаю.*

В то же время Бертран (с. XXII) справедливо отрицал, что ряд наблюдений или (к примеру) событий будет уравновешен в будущем: *рулетка лишена и воли, и памяти.*

5. Разорение игрока

Задача о продолжительности игры или разорении игрока имеет важные приложения; многие комментаторы (Феллер, 1950/1964, гл. 14; Thatcher, 1957; Takacz, 1969; Kohli, 1975; Hald, 1990, гл. 20 и 23) описывали её историю, но не упоминали Бертрана. Вот задачи, которые он решал.

1) Игроки А и В имеют по $2m$ франков каждый; ставка равна 1 франку и игра безобидна. Требуется определить ожидаемую продолжительность игры, $\varphi(2m)$, с. 111 – 113. Пусть вначале игроки играют лишь на m франков. Тогда проигравший либо вернёт свою потерю в дальнейшей игре, либо разорится, а потому

$$\varphi(2m) = 2\varphi(m) + (1/2)\varphi(2m). \quad (1)$$

Если же капитал В не ограничен, а игрок А имеет лишь m франков, то ожидаемая продолжительность игры составит

$$\varphi(2m) = 4\varphi(m).$$

На с. 132 – 133 Бертран обобщает эту задачу, полагая, что игра не является безобидной. Фактически он исходил из формулы Муавра, которую в иной форме предложил Якоб Бернулли, Муавр же первым опубликовал её (Todhunter 1865, с . 62 – 63):

$$P_m = \frac{\lambda^m - 1}{\lambda^{m+n} - 1}. \quad (2)$$

В ней предположено, что А имеет m фишек, а В – n фишек и $\lambda = q/p$, где p и q – их вероятности выигрыша в каждой игре. Для случая, при котором игроки имеют по m фишек каждый, Бертран вычислил вероятности разорения в виде

$$P_{\text{А}} = \frac{1}{1+\lambda^m},\ P_{\text{В}} = \frac{\lambda^m}{1+\lambda^m},$$

заметив, что вместо формулы (1)

$$\varphi(2m) = 2\varphi(m) + \frac{2\lambda^m\varphi(2m)}{(1+\lambda^m)^2}.$$

И тут он бросил свою задачу как *не интересную для исчисления вероятностей*. Возможно, однако, что она оказалась слишком трудной.

2) Разорение в безобидной игре при неравных вероятностях выигрыша (с. 116 – 117). Игроки имеют m и n фишек, их ставки – a и b, а вероятности выигрыша в каждой игре, p и q. Определить вероятности их разорения**[6]**. Бертран заметил, что из безобидности игры следовало, что

$$P(m + n) = m,\ P = m/(m + n). \quad (3)$$

Ту же вероятность он определил из разностного уравнения

$$y_x = py_{x+b} + qy_{x-a}, \quad (4)$$

где y_x обозначало искомую величину при игроке А, имеющем x фишек, так что

$$y_0 = 0,\ y_{m+n} = 1, \quad (5a, b)$$

притом для безобидной игры

$$pb = qa. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y_x = \alpha x + \beta, \tag{7}$$

откуда следовала формула (3).

Условие (5b) подразумевало победу А. Действительно, уравнение (4) можно записать в виде

$$py_{x+a+b} - y_{x+a} + qy_x = 0,$$

его характеристическое уравнение будет

$$p\lambda^{a+b} - \lambda^a + q = 0. \tag{8}$$

Ввиду условия (6) уравнение (7) имеет двойной корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Пусть теперь a и b – натуральные числа. Тогда, в зависимости от чётности чисел $(a + b)$ и a, уравнение (8) может иметь отрицательный корень $\lambda_3 = -1$ или даже $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$, но никаких других вещественных корней. Таким образом, уравнение (7) действительно определяет общее решение уравнения (4).

3) Та же задача, но игра не является безобидной (с. 117 – 119). Бертран вывел то же уравнение (4) с теми же самыми дополнительными условиями (5), однако ограничение (6) уже не имело места, так что

$$y_x = C_1 + C_2\lambda^x. \tag{9}$$

Действительно, уравнение (8) теперь имело только один корень, равный 1, а потому имело в точности два положительных корня и т. д[7].

Вычислив C_1 и C_2, Бертран получает формулу (2); в пределе $\lambda \to 1$, что является решением задачи № 2, но не № 3. Бертран применил и *изобретательное ухищрение* Муавра (1712/1984, с. 244 – 245; 1756, с. 52 – 53), см. также Hald (1990, с. 203 – 204), связь которого с мартингалом заметил Seneta (1983, с. 79). Впрочем, Бертран не отыскал соответствующего значения λ, а потому и не добился цели. Мы, однако, уже указали (Прим. 6), что его задача вряд ли была важна.

4) Определить вероятность, что игрок А, имеющий конечное число фишек, разорится при неопределённо длительной игре *против всякого желающего* (с. 119 – 122). Здесь вместо уравнения (8) Бертран получил

$$q\lambda^{a+b} - \lambda^b + p = 0,$$

что соответствовало разорению А. Он рассмотрел случаи, при которых λ было больше или меньше 1 или равно 1. В случае $\lambda > 1$, как заметил Бертран, исход игры оставался неопределённым.

5) Разорение после определённого числа игр (с. 122 – 124). Какова вероятность разорения игрока А, который имеет m фишек, в точности после n игр, если вероятность его выигрыша каждой игры равна p, а его противник обладает неограниченным капиталом и $n > m$?

Предположив, что n и m имеют одну и ту же чётность, Бертран выписал вероятность потери $(n + m)/2$ и выигрыша $(n - m)/2$ игр игроком А

$$P(n) = \frac{m}{n} C_n^{(n-m)/2} p^{(n-m)/2} q^{(n+m)/2}. \qquad (10)$$

Первый сомножитель, m/n, как он заметил, ссылаясь на свою задачу о баллотировке (§ 2), учитывал возможность разорения А до n игр[8].

Вероятность разорения А через n игр равна

$$P(n) + P(n+2) + P(n+4) + ... = \frac{1}{2} \int_{n+2}^{\infty} P(x)dx. \qquad (11)$$

Бертран выразил интеграл экспоненциальной функцией отрицательного квадрата, и тот же метод он применил ранее [11]. Феллер (1950/1964, с. 348), который высоко оценивал значимость задачи о баллотировке, вывел формулу (10), но не применил при этом формулы (2.1).

6) Разорение в безобидной игре с равными вероятностями выигрыша и проигрыша (с. 126 – 127). Требуется определить ожидаемое число игр y_x в условиях задачи № 2. Здесь

$$y_x = 1 + py_{x+b} + qy_{x-a},\ y_0 = y_{m+n} = 0.$$

Возможно предположив, что решение (7) сохранится в обобщённой форме

$$y = \alpha(x)x + \beta(x),$$

Бертран принял, что

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Исходные условия и ограничение (6) потребовали, чтобы

$$\alpha = -1/ab,\ \beta = (m + n)/ab,\ \gamma = 0,$$

так что

$$y_m = mn/ab. \qquad (12)$$

7) Та же задача, но без условия безобидности (с. 128 – 131). Бертран, видимо, снова обобщил своё соответствующее прежнее решение и принял, что

$$y = C_2(x) + C_1(x)\lambda^x = C_1\lambda^x + C_2x + C_3,$$

откуда следовало

$$p\lambda^{a+b} - \lambda^a + q = 0,\ C_2 = -\frac{1}{(a+b)p - a}. \qquad (13)$$

Но здесь, он заметил, что в соответствии с определением этой величины

$$y_m = \frac{(m+n)P - m}{pb - qa}, \qquad (14)$$

где P определяется выражением (2), но λ, как и в задаче № 3, остаётся неопределённым. До Бертрана эта формула, видимо, не была известна, а его выбор ожидания был удачен, ибо позволил сразу же решить задачу, см. также п. 2 в § 3.

Бертран, далее, указал, что, поскольку

$$y_m = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_\mu x_\mu, \qquad (15)$$

где p_i – вероятности того, что произойдёт x_i игр, ожидаемый выигрыш игрока А в игре i равен $p_ix_i(pb - qa)$, так что (пусть $pb - qa > 0$)

$$y_m(pb - qa) = (m + n)P - m \text{ и т. д.}$$

Впрочем, это рассуждение было вряд ли необходимо. Далее Бертран определяет предел y_m при $(pb - qa) \to 0$, т. е. при возрастающей безобидности игры. Он обозначил эту разность через ε; заметил, что второй положительный корень уравнения (13) был равен $\lambda_2 = 1 + \varepsilon = e^h$, где h не зависело ни от m, ни от n; и указал, что $y_x = -hmn/\varepsilon$. Знаменатель должен был бы быть вдвое больше, но ошибка не была существенна, потому что коэффициент при mn зависел от начального условия $y_{ab} = 1$. Окончательный результат, конечно же, совпадал с формулой (12).

Впервые Бертран объяснил, как доказывается формула (14) в статье [19], в которой он также указал без обоснования, что (12) может быть получено как предел y_m. В своём трактате он заметил, что Rouché (1888a) доказал (без необходимости) формулу (14) до него. Rouché вывел и уравнение (13).

6. Вероятность причин

Так, вслед за Лапласом (1812, гл. 5 и 6), Бертран назвал одну из своих глав. Его основной задачей в ней было установление апостериорной вероятности гипотез в соответствии с бейесовским подходом, – с подходом, который он отрицал (см. конец главы). Лаплас упомянул Бейеса, хоть и запоздало, в последней главе своего *Опыта* (1814), Бертран же умолчал о нём. Вот основные задачи этой главы.

1) Урна содержит белые и чёрные шары. При извлечениях с возвратом были получены m белых шаров и n чёрных, и требуется определить состав урны (с. 148 – 149). Предположив, что все возможные соотношения шаров равновероятны и обозначив вероятность извлечения белого шара через x, Бертран получил вероятность выборки, пропорциональную

$$y = x^m(1-x)^n$$

и вероятнейший состав урны, соответствующий значению

$$\hat{x} = \frac{m}{m+n}. \qquad (1)$$

2) Продолжение (с. 149 – 151). На самом деле каждая гипотеза о значении x имеет свою собственную вероятность. Требуется определить соответствующее распределение. Оно выражается экспоненциальной функцией

$$C\exp[-\frac{\varepsilon^2(m+n)}{2pq}],\ q = 1-p. \qquad (2)$$

Эта формула, как замечает Бертран, отличается от формулы закона Муавра – Лапласа *только* тем, что точно известным является не теоретическая вероятность, а число m. Однако это означает, что формулу (2) следовало сравнивать с соответствующим результатом Бейеса (Шейнин 2007).

2а) При n извлечениях с возвратом было получено m белых шаров. Требуется определить вероятность P, что в урне находятся $m/n + z$ белых шаров (с. 180). Бертран привёл только ответ, притом неверный

$$P = \frac{n}{\sqrt{2\pi m(n-m)}}\exp[-\frac{n^2z^2}{2m(n-m)}], \qquad (3)$$

а в предшествующей статье [23, с. 565], также без вывода, указал, что

$$P = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{\pi m(n-m)}}\exp[-\frac{n^3z^2}{m(n-m)}]. \qquad (4)$$

Мы можем указать интегральную форму формулы Бейеса для искомой вероятности

$$\lim P(\frac{|\hat{x} - \mathrm{E}\hat{x}| \le z}{\sqrt{2\pi m(n-m)}\,/\,n^{3/2}} = \int_0^z \exp(-\frac{w^2}{2})dw.$$

3) N белых и чёрных шаров кладутся в урну таким образом, что выбор того и иного цвета равновероятен. Определить вероятнейший состав урны, если выборка с возвращением включала m белых шаров и n чёрных.

Допустим, что в урне находится $N/2 - z$ белых шаров и обозначим $z/n = y$. При большом N вероятность этой гипотезы пропорциональна $\exp(-2Ny^2)$, а вероятность выборки оказывается равной

$$[(1/2 - y)^m(1/2 + y)^n].$$

Вероятность причины, *т. е. значения y,* пропорциональна произведению этих двух вероятностей и оказывается максимальной в точке

$$y = \frac{n-m}{2(N+m+n)}.$$

Бертран здесь естественным образом обсуждал неравные априорные вероятности, а на с. 148 он решил аналогичную задачу с дискретными априорными вероятностями.

4) Монета подбрасывалась 4040 раз, и герб появился в 2048 случаях, а в 1992 случаях – решётка (Бюффон). Определить, не была ли монета плохого качества (с. 158 – 160). Бертран устанавливает вероятность P того, что вероятность выпадения герба, p, превышала 1/2. На с. 157 он заметил, что *иногда отыскивается не вероятность каждой гипотезы* [это слишком сложно], *а лишь вероятности* [указанного типа].

Пусть $p = 1/2 + z$, $0 < z \le 1/2$. Тогда

$$y = (1/2 + z)^{2048}(1/2 - z)^{1992} \approx \exp\ (-\ 8080z^2 + 112z),$$

так что P пропорционально

$$\int_0^{1/2} \exp\ (-\ 8080z^2 + 112z)dz.$$

Вероятность неравенства $z \le 0$, т. е. $1 - P$, пропорциональна

$$\int_0^{1/2} \exp\ (-\ 8080z^2 - 112z)dz,$$

а соотношение этих вероятностей равно 4.263 и $P = 4.263/5.263 = 0.81$.

Бертран молчаливо допустил равномерную априорную вероятность p. Он добавил, что Пуассон (1837, с. 229) [пользуясь своим вариантом интегральной теоремы Муавра – Лапласа], получил тот же результат. Мы сами также вывели его, исходя из результатов Бейеса, см. задачу (2а), получили стандартное отклонение неизвестной вероятности, равное 0.0079, что соответствует значению $Ep = 2048/4040 = 0.507$ и значению P, указанному выше. Подобные задачи теперь естественно решать с применением критерия хи-квадрат.

В прежней статье Бертран [24] рассуждал об эксперименте Бюффона и несправедливо назвал вычисления Пуассона *длинными и трудными*, но ещё не оценивал P.

5) В 10 000 играх в рулетку *красное* появилось 5300 раз, а не 5000. Определить вероятность того, что рулетка была повреждена (с. 166 – 169). Или иначе, требовалось сравнить гипотезы P_1 ($0.529 \le p \le 0.531$) и P_2 ($0.499 \le p \le 0.501$). Бертран заметил, что $P_1 + P_1 < 1$, но что их отношение обеспечивает ответ. Фактически же он вычислил отношение

$$\frac{p_1^{5300}(1-p_1)^{4700}}{p_2^{5300}(1-p_2)^{4700}}$$

при $p_1 = 0.500$ и $p_2 = 0.530$. Он указал, что оно будет равно P_1/P_2 только если априорные вероятности обеих гипотез совпадали. Они, однако, не были известны, и Бертран оставил эту задачу.

6) Определить вероятность завтрашнего восхода Солнца (с. 173 – 174). Допустим, что событие произошло m раз в s испытаниях, плотность распределения вероятностей случайной величины, которая описывает подобный результат, даётся выражением

$$\psi = Cz^m(1-z)^n$$

при $n = s - m$ и вероятность последующего появления события, или, мы бы сказали, ожидание этого события, равно дроби $(m + 1)/(m + n + z)$ с тем же n.

Соответственно, Бертран вычислил вероятность восхода Солнца при $m = s = 2\ 191\ 500$ и $n = 0$, однако указал, что задача бессмысленна, и некоторые авторы, Polya (1954, с. 135), Феллер (1950/1964, с. 130), были того же мнения. Однако, Прайс (Bayes 1764/1970, с. 150 – 151) поставил эту задачу как чисто методическую: он допустил, что про восходы Солнца ничего не было известно заранее. Вряд ли можно считать, что ни он, ни другие учёные (Бюффон, Лаплас), которые также решали эту задачу, не понимали её условности.

7) Эту задачу можно отнести к бейесовскому подходу. Вот она (с. 276 – 278). В $n = 10^6$ бросках монеты герб появился $m = 500\ 391$ раз. Можно ли считать, что вероятность этого события равна 0.500391? Бертран утверждал, что трёх бросков недостаточно для установления этой вероятности, что даже при больших значениях n *точность* статистической вероятности *обосновывается не*

лучше, что ни одна цифра в вычисленном значении *p не заслуживает доверия*.

Он рассмотрел две гипотезы: $p_1 = 0.500391$ и $p_2 = 1 - p_1$. Ошибочно считая, что априорно обе гипотезы равновероятны, и приняв, что $p_1 \approx p_2 \approx 1/2$, он подсчитал по локальной теореме Муавра – Лапласа

$$\frac{P(p = p_1)}{P(p = p_2)} = \exp[-\frac{\Delta p^2}{2npq}] = 1 \div 0.294332 \approx 3.40.$$

Так каков же вывод? И почему Бертран не поверил в статистическую вероятность, которую при столь большом n вполне можно было принять за теоретическую? Притом более просто было бы подсчитать

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1^m (1 - p_1)^n}{p_2^m (1 - p_2)^n} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{m-n}.$$

По сути Бейес не верил в бейесовский подход. В случае одного-единственного броска он (с. 160 – 161) обозначил вероятность герба через x, и, как в задаче № 2, получил

$$P(1/2 \le p \le 1) = C \int_{1/2}^{1} x dx = 3/8C, \; P(1/2 \le p \le 1) = 1/8C.$$

Сумма вероятностей должна равняться 1, а потому $C = 2$, и вторая вероятность равна 3/4. *Подобное следствие* достаточно, *чтобы осудить принцип* (т. е. бейесовский подход), заключил Бертран, усиливая своё прежнее высказывание [24, с. 637]. Современный автор (Roberts 1978, с. 12) признал трудность рассмотрения одного испытания. Впрочем, Бертран никакого принципа не опроверг, поскольку следовало воспользоваться результатами Бейеса, а Курно (1843, § 95), очевидно вслед за Лапласом, указал, что заключения подобного рода становятся всё более объективными с возрастанием числа испытаний. В § 93 он заявил, что случай одного испытания недостаточен для заключения.

7. Порядковые статистики

Бертран доказал несколько теорем о средних значениях порядковых статистик. Он начал со случайной переменной Δ с законом распределения

$$\varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \exp(-k^2 x^2), \qquad (1)$$

так что $E\Delta^2 = 1/2k^2$, $E|\Delta| = 1/k\sqrt{\pi}$. (2a, b)

1) Наблюдения случайно распределены попарно. Определить среднее (т. е. ожидаемое) значение наибольшей по абсолютной

величине ошибки в паре (с. 198 – 199). Для погрешностей δ_1 и δ_2 очевидно

$$P(x_1 \le |\delta_1| \le x_1 + dx_1; |\delta_2| \le x) = 2\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\exp(-k^2x^2)[\int_0^x \frac{2k}{\sqrt{\pi}}\exp(-k^2z^2)dz]dx.$$

Первый сомножитель, 2, учитывает возможную взаимную перестановку ошибок. Искомое значение равно

$$\mathrm{E}\xi = \frac{8}{\pi}k^2\int_0^x x\exp(-k^2x^2)[\int_0^x \exp(-k^2z^2)dz]dx.$$

Интегрирование по частям приводит к

$$\mathrm{E}\xi = \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}}. \qquad (3)$$

2) Та же задача (с. 199 – 200). Бертран описал другое решение и дополнительно оценил меньшую по абсолютной величине ошибку. Вот его рассуждение:

$$\mathrm{E}[\frac{\delta_1+\delta_2}{2}]^2 = \mathrm{E}\frac{\delta_i^2}{2} = \frac{1}{4k^2},\ i = 1 \text{ или } 2.$$

Это выражение совпадает с формулой (2а) при замене k на $k\sqrt{2}$, а потому то же соотношение имеет место для второго среднего значения[9] и

$$\mathrm{E}\xi = \frac{|\delta_1+\delta_2|}{2} = \frac{1}{k\sqrt{2\pi}}.$$

Обозначим max (δ_1; δ_2) = M, min (δ_1; δ_2) = m, тогда

$$\mathrm{E}\frac{|\delta_1+\delta_2|}{2} = \frac{1}{2}[\mathrm{E}\frac{M+m}{2} + \mathrm{E}\frac{M-m}{2}] = \frac{1}{2}\mathrm{E}M,$$

откуда следует (3). Кроме того, ввиду (2b),

$$\mathrm{E}M + \mathrm{E}m = \frac{2}{k\sqrt{\pi}},\ \mathrm{E}m = \frac{2-\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}}.$$

В статье [14] Бертран указал формулу для ЕM/Еm, но не доказал её.

3) Наблюдения подразделены как и раньше. Требуется определить среднее значение квадрата наибольшей по абсолютной величине ошибки в паре (с. 200 – 201). Решение аналогично задаче № 1:

$$\mathrm{E}\xi^2 = \frac{8}{\pi}k^2\int_0^\infty x^2\exp(-k^2x^2)[\int_0^x \exp(-k^2z^2)dz]dx = \frac{1+2\pi}{2k^2}. \quad (4)$$

4) Наблюдения подразделены в группы по три. Требуется определить среднее значение той же ошибки (с. 201 – 202). Здесь

$$\mathrm{E}\xi^2 = \frac{1+2\sqrt{3}/\pi}{2k^2}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) Бертран опубликовал без доказательства ранее [16].

5) Определить среднее значение наименьшей по абсолютной величине погрешности в группе из n (с. 216 – 217). Здесь

$$\mathrm{E}|\xi| = \frac{2kn}{\sqrt{\pi}}x\exp(-k^2x^2)[1-\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-k^2z^2)dz]^{n-1}dx.$$

Обозначим

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-k^2z^2)dz = \theta(x),$$

тогда

$$\mathrm{E}|\xi| = n\int_0^\infty x[1-\theta(x)]^{n-1}d\theta x = \int_0^\infty [1-\theta(x)]^n dx.$$

Для малых значений z

$$\theta(z) = kz, \quad (6)$$

а подынтегральная функция становится пренебрегаемой при больших значениях x и поэтому

$$\mathrm{E}|\xi| = \frac{1}{k(n+1)}.$$

Погрешность этого выражения Бертран не оценил, а приближение (6) было ошибочно: правая часть должна была бы равняться $2kz/\sqrt{\pi}$ и

$$\mathrm{E}|\xi| = \frac{\sqrt{\pi}}{2k(n+1)}.$$

Аналогичное исследование (и та же ошибка) содержится в прежней статье Бертрана [26]. Борткевич (1922, с. 198 – 201) описал его работу по порядковым статистикам, но не обратил внимания на приближённые вычисления в задаче № 5 и потому не поправил его.

8. Юриспруденция

Бертран (с. 319) отрицал значимость работ Кондорсе и продолжал:

Лаплас отвергнул результаты Кондорсе, Пуассон не принял достигнутого Лапласом, притом ни тот, ни другой не исследовали существенно упущенного, а именно шансов ошибок разума […] *в условиях плохо известных фактов и недостаточно определённых прав*.

Курно также оказался виновным: он будто бы предположил, что судьи выносят решения независимо друг от друга [2, с. 325 – 326]. На самом деле Лаплас и Пуассон не могли не понимать, что полное исследование этой темы вряд ли было возможно, но в любом случае Лаплас (1816, с. 523) предположил независимость юридических решений, а Курно (1843, § 206) кроме того обсуждал возможность выявления зависимости между подобными решениями. В § 129 он даже предложил критерий их независимости, и этому же вопросу посвятил особую статью (1838). В § 221 он кратко и чётко описал преимущества, достигаемые приложением статистики в юриспруденции, выступив против таких учёных как Пуансо, Коши и Пуанкаре; о мнении последнего см. [i, § 6].

Бертран не предложил ничего положительного и закончил свою соответствующую главу цитированием Милля [i, § 6], который заявил, что подобные приложения позорят математику. Впервые он упомянул Милля в статье [24, с. 638]. В обоих случаях Бертран назвал редкое английское слово *opprobrium* Милля *скандалом*, хотя *позор* было бы правильнее. Главу о юриспруденции он опубликовал и отдельно [35].

И всё-таки Бертран (с. XLIII) высказался и несколько иначе: обвинение Милля было *несправедливым*, потому что все три предшествовавшие французские учёные довольствовались приближёнными результатами. Возможно, что своё длинное Предисловие (Préface, 50 с.) Бертран написал после составления основного текста трактата.

Стохастические исследования в юриспруденции недавно возобновились [i, § 6].

9. Законы статистики

Бертран (с. 307 – 311) заметил, что статистика населения имела дело с переменными вероятностями, так что не всегда можно было воспользоваться испытаниями Бернулли. Другим осложнением была зависимость между событиями, но в этой связи он упомянул только метеорологию, хотя мог бы указать, что, например, общие условия жизни влияют на смертность существенной части населения данной страны.

На с. 310 – 314 он привёл соответствующие урновые схемы.

1) Дано n урн с белыми и чёрными шарами в каждой, а вероятности извлечения из них белого шара равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Из каждой урны извлекают s шаров с возвращением.

2) Имеется только одна урна, из которой извлекают, также с возвращением, sn шаров, причём вероятность появления белого шара равна средней из указанных выше. Количества появившихся белых шаров в этих случаях будут

$$sp_1 + z_1;\ sp_2 + z_2;\ \ldots;\ sp_n + z_n \text{ и } sp + z.$$

Их ожидаемые количества должны совпадать, а потому

$$\mathrm{E}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = \mathrm{E}z.$$

И всё же рассмотренные варианты неравнозначны, так как

$$Ez^2 = snp(1-p),\ E\sum z_i^2 = s\sum p_i(1-p_i).$$

$$Ez^2 - E\sum z_i^2 = \frac{s}{n}\sum_{i\neq j}(p_i - p_j)^2 > 0.$$

На с. XXIX – XXX и, слишком кратко, в статье [33, с. 1312], Бертран упомянул в этой связи Dormoy и *коэффициент дисперсии*. Dormoy (1874; 1878) и Лексис создали так называемую теорию дисперсии, которая изучала устойчивость статистических рядов испытаний Бернулли, т. е. изменчивость успехов в них. Впрочем, французские статистики не участвовали в этих исследованиях и Dormoy не был замечен (отыскал его Лексис), а впоследствии Борткевич (1930) заявил, что его достижения были мало значимы. Во всяком случае, Бертрану следовало упомянуть Лексиса.

Далее Бертран обратился к законам смертности, предложенным несколькими авторами. Эту особую тему мы оставляем в стороне, тем более, что универсальные законы смертности давно уже не признаются. В статье [29] Бертран описал эту тему несколько иначе. Более подробно о ней см. Czuber (1903/1968, с. 276 – 278).

10. Нормальный закон и метод наименьших квадратов

Бертран рассмотрел два вывода нормального закона. Вначале он (с. 29 – 31) описал тот, который обычно приписывается Максвеллу, но восходит к Эдрейну (1809), и справедливо заметил, что он существенно зависит от (как правило, не существующей) независимости ошибок. То же замечание сделал Ellis (1850).

Далее Бертран (с. 180 – 181) перешёл к выводу Гаусса 1809 г. Он не был удовлетворён *постулатом* среднего арифметического (как он сам, на с. 176, назвал соответствующее утверждение Гаусса), потому что средние из наблюдений не всегда соответствовали среднему из их функций. Это возражение было ничтожным, так как Гаусс интересовался только первыми. Кроме того, Бертран (с. 177) возражал против принципа наибольшего правдоподобия, от которого сам Гаусс в 1823 г. отказался, так что

Бертран, как оказывается, забыл свой собственный перевод Гаусса 1855 г.

В третьих, Бертран (с. 177) утверждал, что плотность распределения ошибок наблюдения должна быть принята не в форме φ(Δ), как у Гаусса, а в виде φ(Δ, *X*), где *X* – измеряемая константа. Мы поняли, что он считал, что погрешность отсчёта по прибору, которая является составляющей величины Δ, зависела от расстояния между *X* и ближайшим оцифрованным делением лимба. Это сомнительно, и, кроме того, можно было бы перечислить ещё несколько обстоятельств. Бертран (с. 180) заключил:

Теорема [видимо, вывод нормального распределения по Гауссу (1809)], *как представляется, подтверждёна, но фактически в нёй допущен изъян; формула* […] *является лишь приближённой*.

Статья [23] содержала два последних довода Бертрана. В ней он верно (но снова без всякой надобности) применил формулу (6.8) из [iv]. Заканчивалась она утверждением, которое в иной форме перешло в трактат (с. 247):

Я не считаю себя дерзким за то, что это существенное возражение [последнее] *оказалось поводом для его* [Гаусса] *многократно повторенных усилий* [?] *заменить первоначально установленную теорию новой*.

Соответствующие утверждения самого Гаусса, видимо, не следовало брать в расчёт … Также в трактате, Бертран (с. XXXIV) указал, что Гаусс в 1809 г. намеревался *вовсе* […] *не установить истину, а отыскать её*. В чём же здесь различие? Дополнительным доводом против вывода Гаусса он [20; 2, с. 181 – 183] почему-то считал то, что принцип наибольшего правдоподобия не приводит ни к среднему геометрическому ошибок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ни к величине $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/n}$. Почти всё это свидетельствует лишь о крайне поверхностном отношении автора к данной теме.

Далее Бертран (с. 248) заявил, что в 1823 г. Гаусс *строго* решил свою задачу, что (с. 268) новая теория *представляется предпочтительнее*, но в то же время (с. 267) ему *было странно*, что плотность распределения ошибок наблюдения *не влияла на выводы теории, в которой она играла столь важную роль*. Иными словами, он сам себя опровергнул. Впрочем, он тут же, и в статье [30], разумно указал, что для небольших погрешностей чётная плотность может быть представлена в виде

$$\psi(x) = a + bx^2 = a\exp(\frac{bx^2}{a}),$$

т. е. что первое обоснование Гаусса приближённо оправдано.

11. Точность и вес наблюдений

Бертран (с. 208) ввёл эти понятия, полагая, что ошибки наблюдения следуют нормальному распределению (7.1). Следуя за Гауссом (1823, § 7), он назвал k точностью, а k^2 – весом наблюдения. Понятие веса он (с. 254 – 257) обобщил на иные плотности.

Пусть X – несмещённая линейная оценка истинного значения константы и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результаты её наблюдения:

$$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Требуется определить коэффициенты λ_i, приводящие к наименьшей дисперсии X, т. е. веса x_i. Впрочем, Бертран заметил, что в общем случае точность нельзя определить *так же строго*. Гаусс (1823, § 7) подобного различия не сделал, но ни он, ни Бертран не применили *точности* существенным образом.

Бертран (с. 208 – 211) предложил и иные определения:

1) Если для ошибок наблюдения δ и Δ

$$P(x \le \delta \le x + dx) = P[\alpha x \le \Delta \le \alpha(x + dx)],$$

то первое наблюдение в α раз точнее второго.

2) Даны два ряда наблюдений, I и II. Если m наблюдений из ряда I приводят к тем же выводам, что и n – из ряда II, то эти наблюдения можно считать эквивалентными.

Бертран далее выделил законы плотностей, при которых имеют место эти два определения,

$$\psi(x) = C\exp(-ax^{2n}),$$

но признал, что *для исчисления вероятностей* его доказательство *не было интересно*. Действительно, подобные плотности нашли применение в основном только при $n = 1/2$ и 1.

Некоторые утверждения Бертрана можно понять так, что точность ошибочно определяется лишь показательной функцией без учёта её коэффициента. Прежняя статья автора [15] не отличалась существенно от рассмотренного выше.

12. Оценка точности наблюдений

Бертран неизменно считал нормальный закон (7.1) плотностью распределения ошибок наблюдения[10] и обращал особое внимание на оценку его параметра k (см. § 11). Он (с. 190) вычислил первые четыре абсолютных моментов функции (7.1) и, фактически повторив Гаусса (1816, § 5), приравнял их соответствующим эмпирическим суммам. Так, для первых двух моментов и погрешностей e_i он получил

$$\frac{S_1}{n} = \frac{|e_1| + |e_2| + \ldots + |e_n|}{n} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}},\quad \frac{S_2}{n} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}{n} = \frac{1}{2k^2}. \quad (1, 2)$$

Затем Бертран (с. 191 – 194) вывел формулы

$$\mathrm{E}\left(\frac{S_1}{n}-\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\right)^2=\frac{1}{2nk^2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=\mathrm{var}\left(\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\right)^2, \qquad (3)$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{S_2}{n}-\frac{1}{2k^2}\right)^2=\frac{1}{2nk^4}=\mathrm{var}\left(\frac{1}{2k^2}\right)^2. \qquad (4)$$

Значения λ, приводящие к минимуму величины[11]

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{k}-\lambda\frac{S_1}{n}\right)^2 \text{ и } \mathrm{E}\left(\frac{1}{k^2}-\lambda\frac{S_2}{n}\right)^2, \qquad (5a, b)$$

оказались равными (с. 194 – 195)

$$\lambda=\frac{2\sqrt{\pi}}{2+(\pi-2)/n},\ \lambda=\frac{2n}{n+2}, \qquad (6a, b)$$

тогда как формулы (3) и (4) соответствовали значениям $\lambda = \sqrt{\pi}$ и $\lambda = 2$ соответственно.

Формулы Бертрана определяли смещённые оценки. Такова формула (2), которая впервые появилась у Лапласа (1816), хотя лишь для нормального распределения, и относилась к остаточным свободным членам, а не к погрешностям, Гаусс же [iv, § 6.7] не называя его по имени, справедливо посчитал её неточной.

Бертран (с. 195 – 198) предложил и иной способ оценки точности. Он заметил, что вероятнейшее значение k соответствовало условию

$$Ck^2\exp(-k^2[ee]) = \max,$$

что приводило к формуле (2), но затем Бертран (с. 196) заключил, что *в общем случае следует предпочитать вероятное* (ожидаемое) *значение*. Соответственно, он вычислил

$$\mathrm{E}k = C\int_0^\infty k^{n+1}\exp(-k^2[ee])dk.$$

Использовав неточное приближение для гамма-функции, и предполагая большое значение n, он получил

$$Ek=\frac{\sqrt{2S_2}}{\sqrt{n}},$$

заявляя, что это соответствует формуле (2). Без всяких вычислений Бертран [22] ранее опубликовал

1) Оптимальные значения λ для выражений (5a, b). Первое из них отличалось от полученного здесь числа (6a).

2) Вероятнейшее значение k.

3) Ek, снова отличное от числа, определяемого формулой (7), и три формулы для $1/2k^2$, а именно (2), её вариант, соответствующий выражениям (5b) и (6b), и, наконец, без объяснений, ещё одну формулу.

13. Выборочная дисперсия (Гаусс)

Бертран (с. 203 – 206) вывел формулу Гаусса

$$m = \left(\frac{1}{k\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{[vv]}{\pi - \rho}}, \qquad (1)$$

хотя только для нормального распределения. Не упомянув этого результата, он (с. 298 – 302) повторил доказательство Guyou (1888) для общего случая. Наконец, Бертран (с. 251 – 252) оценил погрешность формулы (1), сформулировав эту задачу как вывод *вероятного значения константы* (!) m^2. Для ошибок e_i, как он показал,

$$\mathrm{E}(m^2 - [ee]/n)^2 = \frac{h_4 - m^4}{n}, \qquad (2)$$

где h_4 было четвёртым моментом рассматриваемой плотности распределения. У Гаусса (1823, § 40), который обсуждал остаточные свободные члены v_i, было

$$\operatorname{var} m^2 = \frac{2m^4}{\pi - \rho}. \qquad (3)$$

В соответствии с современными идеями, формулы (2) и (3) следовало видоизменить, заменив m^4 неизвестным $(\mathrm{E}e_i^2)^2$. Действительно, $\mathrm{E}m^2 = \mathrm{E}e_i^2$, но $m^2 \neq \mathrm{E}e_i^2$.

Крамер вывел более точную формулу [iv, § 6.7]. О других результатах Гаусса и о работах последующих учёных см. там же. Далее, в 1908 г. Стьюдент (Hald 1998, § 27.5) отыскал для нормального закона распределение величины $m^2 = [ee]/n$ и указал, что при нём среднее арифметическое и m независимы, но лишь Фишер доказал это, см. также § 17.

14. Критика формулы Гаусса

Бертран возражал против формулы Гаусса (13.1). Мы представим его соображения в более методическом виде.

1) Он заметил, что систематические ошибки (почему-то обычно называя их постоянными) исключают возможность оценки точности. На важных исторических примерах он (с. XL – XLI и 304 – 305) показал, что астрономы подчас переоценивали свои наблюдения. Сам Бертран (с. 238), описывая стрельбу по мишени, отказался решить, важнее ли общее уклонение попаданий от её центра или мера их рассеивания, Гаусс (1823, § 2) же чётко

указал, что его исследование не учитывало систематических ошибок.

Сославшись на известное утверждение Лапласа (1814/1999, с. 844, правый столбец) об установлении массы Юпитера с малой относительной ошибкой, он (с. XXXIX) назвал его *хвастовством*. Возможно, впрочем, что Лаплас оговорился: он указал, что новые наблюдения, рассмотренные аналогичным образом, не поколеблют его оценку. Подытоживая свои мысли, Бертран (с. 304) заявил, что проводимая оценка точности системы наблюдений *неоднократно компрометировала метод наименьших квадратов*.

2) Веса измерений обычно отличны друг от друга. Априорно полагают их одинаковыми, но в большинстве случаев этому верить нельзя, и вызывается это предположение тем, что для предпочтений нельзя указать никакой причины (Бертран, с. 304). Тем не менее, коль скоро различия существуют, *они должны оказывать влияние на реально допущенную погрешность*.

3) Уклонения от среднего недостаточно чувствительны, более важны априорные сведения (Бертран, с. 221 – 222, 274 – 277, 295, 303 – 306).Так (с. 306), он заявил, что количественная оценка уверенности результатов по уклонениям (иначе: по *внутренней сходимости*) *безрассудна*. Однако, она становится гораздо надёжнее после учёта всех наблюдений; в триангуляции, после учёта замыканий треугольников и базисного и азимутального условий [iv, § 6.11]. Сам Бертран, см. конец нашего § 1.2, описал, сам того не зная, одно из практических действий Гаусса, а в статье [27, с. 887] он ошибочно обвинил Гаусса и Бесселя в формальной оценке точности.

4) Формулу Гаусса [iv, 6.8] оценки точности можно улучшить, заявил Бертран [32]; в трактате [2, с. 281 – 282] он сказал об этом гораздо меньше. На простом примере (который, однако, трудно воспринимается без чертежа) Бертран показал, что можно отыскать оценку для выборочной дисперсии с меньшей дисперсией, чем у той же меры по Гауссу. Его оценка была, однако, смещена, а в своих вычислениях он напрасно не применил результатов Гаусса, относящихся к нормальному распределению и даже своих собственных формул (13.2 и 13.3). В предшествовавшей статье Бертран [31], не приведя никаких вычислений заявил, что Гаусс

Выразил всего лишь правдоподобные суждения точными формулами […], *он превратил весьма мало обоснованные условия в теоремы, ставшие классическими*.

Правдоподобные, но мало обоснованные … Математики, никогда не занимавшиеся практической астрономией или геодезией, все как один осуждали Гаусса за будто бы допущенные им необоснованные выводы [iv, § 6.12]. Никто из них не удосужился прочесть его слова (1823, § 6):

Интересующий нас вопрос по самой своей природе содержит в себе нечто неопределённое, что может быть ограничено известными пределами и в некоторой степени произвольными правилами.

Эта же мысль сквозила в других работах Гаусса [iv, § 6.12]. Бертран [2, с. 206] привёл и особый, но вряд ли существенный довод. Принято считать, как он заметил, что среднее значение (ожидание) суммы произведений двух ошибок, δ_i и δ_j, равно нулю. Но при чётном числе наблюдений количество отрицательных произведений типа $\delta_i\delta_j$ вероятнее всего окажется равным $2n$, но только $n(n-1)$ – положительных.

5) *Приложение исчисления вероятностей к изучению ошибок наблюдений основано на вымысле* (Бертран, с. 222). Здесь и на с. 212, а также и ранее [25, с. 701], он имел в виду наличие систематических ошибок и возможность промахов. И всё же до сего времени ничего лучшего не придумано. Промахи, правда, выявляются, но теория ошибок остаётся весьма специальной дисциплиной.

15. Отбраковка уклоняющихся наблюдений

Бертран (с. 211) полагал, что уклоняющиеся наблюдения *почти наверняка* хуже остальных. Соответственно, он (с. 213) предложил критерий: следует отклонять любые наблюдения, отклоняющиеся от среднего более, чем на λ, которое определяется из соотношения

$$p = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} \exp(-k^2x^2)dx \qquad (1)$$

при произвольно выбранном p. Об установлении значения k Бертран ничего не сказал, а впервые этот критерий он предложил ранее [25].

Астрономы начали применять те или иные критерии отбраковки в середине XIX в., и наиболее известными стали так называемое правило трёх сигма и критерий Шовене (Chauvenet 1863, т. 2, с. 558 – 566), который[12] пришёл к той же формуле (1) при $p = 1/2n$. Но сам Бертран занимал двойственную позицию: наряду со своим критерием он (с. XXXVIII) заявил, что отклонять свидетельство *доказанной формулы – почти то же, что отказывать человеку в праве на жизнь на основании подлинного акта о его смерти*. Более того, он (с. 395) указал, что

Наблюдения – это свидетельства, и если они до испытаний [?] *признаются достойными доверия, любое их утверждение должно быть сохранено.*

Мы предпочитаем точку зрения Гаусса [iv, § 6.10.3] хотя бы потому, что наблюдения вряд ли точно подчиняются нормальному закону.

16. Уравнивание на станции

Бертран (с. 264 – 265) стремился показать, как следует оценивать точность наблюдений, проведенных на данном пункте триангуляции. Он использовал тот же пример, что и в § 14-4, т. е. измерение углов во всех комбинациях. Его метод уравнивания не соответствовал практике и не имел никакого практического значения. Он, правда, заметил, что оценивать вес неизвестных можно до наблюдений, но это указал уже Гаусс (1823, § 21).

17. Подход к важной теореме математической статистики

Пытаясь доказать, что эмпирическая дисперсия не является подходящей мерой оценки точности, Бертран (§ 14) дважды рассматривал распределения, связанные с суммой квадратов ошибок.

1) Обозначим ошибки наблюдений через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, введём величины

$$y_1 = x_n - x_1,\ y_2 = x_n - x_2,\ \ldots,\ y_{n-1} = x_n - x_{n-1},$$

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \quad (1)$$

и представим плотность распределения этих ошибок в виде [27]

$$\frac{k^n}{\pi^{n/2}}\exp(-k^2\rho^2)dx_1dx_2\ldots dx_n = \frac{k^n}{\pi^{n/2}}\exp(-k^2\rho^2)\frac{\rho d\rho dy_1dy_2\ldots dy_{n-1}}{\sqrt{n\rho^2-\Delta^2}}, \quad (2)$$

$$\Delta^2 = \sum(x_i - x_j)^2,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i < j,\ n\rho^2 - \Delta^2 = n^2\bar{x}^2. \quad (3a, b)$$

Мы проверили преобразование, приводящее к формуле (2), подсчитав якобиан $\partial(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \rho)/\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Взаимнооднозначное соответствие между указанными двумя множествами переменных может быть достигнуто, если полагать, что x_n принимает только одно из двух своих возможных значений, и соответствующее ограничение присоединить к (1).

Далее Бертран выписал

$$\mathrm{E}\rho = \int_\alpha^\infty \frac{\rho^2\exp(-k^2\rho^2)d\rho}{\sqrt{n\rho^2-\Delta^2}} \div \int_\alpha^\infty \frac{\rho\exp(-k^2\rho^2)d\rho}{\sqrt{n\rho^2-\Delta^2}},\ \alpha = \Delta/\sqrt{n}, \quad (4)$$

но назвал полученное выражение вероятным значением ρ^2. Из (3b) следует

$$\mathrm{E}\bar{x}^2 = \frac{\mathrm{E}\rho^2}{n} - \frac{\mathrm{E}\Delta^2}{n^2}$$

и Бертран заметил, что при $\Delta = 0$

$$\mathrm{E}\overline{x}^2 = \frac{1}{2nk^2}. \qquad (5)$$

Но Бертран выше написал Eρ вместо Eρ^2 и приравнял EΔ^2 и Δ^2. Он, далее, приложил аналитическое доказательство (Rouché 1888a) того, что для любого Δ

$$\frac{\mathrm{E}\rho^2}{n} - \frac{\Delta^2}{n} = \frac{1}{2nk^2},$$

или, иначе, что (5) не зависит от разностей $|x_i - x_j|$. Rouché фактически доказал, что

$$\mathrm{E}\overline{x}^2 = \frac{1}{2nk^2} + \frac{\Delta^2 - \mathrm{E}\Delta^2}{n^2}.$$

Бертран (с. 891) посчитал, что этот результат противоречит афоризму Лапласа (1814/1999, с. 963, правый столбец) о том, что *теория вероятностей есть ни что иное, как здравый смысл, приведенный к формулам* [точнее, *к исчислению*]. Этот афоризм, хоть его и цитировали тысячи раз, неудачен: в то время почти всю математику можно было бы характеризовать тем же образом.

Выше, Бертран близко подошёл к доказательству взаимной независимости среднего арифметического и средней квадратической ошибки в случае нормального распределения, хотя Лаплас (1816), см. Шейнин (1977a, с. 36), и Гельмерт в 1876 г. (Шейнин 1995, § 11.3) предвосхитили его. Впрочем, его усилия не относились непосредственно к геодезии, в которой в конце XIX в. погрешность измеренного угла вряд ли превышала $1' = 2.9\cdot10^{-4}$, так что в цепи треугольников (n = 30, к примеру) $\rho \le 1.6\cdot10^{-3}$, – сравните это значение с верхним пределом интеграла в (4)!

2) В статье [28] Бертран исследовал ту же тему, но принял n = 3 (случай треугольника). Своей предшествовавшей статьи он не упомянул и не повторил ошибочной записи Eρ вместо Eρ^2.

Пусть $x_1 + x_2 + x_3 = w$. Плотность распределения ρ теперь равна

$$C\rho\exp(-k^2\rho^2)d\rho, \qquad (6)$$

где константа определяется приравниванием 1 интеграла от этой функции в пределах от $w/\sqrt{3}$ до ∞:

$$C = 2k^2\exp(-k^2w^2/3),$$

$$E\rho^2 = 2k^2\exp(k^2w^2/3)\int_{w/\sqrt{3}}^{\infty}\rho^3\exp(-k^2\rho^2)d\rho = w^2/3 + 1/k^2. \qquad (7)$$

И вот его заключение: если ввести в углы поправку $-w/3$, то ρ^2 заменится на $(\rho^2 - w^2/3)$ и $\mathrm{E}(\rho^2 - w^2/3) = 1/k^2$.

Можно было бы вычислить $E\rho^2$ заново: если $w = 0$, то и константа C в выражении (6) и $E\rho^2$, см. формулу (7), определятся интегрированием от 0 до ∞. Результат не изменится, $C = 1/k^2$, но $E\rho^2 = 1/k^2$.

Бертран (с. 969 – 970) далее утверждал: *После введения поправки известная сумма трёх углов не изменит вероятного значения квадрата ошибки, если не считать малые невязки доказательством умения наблюдать.*

Смысл этой фразы не вполне ясен, а предварительное уравнивание треугольников – стандартная (не обязательная) процедура, но крупные невязки всё же недопустимы.

Бертран ошибочно заявил, что распределение (7.1) приводит к

$$Ex_1^2 = Ex_2^2 = Ex_3^2 = 1/3k^2.$$

Фактически, должно было быть $1/2k^2$ и $E\rho^2 = 3/2k^2$, хотя после уравнивания углов окажется, что $2/3E\rho^2 = 1/k^2$, притом Бертран [2, с. 262] сам заметил, что после уравнивания дисперсия наблюдённого угла умножается на то же число, 2/3.

18. Выводы

Как косвенно заявил сам Бертран (§ 1.2), он не пытался усовершенствовать теорию вероятностей. Но как отнеслись к его усилиям современники? Пуанкаре (1894/1910, с. 159) заявил, что Бертран всегда чувствовал

Какую-то особую склонность к теории вероятностей, несомненно в память её знаменитых основателей, в первую очередь Паскаля, и геометров XVIII в., к которым Вы [Бертран] *подходили с потаённой симпатией.*

Лаплас не упомянут! Но далее:

Тем не менее, Вы не могли разделять их наивную веру в созданный ими инструмент. Вы очень хорошо знали, что они смогли подчинить железным правилам исчисления то, что по существу столь неопределённо и мимолётно, лишь молчаливо накапливая гипотезы. Вы безжалостно разоблачали эти часто произвольные гипотезы и сами наносили мощные удары любимой Вами науке.

Кто же накапливал и т. д.? Lévy (1900, с. 71) утверждал, что сочинение Бертрана *остаётся шедевром*, а Darboux (1902, с. XLII – XLIII) заметил, что *Thermodynamique* Бертрана [1], его *Исчисление вероятностей* и лекции по математической теории электричества 1890 г. *следует считать венцом его исследований приложения математики к натуральной философии*. Если *Исчисление* – часть *венца*, то скверный же он был, тем более, что (Дарбу, с. XLIII – XLIV) теория ошибок была *объектом исследований всей его жизни*.

В то же время Дарбу (с. XLII – XLIII) вежливо указал, что эти сочинения не были *законченными трактатами*, что Бертран *отдалялся от разрабатываемых глав науки* и что его *Исчисление* преследовало методическую цель:

Лаплас ввёл наиболее возвышенные математические теории, а Бертран решительно отдалился от них, чтобы обратиться к наибольшему числу читателей.

Эту же цель преследовали некоторые авторы до Бертрана, в том числе Буняковский. Позже Дарбу (1916, с. XXXIV) вслед за Леви назвал трактат Бертрана *шедевром*, но, как и прежде, добавил щепотку соли: Бертран *ограничился критикой и разрушением*.

Нет, *Исчисление* вовсе не является шедевром. Бертран ошибочно отрицал бейесовский подход (§ 6) и даже статистическую вероятность (там же, п. 7); он рассматривал оценку точности наблюдений (§ 14) не обладая соответствующими знаниями и поверхностно критиковал формулу Гаусса; его обсуждение приложения теории вероятностей к юриспруденции (§ 8) было противоречиво. Книга в целом была методически плохо и небрежно (слишком поспешно) написана; Бейес, Пуассон, Чубышев, Гельмерт не упомянуты, и даже Лаплас и Пуассон почти отсутствуют. Представляется очевидным, что Бертран был увлечён и сбит с толку желанием критиковать всё и вся (а также и своим завидным литературным стилем).

И всё же мы не согласны с тем, что (Le Cam 1986, с. 81) *Бертран и Пуанкаре составили трактаты по теории вероятностей, которую ни тот, ни другой, видимо, не знали. Знал* эту науку в то время, пожалуй, лишь Марков, вообще же своё мнение о сочинении Пуанкаре мы (1991, с. 165) уже высказали, Бертран же оказался (напрасно!) его основным источником. И в принципе учёный может существенно продвинуть науку, даже не имея нужных знаний: Дарвин создал стохастическую гипотезу эволюции видов без знания теории вероятностей.

Далее, Le Cam не сказал, что в своё время книга Бертрана оказалась единственной, рассматривавшей почти всю теорию вероятностей, и, бывши ведущим французским математиком и непременным секретарём Парижской академии наук, он тем более привлёк внимание к этой науке. Думается, что он стимулировал не только Пуанкаре, но и Башелье и Бореля. Мы сказали *единственной*, потому что важное сочинение Мейера (Meyer 1874), хоть и переведенное на немецкий язык, вряд ли стало столь известной, да и содержание его было более узким.

Что же в активе Бертрана? Задача о баллотировке (§ 2); интересное применение производящей функции (§ 4.1); вывод нормального приближения гипергеометрического распределения (§ 4.2); теоремы о порядковых статистиках (§ 7); критическое замечание о втором обосновании принципа наименьших квадратов (§ 10); подход к теореме о независимости среднего арифметического и средней квадратической ошибки в нормальной выборке (§ 17); и, самое известное открытие, изящное доказательство того, что выражение *случайно* не является определённым [vii, § 2.6]. Наконец, Бертран перевёл на французский язык сочинения Гаусса по теории ошибок (но впоследствии забыл о них!).

Примечания

1. Известно, что по политическим причинам Гаусс отказывался публиковать свои сочинения по-французски, однако в конце жизни смягчил свою позицию, хотя лишь в отношении переводов. Но он несколько опоздал: позднее Бертран [6] заметил, что Гаусс, который умер в 1855 г., не успел проверить корректуру. Вот выдержка из Предисловия Бертрана к переводу: сочинения Гаусса

Не нуждаются ни в комментариях, ни в примечаниях. Вопросы приоритета, с которым связаны столь оживлённые дискуссии, обсуждаются кратко, но самым отчётливым и самым добросовестным образом. Я был поэтому обязан ограничиться ролью переводчика, т. е. единственно полезной и притом единственной, которую Гаусс разрешил мне взять на себя.

О комментариях и примечаниях Бертран серьёзно ошибся, а может быть просто хотел оградить себя от критики: они появляются до сего времени, а по поводу приоритетных споров см. [iv, § 2.2].

Немецкое и здание 1887 г. тех же работ Гаусса, как и русское издание 1957 г., дополнительно включают §§ 172 – 174 и 187 – 189 *Теории движения*, а также авторефераты Гаусса, которые, к сожалению, не привлекли к себе должного внимания.

2. Бертран (с. XVIII – XIX) был такого же мнения по поводу задач о двух случайных точках и о вероятности последующего восхода Солнца (§ 6). Курно (1843, §§ 232 – 239 и § 8 резюме) обсуждал события, чьи *философские вероятности* было трудно выразить численно и связал эту тему с трудностью подразделения события на обычные и примечательные. Брю (Курно 1843/1984, прим. на с. 355) сослался по этому поводу на нескольких авторов, включая Лапласа.

3. До конца XIX в. теорему Муавра – Лапласа действительно приписывали Бернулли (Pearson 1924). Муавр (1733/1956, с. 243) заявил, что обнаружил свою теорему не менее 12 лет назад (так он указал в исходном латинском тексте 1733 г.), но не стал её публиковать до тех пор, пока его *достойный и учёный друг* Стирлинг не сообщил ему значения константы в *формуле Стирлинга*, как она теперь называется.

Тодхантер (1865, с. 190 – 193) поверхностно описал результат Муавра, и, в частности, указал, что тот доказал свою теорему для случая $p = q = 1/2$. Он не заметил, ни что Муавр (1733/1756, с. 250, Следствие 10) заявил, что его теорема относится и к общему случаю, ни что этот факт косвенно заметен уже в названии мемуара, ни, наконец, что обобщить непосредственно рассмотренное автором мог бы любой математик. Тем не менее, Schneider (1988, с. 118) указал лишь этот частный случай.

Бертран упомянул Муавра уже в конце § 2, а ниже, в § 5, перенял метод Муавра решения задачи о разорении игрока.

4. Более правильно Бертран (с. 94) заметил, что закон, введенный Пуассоном, *лишён не только строгости, но и точности*.

5. Производящие функции Бертран (с. 244 – 245) применил и аналогично. Лаплас (1812/1886, с. 428 – 429) с их помощью определил $E\xi$ (современное обозначение) для биномиального распределения, а Чебышев (1880/1936, с. 172), – $E\xi$ и $E(\xi - E\xi)^2$.

6. Как и другие авторы, Бертран (с. 117) пренебрёг случаем, при котором игрок, хоть и не был разорён полностью, не смог бы уплатить возможный будущий проигрыш. Исключение составил Марков (1903), см. также Марков (1900/1924, с. 205 и след.). Мы не описываем его соображений, потому что задача Бертрана не имела особого смысла: достаточно было заменить pb на p_1, а qa – на q_1 и отказаться от введения a и b.

7. Знак производной от левой части уравнения (7) изменяется в точке $\lambda = 1$ и зависит от знака $(pb - qa)$, см. ограничения (5). Поэтому второй положительный корень этого уравнения либо больше, либо меньше 1. Случай $0 < \lambda < 1$ соответствует игре при $pb > qa$ и благоприятен игроку А, а противный случай, благоприятный для В, приводит к $\lambda_2 > 1$. Повторим, что после каждой игры А (В) выигрывет b (a) с вероятностью p (q). При $a = b = 1$ и $p > q$ уравнение (7) имеет корень $\lambda_2 = q/p < 1$.

8. Takacz (1982) утверждал, что Муавр (1712) опубликовал формулу (10) и что в 1773 г. Лаплас доказал её. Мы не можем подтвердить ни одного из этих высказываний. Takacz не повторил своего прежнего утверждения о том, что Муавр доказал формулу (1).

9. Гельмерт (1875, с. 355; 1876, с. 128 – 129) определял $\mathrm{E}|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ для независимых погрешностей, обладающих одним и тем же нормальным распределением с нулевым средним. Ему пришлось вычислять некоторые интегралы, и, во втором случае, вводить разрывный множитель Дирихле. Бертран, видимо, определял бы $\mathrm{E}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$ и без труда вычислил бы требуемую величину.

10. Бертран (с. 257 – 258) упомянул и распределение Коши (справедливо приписав его Пуассону) и отвергнул его как невозможное. Ранее он [12] кроме того назвал Бьенеме как аналогично рассуждавшего предшественника.

11. Для ошибок Δ, распределённых по нормальному закону (7.1),

$$\mathrm{E}|\Delta| = \frac{1}{k\sqrt{\pi}},\ \mathrm{E}\Delta^2 = \frac{1}{2k^2}.$$

Пусть теперь $z = |\Delta| - \mathrm{E}|\Delta|$. Тогда, как легко проверить,

$$\mathrm{E}z^2 = \frac{\pi - 2}{2\pi k^2},\ \mathrm{E}\,|\,z\,| = \frac{2}{k\sqrt{\pi}}[\theta(\frac{1}{\pi}) - 1 + e^{-1/\pi}],$$

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-x^2)dx.$$

Выписав эти формулы без вывода, Бертран [36] заметил, что

$$\frac{\mathrm{E}z^2}{(\mathrm{E}\,|\,z\,|)^2} \approx \frac{\mathrm{E}\Delta^2}{(\mathrm{E}\,|\,\Delta\,|)^2}.$$

Он, видимо, ошибочно не считал этот факт случайным, но пояснений не привёл.

12. Л. Н. Большев (1922 – 1978), в неопубликованной заметке, которую он дал нам, следующим образом оценивал уровень значимости критерия Шовене. По Шовене, ожидаемое число случайных переменных, удовлетворяющих условию $|\xi_i| > x$, равно

$$n\big(1 - \theta(x/\sigma)\big),\ \theta(x/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x/\sigma}\exp(-\frac{z^2}{2})dz,$$

причём σ считается известным. Соответственно, максимальное по абсолютной величине наблюдение ξ_i отклоняется, если

$$n\big(1 - \theta(\max|\xi_i|/\sigma)\big) > 1/2.$$

Но

$P(\max|\xi_i| > x) \le nP(|\xi_1| > x)$;

$$P(\max|\xi_i| > x) \ge nP(|\xi_1| > x) - \frac{n(n-1)}{2} P(|\xi_1|, |\xi_2| > x) \ge$$

$$\ge nP(|\xi_1 > x) - n^2[P(|\xi_1 > x)]^2, \; 1/4 \le [P(\max|\xi_i > x)] \le 1/2.$$

Библиография

J. Bertrand

Книги

1. *Thermodynamique*. Paris, 1887.

2. *Calcul des probabilités*. Paris, 1888, 1907. Нью-Йорк, 1970, 1972. Издание 1970 – перепечатка первого издания, но издатель постарался скрыть это.

3. *D'Alembert*. Paris, 1889.

4. *Pascal.* Paris, 1891.

5. *Eloges académiques.* Nouv. sér. Paris, 1902.

Статьи

За исключением [9] и [35] все они были опубликованы в *C. r. Acad. Sci. Paris*

6. Sur la méthode des moindres carrés; t. 40, 1855, pp. 1190 – 1192.

7. [Note relative au théorème de Bienaymé]; t. 81, 1875, pp. 458, 491 – 492.

8. Sur la théorie des épreuves répétées; t. 94, 1882, pp. 185 – 186.

9. Les lois du hasard. *Rev deux mondes*, 15 Avr. 1884, p. 758.

10. Solution d'un problème; t. 105, 1887, p. 369.

11. Без названия, о продолжительности игры. Ibidem, pp. 437 – 439.

12. Note sur une loi singulière de probabilité des erreurs. Ibidem, pp. 779 – 780.

13. Sur un paradoxe analogue au problème de Saint-Pétersbourg. Ibidem, pp. 831 – 833.

14. Théorème relatif aux erreurs d'observation. Ibidem, pp. 1043 – 1044.

15. Sur ce qu'on nomme le poids et la précision d'une observation. Ibidem, pp. 1099 – 1102.

16. Sur la loi des erreurs d'observation. Ibidem, pp. 1147 – 1148.

17. Sur les épreuves répétées. Ibidem, pp. 1201 – 1203.

18. Sur l'association des électeurs par le sort; t. 106, 1888, pp. 17 – 19.

19. Démonstration du théorème précedent. Ibidem, pp. 49 – 51.

20. Sur la loi de probabilité des erreurs d'observation. Ibidem, pp. 153 – 156.

21. Probabilité du tir à la cible. Ibidem, pp. 232 – 234, 387 – 391, 521 – 522.

22. Sur la détermination de la précision d'un système de mesures. Ibidem, pp. 440 – 443.

23. Sur la rigueur d'une démonstration de Gauss. Ibidem, pp. 563 – 565.

24. Sur l'indétermination d'un problème résolu par Poisson. Ibidem, pp. 636 – 638.

25. Sur la combinaison des mesures d'un même grandeur. Ibidem, pp. 701 – 704.

26. Sur la valeur probable des erreurs les plus petites dans une série d'observations. Ibidem, pp. 786 – 788.

27. Sur l'évaluation a posteriori de la confiance méritée par la moyenne d'une série de mesures. Ibidem, pp. 887 – 891.

28. Sur l'erreur à craindre dans l'évaluation des trois angles d'un triangle. Ibidem, pp. 967 – 970.

29. Sur les lois de mortalité de Gompertz et de Makeham. Ibidem, pp. 1042 – 1043.

30. Sur la méthode des moindres carrés. Ibidem, pp. 1115 – 1117.

31. Sur la précision d'un système de mesures. Ibidem, pp. 1195 – 1198.

32. Sur les conséquences de l'égalité acceptée entre la valeur vraie d'un polynôme et sa valeur moyenne. Ibidem, pp. 1259 – 1263.

33. Note sur l'introduction des probabilités moyennes dans l'interprétation des résultats de la statistique. Ibidem, pp. 1311 – 1313.

34. Note sur le tir à la cible; t. 107, 1888, pp. 205 – 207.

35. Sur l'application du calcul des probabilités à la théorie des jugements. *Mém. Soc. philom. Paris à l'occasion centenaire de sa fondation 1788 – 1888*, pp. 69 – 75.

36. Note sur un théorème du calcul des probabilités; t. 114, 1892, pp. 701 – 703.

Рецензии

37. Laplace (1812/1886). *J. des savants*, Nov. 1887, pp. 686 – 705.

38. C. Lallemand, *Nivellements de haute précision*. Paris, 1889. Ibidem, Avr. 1895, pp. 205 – 213.

Прочие авторы

Сокращения

AHES = *Arch. Hist. Ex. Sci.*

C. r. = *C. r. Acad. Sci. Paris*

OC = *Oeuvr. Compl.*

Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения и т. д. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.

--- (1823, латин.), Теория комбинаций наблюдений. Там же, с. 17 – 57.

--- (1855), *Méthode des moindres carrés*. Paris.

--- (1957), *Избр. геодезич. соч.*, т. 1. М.

Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970. Второе франц. издание: Париж, 1984.

Лаплас П. С. (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. В кн. Прохоров (1999, с. 834 – 863).

Марков А. А. (1900). *Исчисление вероятностей*. Последующие издания: 1908, 1913 и посмертное, М., 1924.

.--- (1903), К вопросу о разорении игроков. *Изв. Физ.-мат. общ. при Казанск. унив.*, 2-я сер., т. 13, № 1, с. 38 – 45.

Милль Дж. С. (1843, англ.), *Система логики*. СПБ, 1914. Перевод изд. 1879 г.

Никулин М. С. (1999), Случайная ошибка. В книге Прохоров (1999, с. 587).

Прохоров Ю.В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М.

Пуанкаре А. (1896, франц.), *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.

Феллер В. (1950, англ.), *Введение в теорию вероятностей и её приложения*, т. 1. М., 1964. Перевод издания 1957 г.

Чебышев П. Л. (1846, франц.), Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей. *Полн. собр. соч.*, т. 2. М. – Л., 1947, с. 14 – 22.

--- (1867), О средних величинах. Там же, с. 431 – 437.

--- (1879 – 1880, лекции), *Теория вероятностей*. М., 1936.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1973), Finite random sums. AHES, vol. 9, pp. 275 – 305.

--- (1976), Laplace's work on probability. AHES, vol. 16, pp. 137 – 187.

--- (1977a), Laplace's theory of errors. AHES, vol. 17, pp. 1 – 61.

--- (1977b), Early history of the theory of probability. Ibidem, pp. 201 – 259.

--- (1978), Poisson's work in probability. AHES, vol. 18, pp. 245 – 300.

--- (1991), Poincaré's work in probability. AHES, vol. 42, pp. 137 – 172.

--- (1995), Helmert's work in the theory of errors. AHES, vol. 49, pp. 73 – 104.

--- (2007), К истории теоремы Бейеса. *Историко-математич. исследования*, вып. 12 (47), с. 312 – 320.

Шейнин О. Б., Майстров Л. Е. (1972), Теория вероятностей. Глава в кн. *История математики с древнейших времён до начала XIX века*, т. 3. Ред., А. П. Юшкевич. М., с. 126 – 152.

Aaronson J. (1978), Sur le jeu de Saint-Pétersbourg. *C. r.*, t. A286, pp. 839 – 842.

Adrain R. (1809), Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations. In Stigler S. M. (1980), *American Contributions to Math. Statistics in the 19th Century*, vol. 1. New York. Separate paging.

André D. (1887), Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. *C. r.*, t. 105, pp. 436 – 437.

Anonymous (1902), Liste de travaux de J. Bertrand [5, pp. 387 – 399].

Barbier E. (1860), Le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. *J. math. pures et appl.*, t. 5, pp. 273 – 286.

--- (1887), Généralisation du problème résolu par J. Bertrand. *C. r.*, t. 105, p. 435.
Bayes T. (1764 – 1765), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. First part reprinted: *Biometrika*, vol. 45, 1970, pp. 293 – 315 and E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 131 – 153). Second part: *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 54, pp. 296 – 325.
Bortkiewicz L. von (1922), Die Variationsbreite beim Gausschen Fehlergesetz. *Nord. stat. tidskr.*, t. 1, pp. 11 – 38, 193 – 220.
--- (1930), Lexis und Dormoy. *Nord. Stat. J.*, vol. 2, pp. 37 – 54.
Chauvenet W. (1863), *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vols 1 – 2. New York, 1960.
Condorcet M. J. A. N. Caritat de (1847), Eloge de Pascal. *Oeuvr.*, t. 3. Stuttgart – Bad Cannstatt, 1968, pp. 567 – 634. Date of contribution not provided.
Cournot A. A. (1838), Sur l'applications du calcul des chances à la statistique judiciaire. *J. math. pures et appl.*, sér. 1, t. 3, pp. 257 – 334.
Czuber E. (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Bd. 1. New York. 1968.
Darboux G. (1902), Eloge historique de J. L. F. Bertrand [5, pp. VII – LI].
--- (1916), Eloge historique d'Henri Poincaré. In Poincaré H. *Oeuvr.*, t. 2, pp. VII – LXXI.
De Moivre A. (1712), De mensura sortis or the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 229 – 262.
--- (1718), *The Doctrine of Chances*. London, 1738; 1756, reprint New York, 1967.
--- (1725), *Annuities on Lives*. In De Moivre (1756, pp. 261 – 328).
--- (1733, in Latin), A method of approximating the sum of the binomial $(a + b)^n$ etc. Ibidem, pp. 243 – 254.
Dormoy E. (1874), Théorie mathématique des assurances sur la vie. *J. des actuares française*, t. 3, pp. 283 – 299, 432 – 461.
--- (1878), То же название, t. 1. Paris. Включает статью 1874 г.
Dutka J. (1988), On the St. Petersburg paradox. AHES, vol. 39, pp. 13 – 39.
Ellis R. L. (1850), Remarks on an alleged proof of the method of least squares. *Phil. Mag.*, vol. 37. Also in author's *Math. and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 53 – 61.
Freudenthal H. (1951), Das Petersburger Problem in Hinblick auf Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Nachr.*, Bd. 4, pp. 184 – 192.
Gower B. (1982), Astronomy and probability: Forbes versus Michell etc. *Annals of Sci.*, vol. 39, pp. 145 – 160.
Guyou E. (1888), Note relative à l'expression de l'erreur probable d'une système d'obervations. *C. r.*, t. 106, pp. 1282 – 1285.
Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.
--- (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.
Hamel J. (1984), *Bessel*. Leipzig.
Helmert F. R. (1875), Über die Formeln für den Durchschnittsfehler. *Astron. Nachr.*, Bd. 85, pp. 353 – 366.
--- (1876), Genauigkeit der Formel von Peters. Ibidem, Bd. 88, pp. 113 – 132.
Heyde C. C., Seneta E. (1977), *I. J. Bienaymé*. New York.
Jorland G. (1987), The St. Petersburg paradox. In *Probabilistic Revolution*, vol. 1. Cambridge (Mass.) – London, pp. 157 – 190.
Kohli K. (1975), Spieldauer. In Bernoulli J. *Werke*, Bd. 3. Basel, pp. 403 – 455.
Kotz S., Editor (1982 – 1989), *Enc. of Statistical Sciences*. Hobokan New Jersey, 2006.
Kruskal W. (1946), Helmert's distribution. *Amer. Math. Monthly*, vol. 53, pp. 435 – 438.
Kruskal W., Tanur J. M., Editors (1978), *Intern. Enc. of Statistics*, vols 1 – 2. New York.
Laplace P. S. (1812), *Théorie analytique des probabilités*, livre 2. OC, t. 7, No. 2. Paris, 1886, pp. 181 – 496.
--- (1816), Supplément 1 to Laplace (1812). Ibidem, pp. 497 – 530.
--- (1818), Supplément 2 to Laplace (1812). Ibidem, pp. 531 – 580.
Le Cam L. (1986), The central limit theorem around 1935. *Stat. Science*, vol. 1, pp. 78 – 96.

Lévy M. (1900), Funérailles de J. Bertrand. *Bull. Sci. Math.*, t. 24, pp. 69 – 75.
McCormmach R. (1968), Michell and H. Cavendish: weighing the stars. *Brit. J. Hist. Sci.*, vol. 4, pp. 126 – 155.
Meyer A. (1874), *Calcul des probabilités*. *Mém. Roy. Sci. Liège*, sér. 2, t. 4. Separate paging. German transl. by E. Czuber: *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig, 1879.
Pearson E. S., Kendall M. G., Editors (1970), *Studies in History of Statistics and Probability* [vol. 1]. London.
Pearson K. (1924), Historical note on the origin of the normal curve. *Biometrika*, vol. 16, pp. 402 – 404.
Poincaré H. (1894), Bertrand. Discours prononcé au jubilé de Bertrand. In author's *Savants et écrivains*. Paris, 1910, pp. 157 – 161.
Polya G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton. Пойа Д. (1957), *Математика и правдоподобные рассуждения.* М. В издании 1975 г. автор уже назван Полиа.
Poisson S. D. (1829), Sur la probabilité des résultats moyens des observations, pt 2. *Conn. des temps* pour 1832, pp. 3 – 22 второй пагинации.
--- (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements etc*. Paris. [Paris, 2003.]
Roberts H. V. (1978), Bayesian inference. In Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 9 – 16).
Rouché E. (1888a), Sur un problème relatif à la durée du jeu. *C. r.*, t. 106, pp. 47 – 49.
--- (1888b), Bertrand [2], review. *Nouv. annales math.*, sér. 3, t. 7, pp. 553 – 588.
Schneider I., Editor (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Darmstadt.
Seneta E. (1983), Modern probabilistic concepts in the work of E. Abbe and A. De Moivre. *Math. Scientist*, vol. 8, pp. 75 – 80.
Shafer G. (1988), The St. Petersburg paradox. In Kotz (1982 – 1989/2006, vol. 13, pp. 8318 – 8322).
Takacs L. (1967), *Combinatorial Methods in Theory of Stochastic Process*. New York.
--- (1969), On the classical ruin problems. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 64, pp. 889 – 906.
--- (1982), Ballot problems. In Kotz (1982 – 1989/2006, vol. 1, pp. 183 – 188).
Thatcher A. R. (1957), A note on the early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika,* vol. 44, pp. 515 – 518. Reprinted in E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 127 – 130).
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.
Zabell Sandy (1989), The rule of succession. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321.

VI

Истинное значение измеряемой константы и теория ошибок

The true value of a measured constant and the theory of errors.
Hist. Scientiarum, vol. 17, 2007, pp. 38 – 48

1. Введение

Понятие *истинное значение* было всегда связано с измерениями, и лишь математическая статистика почти изменила это положение. Впрочем, появилось оно, видимо, только в эпоху градусных измерений в конце XVII в. Наше второе понятие, *теория ошибок*, мы определяем как статистический метод (или сама статистика) в приложении к обработке наблюдений в экспериментальной науке. Её определение, принятое в математике (Никулин 1999), вводит в заблуждение, поскольку ограничивает её рассмотрением нормального распределения. Сам термин *теория ошибок* ввёл Ламберт в 1765 г. [iii, § 3.3].

2. Среднее арифметическое и истинное значение

Picard (1693/1729, с. 330, 335, 343) первым назвал среднее арифметическое *истинным* (*véritable*) значением (измеренного угла триангуляции). Следующим и более подробным автором был Ламберт. Вначале он (1760, § 286) заявил, что

Поскольку погрешности встречаются тем чаще, чем они меньше, в каждом данном случае повторных экспериментов более часто появляющиеся величины ближе расположены к среднему значению, или также к истинному значению.

В § 290 он добавил, что погрешность среднего арифметического намного меньше, чем у отдельного наблюдения и что поэтому среднее арифметическое ближе к истинному значению. Затем Ламберт (1765, § 3) убеждал, что ошибки наблюдения, говоря современным языком, обладают чётной плотностью распределения вероятностей:

Среднее большого числа экспериментов должно перемещаться тем ближе к истине, чем больше экспериментов повторено. Ибо, среди всех случаев, которые только можно представить себе, наиболее вероятен тот, при котором равные крупные отклонения в ту и другую сторону происходят одинаково часто.

Он, как и некоторые позднейшие авторы, см. ниже, молчаливо, но почти прямо предположил, что плотность одновершинна и не относится к плохим, типа распределения Коши, при котором одно наблюдение не хуже среднего. Но, конечно же, Ламберт ничего не обосновал. Только Симпсон в 1756 г. по существу доказал второе утверждение Ламберта, да и то лишь для двух распределений.

Стремление среднего к значению соответствующего теоретического параметра теперь называется свойством состоятельности, которое имеет место для линейных оценок вообще; впрочем, это замечание вряд ли имеет значение для нас.

Следующим автором был Лаплас. Он (1795/1912, с. 161) утверждал, что при неограниченном возрастании числа наблюдений их среднее стремится к определённому числу, так что

Если неограниченно увеличивать число наблюдений или экспериментов, их средний результат будет стремиться к постоянному члену. Поэтому, если взять по обе его стороны сколь угодно малый интервал, то вероятность, что средний результат окажется в нём, в конце концов будет отличаться от уверенности меньше любой назначенной величины. Этот член и есть сама истина, если только положительные и отрицательные ошибки равновероятны.

Лаплас (1810a/1898, с. 303) дословно повторил это высказывание, и примерно в то же время (1810b/1979, с. 110/272) сообщил то же самое чуть в иной форме: не *сама истина*, а *сливается с истиной*. А в своём *Опыте* (1814/1999, с. 843 правый столбец), первоначальным наброском которого были его *Лекции* 1795 г., мы находим: *Чем многочисленнее наблюдения, и чем менее они расходятся, тем ближе их результаты к истине*. Он добавил, что наилучшие средние результаты определяются при помощи теории вероятностей. Известно, что Лаплас усиленно пропагандировал МНКв и был одним из его создателей (создателем его практически почти не применимого варианта), так что здесь, обсуждая случай одного неизвестного, он, конечно же, имел в виду среднее арифметическое.

Гаусс (1809, § 177), в своём первом обосновании принципа наименьших квадратов, предположил, в частности, что среднее арифметическое является вероятнейшим значением искомой константы или близким к нему. Вслед за Лапласом Пуассон (1811, с. 136; 1824, с. 297; 1829, с. 12 и 19) применял термин *истинное значение* (*vraie valeur*) и по существу заявил, что это значение является средним из бесконечно большого количества измерений.

3. Определение

Формальное определение предложил Фурье (1826/1890, с. 533 – 534):

Предположим [...], *что собрано большое число наблюденных значений* [некоторой константы] *и что их сумма разделена на* [их] *число* [...], *что дало для среднего значения величину A; мы уже заметили, что почти то же самое значение A будет определено при применении очень большого числа других наблюдений. Вообще, если исключить особые и отвлеченные случаи, которые мы совсем не будем рассматривать, выведенное подобным образом среднее значение из громадного числа наблюдений нисколько не* *изменяется. Оно имеет определенную величину H, и можно сказать, что средний результат бесконечного числа наблюдений есть неизменное количество, в котором больше нет ничего случайного и которое имеет достоверное отношение к сути наблюденных событий. Именно эту неизменную величину H мы имеем в виду как истинный объект исследования.*

Мы не нашли ни единой ссылки на это высказывание; возможно, впрочем, что оно считалось очевидным. Многие авторы по сути повторяли его независимо и друг от друга, и, видимо, от Фурье: Гаусс, во всех своих сочинениях по обработке наблюдений; Пуанкаре (1896/1999, § 113, с. 145); Марков (1899/1951, с. 250); Whittaker & Robinson (1924/1958, с. 215 прим.); Колмогоров (1946, название § 7). И только Марков (1900/1924, с. 323) с присущей ему строгостью заметил, начиная свою главу о МНКв, что

Прежде всего необходимо допустить существование числа, приближённые величины которых доставляются наблюдениями.

Аналогичное замечание о неизвестной вероятности Марков привёл на с. 352; первое появилось во всяком случае в издании 1908 г., второе – в 1913 г.

Вероятность (см. выше) не существует в реальном мире, по крайней мере в обычном смысле, и это обобщение понятия истинного значения существенно для естествоиспытателей, хотя и не для чистого математика-Маркова. Гаусс (1816, §§ 3 и 4), который был и тем и другим, многократно рассматривал истинные значения меры точности наблюдений, см. также соответствующее высказывание Фишера и других авторов в нашем § 4.

Заметим нежелание Маркова выходить за пределы математики: он так и не упомянул истинного значения; напомним, что он не привёл ни одного примера приложения своих *цепей* в естествознании.

Определение Фурье эвристически напоминает знаменитое определение вероятности по Мизесу. Вот что последний (1919/1964, с. 40 и 46) заявил, во многом повторив своего предшественника (и самого себя):

Истинное среднее значение наблюдения (т. е. такое, которое должно появиться как среднее, если ряд наблюдений продолжать до бесконечности) […].

Истинное среднее значение является лишь величиной, которая должна появиться по определению понятия вероятности как *среднее арифметическое, когда серия извлечений продолжается до бесконечности*.

В 1919 г. соответствующие страницы были 80 и 87. Именно в указанном сочинении Мизес впервые ввёл свою частотную теорию. Иначе говоря, он ввёл *понятие вероятности* (Wahrscheinlichkeitsbegriff) как её частотное определение. Теперь, *извлечения*: пусть урна содержит белые и чёрные шары и *m* белых шаров и *n* чёрных было извлечено с возвращением по одному. Тогда, как утверждал Мизес, отношение *m/n* приближается к неизвестному соотношению белых и чёрных шаров. Он таким образом пояснил, но прямо не определил связи истинного значения и частотной вероятности.

Обратимся теперь к автору (Eisenhart 1963/1969, с. 30 – 31), обсуждавшему метрологию, важную научную дисциплину, которую вряд ли затрагивают статистики при их (редком) упоминании теории ошибок:

<u>Истинное значение</u> некоторой величины […] *– это предельное среднее в мыслимом <u>образцовом процессе</u>.* […] *Масса стандарта массы* […] *определяется* […] *как масса металлического содержания стандарта плюс масса среднего объёма воздуха, адсорбированного его поверхностью при стандартных условиях. Я надеюсь, что в теории и практике измерений традиционный термин <u>истинное значение</u> будет отброшено и заменено более подходящим, как, например, <u>искомое</u>* (target) *<u>значение</u>*.

Итак, Эйзенхарт по существу повторил Фурье, но он явно указал (как это должно было быть ясно с самого начала), что остаточная систематическая ошибка включается в истинное значение. Далее, образцовый процесс в метрологии подразумевает постоянство внешних условий, но в практической астрономии и геодезии наблюдать следует при различных (но благоприятных) условиях, чтобы по возможности исключать систематические погрешности. *Надежда* Эйзенхарта не осуществилась, хотя определённый смысл в ней был: отказ от философских терминов.

4. Математическая статистика

Считается, что математическая статистика отказалась от истинных значений, заменив их параметрами плотности (или функций распределения). Действительно, Фишер (1922, с. 309 – 310) ввёл понятия состоятельности, эффективности и достаточности статистических оценок без всяких ссылок на теорию ошибок или истинные значения. Но на следующей же странице мы читаем:

Чисто словесная путаница помешала чётко формулировать статистические задачи, ибо обычно [Биометрическая школа] *применяет то же название <u>среднее, стандартное отклонение, коэффициент корреляции</u> и т. д. и для истинного значения,* *которое мы хотели бы узнать, но можем лишь оценивать, и для частного значения, которого удаётся достичь нашими методами оценивания*.

Итак, истинное значение было ещё живо в математической статистике. Вот ещё несколько примеров. Словарь (Александров 1962) упоминал истинную корреляцию, истинные средние и значение. Большев (1964, с. 566) рассматривал *истинное значение параметра*. Он комментировал Бернштейна (1941/1964), который обсуждал *истинную вероятность* неравенства (§ 5, с. 390). И вот наш современник Hald (1998, с. 91): *До сих пор мы рассматривали только оценку истинного положения параметра сдвига* … И он неоднократно упоминал истинные значения в главах 5 и 6. Так же поступали другие авторы (Уилкс 1962, § 101) и, позже, снова Хальд (Hald 2007, с. 105).

Но существует и неверное мнение о ненужности обсуждаемого нами термина (Chatterjee 2003, с. 264):

Методы теории ошибок редко применялись вне этих узких областей [астрономии и геодезии] *и синдром истинного значения в конце концов был оставлен*.

Будем великодушны и скажем, что автор написал *узкие* (narrow), имея в виду *ограниченные*, и что о метрологии он позабыл. Но есть ведь и геофизика (магнетизм, ускорение силы тяжести), есть физика (скорость света в пустоте, масса электрона). Далее (с. 273), Кетле будто бы сдерживался синдромом истинного значения, и, что следовало косвенно, уклонения были для него менее важны. Кетле повинен во многих грехах, но только никак не в этом (Шейнин 1986), см. также § 5.

Синдром означал мнение или поведение, типичное либо для данного человека, либо при обсуждении некоторой проблемы (есть и чисто медицинское определение), и какой-то синдром мы усматриваем у самого автора! Наконец, поскольку Chatterjee (с. 248 – 249) всё ещё верит в существование мифической теоремы Гаусса – Маркова [iv, § 6.12], мы сомневаемся, что он достаточно знаком с историей статистики (и особенно с историей обработки наблюдений).

5. Промежуточная стадия

Обычно Гальтон считается первым, кто отошёл от истинных значений (и теории ошибок вообще). Так (Eisenhart 1978, с. 382), в 1908 г. он указывал:

Основные цели гауссового закона ошибок в некотором смысле точно противоположны моим. Они были направлены на исключение или принятие в расчёт погрешностей, но эти ошибки или уклонения были именно тем, что я хотел сохранить и про что выяснить.

Закон ошибок здесь не при чём, а теория ошибок стремится уменьшить влияние погрешностей. Высказывание Гальтона интересно лишь тем, что он противопоставил Гаусса статистике. Но существовала и промежуточная стадия между математической статистикой и теорией ошибок, и формально начало ей положил Кондорсе (1805/1986, с. 604):

Теория средних значений […] является *введением к социальной математике*. […] *В каждой физической и математической науке одинаково полезно иметь средние значения наблюдений или результатов экспериментов*.

На той же странице он определённо отделил эту теорию от *теории исчисления вероятностей*, но не пояснил этой мысли и не определил новую теорию. Он (с. 555 – 559) также рассуждал о связи среднего арифметического (только для конечного числа измерений) и *неизвестного истинного значения* и заметил (с. 555), что следует различать два вида средних, см. ниже. Вообще же соображения Кондорсе следует воспринимать крайне осторожно. В приложении теории вероятностей к судебной статистике *неопределённость и противоречивость* [его рассуждений] *не имеет равных* (Todhunter 1865, с. 352). В самой теории вероятностей он следовал за Даламбером, см. его письмо французскому государственному деятелю Тюрго 1772 г. (Henry 1883/1970, с. 97 – 98), чьи потрясающие ошибки хорошо известны, а про его биографии Эйлера и Даниила Бернулли лучше умолчать.

Но теория средних величин действительно возникла, хотя быть может только в мыслях учёных. Она представлялась общее теории ошибок, потому что дополнительно исследовала средние из переменных величин или состояний, и только в этом смысле мы её признаём.
Вот одно из соответствующих утверждений Кетле (1846, с. 65):

Принимая средние, можно иметь в виду две вполне различные вещи. Можно стараться определить число, которое реально существует, но можно и вычислять число, которое даёт нам наиболее близкое возможное представление о многих однородных объектах, отличающихся друг от друга по величине.

То же сказал несколько позже Давидов (1857, с. 14), который добавил (с. 16), что различие существенно только в связи со свойствами уклонений от среднего. Изучение средних значений или состояний, а не истинных значений, но также и не законов распределения вероятностей, было необходимой стадией в развитии естественных наук [viii, § 4.1]. Сошлёмся теперь на Гильберта (1901/1969, Проблема № 6), одного из последних учёных, упомянувших *теорию средних значений*, которая больше заведомо не существует; как промежуточную, её поделили статистика (к которой её отнёс уже Кетле) и теория ошибок.

В астрономии отход от промежуточной стадии яснее всего, видимо, выразил Каптейн (1906, с. 397):

Так же, как физик […] *не может надеяться проследить ни за какой отдельной молекулой в её движении, но всё же может вывести важные заключения, как только определит среднюю скорость всех молекул и частоту установленных отклонений от этого среднего, так же* […] *наша основная надежда будет состоять в определении средних и частот*.

6. Выводы

Известно, что развитие математики было неизменно связано с её непрестанным удалением от природы (например, от натуральных чисел к действительным, а затем к мнимым числам), и что чем дальше, тем она становилась абстрактнее, и тем полезнее оказывалась для своих приложений. В частности, общий переход от истинных значений к оценкам параметров функций в математической статистике был шагом в верном направлении.

Но подчеркнём, что наука измерения реальных объектов и обработки собранных наблюдений вовсе не отказалась от *истинных значений* и что даже сама статистика их не забыла. Что Мизес (§ 3) также нашёл возможным определить истинное значение (правда, не формально) и косвенно связать его со своей теорией, явно подкрепило нашу точку зрения. Конечно, его теория относится к естествознанию, а не к математике, но ведь и теория ошибок лишь частично относится к последней. Утверждение Chatterjee (§ 4) и, возможно, аналогичное мнение других авторов следует отвергнуть.

Идеи и методы математической статистики должны быть в какой-то степени восприняты в теории ошибок, и в первую очередь мы имеем в виду оценку точности. О теории корреляции и дисперсионном анализе также нельзя забывать, но они в нашем контексте не появлялись.

Библиография

Александров П. С., редактор (1962), *Англо-русский словарь математических терминов.* М.

Бернштейн С. Н. (1941), О доверительных вероятностях Фишера. В книге автора (1964, с. 386 – 393).

--- (1964), *Собрание сочинений*, т. 4. Без места.

Большев Л. Н. (1964), Комментарий к статье Бернштейн (1941). В книге Бернштейн (1964, с. 566 – 569).

Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения небесных тел. В книге Гаусс (1957, с. 89 – 109).

--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 111 – 120.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Гильберт Д. (1901, нем), *Проблемы Гильберта*. М., 1969.

Давидов А. Ю. (1857), Теория средних величин. *Речи и отчёт, произнесённые в торж. собр. Моск. унив.* М., отдельная пагинация.

Колмогоров А. Н. (1946), К обоснованию метода наименьших квадратов. *Успехи математич. наук*, т. 1, с. 57 – 71.

Марков А. А. (1899), Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. В книге автора (1951, с. 231 – 251).

--- (1900), *Исчисление вероятностей.* М., 1924.

--- (1951), *Избранные труды*. Без места.

Никулин М. С. (1999), Случайная ошибка. В книге Прохоров (1999, с. 587).
Прохоров Ю.В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М.
Пуанкаре А. (1896, франц.), *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.
Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1986), Quetelet as a statistican. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 36, pp. 281 – 325.
Уилкс С. С. (1962, англ.), *Математическая статистика*. М., 1967.
Chatterjee S. K. (2003), *Statistical Thought: a Perspective and History*. Oxford.
Condorcet M. J. A. Caritat de (1805), Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, a la loterie, et aux jugemens des hommes. In author's book *Sur les élections et autres textes*. No place, 1986, pp. 483 – 623.
Eisenhart C. (1963), Realistic evaluation of the precision and accuracy of instrument calibration systems. In Ku, Editor (1969), *Precision Measurement and Calibrations*. Washington, pp. 21 – 47.
--- (1978), Gauss. In Kruskal W., Tanur Judith M., Editors. *Intern. Enc. of Statistics*, vols 1 – 2. New York, single paging, pp. 378 – 386.
Fisher R. A. (1922), On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A222, pp. 309 – 368.
Fourier J. B. J. (1826), Sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations. *Oeuvr.*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.
Hald A. (1998), *History of Probability and Statistics and Their Applications from 1750 to 1930*. New York.
--- (2007), *History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 – 1935*. New York.
Henry M. Ch. (1883), *Correspondance inédite de Condorcet et de Turgot*. Genève, 1970.
Kapteyn J. C. (1906), Statistical methods in stellar astronomy. [*Reports*] *Intern. Congr. Arts & Sci. St. Louis – Boston 1904*. No place, vol. 4, pp. 396 – 425.
Lambert J. H. (1760, in Latin), *Photometria*. Augsburg. Соответствующий материал не был включен в немецкий перевод книги в серии Ostwald Klassiker. Цитата в тексте переведена с немецкого перевода отрывка в книге Schneider (1988, p. 228).
--- (1765), Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. In author's *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1. Berlin, pp. 424 – 488.
Laplace P. S. (1795), Leçons de mathématiques. *Oeuvr. Compl.*, t. 14. Paris, 1912, pp. 10 – 177.
--- (1810a), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités. Ibidem, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345.
--- (1810b), Notice sur les probabilités. In Gillispie C. C. (1979), Mémoires inédites ou anonymes de Laplace. *Revue d'histoire des sciences*, t. 32, pp. 223 – 279.
--- (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. В книге Прохоров 1999, с. 834 – 863).
Mises R. von (1919), Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z.*, Bd. 4, pp. 1 – 97. Partly reprinted in author's *Selected Papers*, vol. 2. Providence, Rhode Island, 1964, pp. 35 – 56.
Picard J. (1693), Observations astronomiques faites en divers endroits du royaume en 1672, 1673, 1674. *Mém. Acad. Roy. Sci. 1666 – 1699*, t. 7, 1729, pp. 329 – 347.
Poisson S.-D. (1811), Review of a memoir of Laplace. *Nouv. bull. sciences. Soc. philomatique Paris*, t. 2, No. 35, pp. 132 – 136.
--- (1824), Sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Connaissance des tems* pour 1827, pp. 273 – 302.
--- (1829), Second part of same. Ibidem pour 1832, pp. 3 – 22 of second paging.
Quetelet A. (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités*. Bruxelles.
Schneider I., Herausgeber (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Darmstadt.
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Whittaker E. T., Robinson G. (1924), *The Calculus of Observations*. London – Glasgow, 1958. Уиттекер Э., Робинсон Г. (1935), *Математическая обработка результатов наблюдений.* М.

VII

Геометрическая вероятность и парадокс Бертрана

Geometric probability and the Bertrand paradox.
Hist. Scientiarum, vol. 13, 2003, pp. 42 – 53

1. Ранняя история.

1.1. Ньютон (рукопись 1664 – 1666/1967) рассмотрел мысленный эксперимент. Шар падает на центр круга и оказывается в одном из двух секторов, отношение площадей которых равно 2:√5. Если в первом случае игрок выигрывает a, а во втором случае – b, то его *надежды* стоят $(2a + b\sqrt{5}):(2 + \sqrt{5})$. Здесь видно обобщение понятия ожидания, введенного Гюйгенсом в 1657 г. *Аналогично*, утверждал Ньютон, можно определять вероятности броска неправильной игральной кости.

1.2. Арбутнот был, видимо, переводчиком трактата Гюйгенса на английский язык (Тодхантер 1865, с. 49 и след.), и в нём, в 1692 г., переводчик дополнительно рассмотрел вероятности броска неточного прямоугольного параллелепипеда на его различные грани, т. е. задачи, упомянутой Ньютоном. Решение этой задачи привёл Симпсон (1740, с. 67 – 70), но ошибся во всяком случае в размерности. Иную формулу указала без обоснования Перес (1985).

1.3. Даниил Бернулли (1735) применил геометрические вероятности для решения элементарной задачи о наклонностях планетных орбит относительно орбиты Земли. В течение нескольких последующих десятилетий Муавр, Симпсон (1757) и Бейес (1764) вводили законы распределения и, фактически, вместе с ними, геометрические вероятности. Муавр (1743/1756, с. 323), например, считал, что для возрастов, превышающих 12 лет, закон смертности равномерен и что вероятности смерти пропорциональны длинам соответствующих отрезков времени.

1.4. Мичелл (1767) вычислял геометрическую вероятность p близкого (не далее 1°) расположения двух звёзд из их общего числа n, случайно рассеянных по небесной сфере. Полагая n = 5000 (примерно столько звёзд можно увидеть невооружённым глазом) и элементарным подсчётом определив p = 1/13 131, он заключил, что число близко расположенных звёзд равно np = 0.38, тогда как У. Гершель обнаружил несколько сот визуально-двойных звёзд, гораздо более близких друг к другу. Исследование Мичелла показало, что большинство этих звёзд являлось физически-двойными и что звёзды не распределены равномерно.

1.5. Бюффон (1777/1954) окончательно ввёл геометрические вероятности в *науку о шансах*, ввёл *геометрию в свои права*. Он (с. 474) косвенно определил это понятие как отношение некоторых *протяжённостей* (в современной терминологии, *мер*) друг к другу и сформулировал (с. 471) свою знаменитую задачу: Игла длиной $2r$ падает *случайно* на ряд параллельных прямых, расположенных на расстояниях $a > 2r$ друг от друга. Требуется определить вероятность, что игла пересечёт одну из прямых. Несложный расчёт приводит к

$p = 4r/\pi a$, (1)

хотя он сам вычислял лишь отношение r/a, при котором $p = 1/2$.

Сводка рассуждений Бюффона, написанная, видимо, им самим, появилась анонимно (1735). В ней автор поставил аналогичную задачу о падении монеты на сеть квадратов (carreaux) и указал, что подобные геометрические задачи являлись совсем новыми. Тодхантер (1865, с. 203) упомянул эту сводку, но позднейшие авторы не ссылались на неё. Напротив, задачу Бюффона 1777 г. неоднократно описывали и обобщали, и мы сами (1991/1999, с. 61 – 62) упоминали соответствующие работы В. Я. Буняковского и А. А. Маркова. Первым комментатором Бюффона был, видимо, Лаплас (1812/1886, с. 365 – 369), который также заметил (с. 365), что этот *особый жанр сочетания случаев* может служить *для спрямления кривых и квадрирования их поверхностей* (?) и что по формуле (1) можно экспериментально определять число π, – но с малой точностью (Шрейдер 1962, гл. 1, §§ 1 – 2).

Без доказательства Лаплас также указал, что для такого определения оптимальная длина иглы при $a = 1$ составляет $2r = \pi/4$, хотя в 1812 г. он привёл другой результат, $2r = 1$. Тодхантер (1865, с. 590 – 591) и Gridgeman (1960) доказали, что верно было предыдущее число. Совсем простое доказательство этого следует из формулы

$$|d\pi| = (4r/p^2)|dp|,$$

так что видно, что p, а потому и r должны быть максимальны, т. е. r должно быть равным 1/2.

2. Девятнадцатый век

2.1. Курно (1843, § 18) определил геометрическую вероятность, или, точнее, вероятность вообще как отношение некоторых протяжённостей. Он (§ 74), далее, применил геометрическую вероятность для вывода закона распределения функции нескольких случайных аргументов, а в гл. 6 пояснил понятие плотности распределения геометрическими рассуждениями, ср. § 1.3. Вот один из его примеров.

Дана функция $u = |x - y|$, оба аргумента которой равномерно распределены на отрезке [0, 1]. Рассмотрев площади соответствующих фигур, Курно заключил, что для $0 \le u \le 1$

$$P(u \ge a) = (1 - a)^2.$$

Вероятность противоположного события относилась бы к некогда популярной *задаче о встрече*, см. Whitworth (1867 (?); 1886) и Laurent (1873, с. 67 – 69): двое договорились о встрече в определённом месте в течение назначенного промежутка времени, но каждый приходит в *случайный* момент и ожидает только некоторое обусловленное время, после чего уходит.

2.2. Геометрическую вероятность применили Больцман (1868, с. 50) и Дарвин (1881/1945, с. 52 – 55). В соответствии с одним из своих двух определений апостериорной вероятности она (временно́е определение Больцмана) была равна отношению времени нахождения молекулы газа в бесконечно малом интервале ко всему времени наблюдения. Не останавливаясь на дальнейших физических соображениях и выводах, заметим, что при изучении жизни дождевых червей Дарвин разбросал бумажные треугольнички по подходящему участку местности, а через определённое время извлёк некоторую их часть из норок, куда их затащили черви. Он выяснил, что черви утаскивали добычу не *случайно*, т. е. не одинаково часто за каждую точку обвода треугольничков.

2.3. Геометрическая вероятность стала серьёзно изучаться. Seneta et al (2001) описали работы Сильвестра, Крофтона, Барбье и Бертрана. На с. 506 они процитировали биографа Крофтона, J. Larmor, который в 1915 г. заключил, что

Большинство оригинальных работ Крофтона было посвящено великолепному сочетанию геометрии с интегральным исчислением, названному (*быть может им самим*) *локальной вероятностью*.

Крофтон, например, решил примечательную задачу Сильвестра об определении вероятности четырём случайным точкам, находящимся в конечной выпуклой области, образовать выпуклый четырехугольник. Czuber (1903/1908, с. 99 – 102) описал несколько частных случаев этой задачи.

2.4. Несколько комментаторов усомнилось в мичелловском понимании шанса, равно как и в его вычислениях (не описанных в § 1.4) и определили вероятность расстояния между двумя случайными точками на сфере (Шейнин 1984, с. 160 – 168). Эта вторая задача была неопределённой, и поэтому в задаче Мичелла следовало рассмотреть несколько примечательных расположений звёзд, см. Курно (1843, § 147) и [v, § 2].

Одним из комментаторов был Newcomb (1862, с. 212), и вот его утверждение по поводу родственной задачи:

Вероятность, что точка [...] *окажется внутри любой дуги* [некоторой] *окружности, будет равна длине этой дуги, делённой на* [длину] *окружности*.

Упомянем ещё Пуассона (1837, с. 306). Он посчитал, что вероятность случайной точке находиться в бесконечно узком шаровом слое полусферы пропорциональна *протяжению* этого слоя.

2.5. Czuber (1884) посвятил свою книгу задачам на геометрические вероятности. Опишем одну из них, важную в отрицательном смысле. Две случайные точки, M и N, расположены на отрезке $AB = a$. Определить вероятность того, что $MN > NA$ (с. 11). Его решение (с. 46) оказалось несложным, хотя и потребовало вычисления простейшего интеграла, но ведь каждое расположение (*M, N*) можно дополнить равновероятным расположением (*N, M*), так что ответ очевиден. Интереснее заметить, что задача не имеет смысла: без исходных данных нельзя дать никакого разумного ответа. *Полное незнание не является основанием какого-либо вывода. Ex nihilo nihil*! (Ellis 1850/1863, с. 57). Заметим ещё, что с точки зрения теории информации половинная вероятность соответствует наименьшей возможной информации.

Позднее Czuber (1903/1968, с. 10) указал, что существует *иная точка зрения*, в соответствии с которой утверждения должны быть основаны на каком-то знании. Пуассон (1837, с. 37), правда, показал противное на примере урновой задачи, но установленная им вероятность (половинная) была лишь субъективной.

2.6. В XIX веке была создана интегральная геометрия как соединение геометрии и теории меры, и, что ближе нашей теме, комбинаторная интегральная геометрия. Кроме того, Бертран (1888, с. 4 – 5) окончательно доказал, что выражение *случайно*, или даже *равномерно случайно*, недостаточно определенно. Он задал вопрос о вероятности того, что *случайная* хорда данного круга длиннее стороны правильного вписанного треугольника и сформулировал три соответствующих варианта:

a) Одна из конечных точек хорды задана; вероятность $p = 1/3$.

b) Направление хорды задано; $p = 1/2$.

c) Центр хорды с одной и той же вероятностью находится в любой точке круга; $p = 1/4$.

Darboux (1902/1912, с. 50) примечательно высказался по поводу этой задачи:

По соображениям, которые могут казаться равно надёжными, он [Бертран] *определил для искомой вероятности два различных значения, 1/2 и 1/3. Он занимался этой проблемой и отыскал её решение, но предпочёл, чтобы его отыскали читатели.*

Не заметив третьего решения, Дарбу, видимо, следовал за Пуанкаре (§ 2.7). И вот дополнительное указание (Bru & Jongmans 2001, с. 187):

Бертран сформулировал эту задачу в рукописных записках своих лекций для Политехнической школы в качестве преобразования знаменитой задачи Бюффона.

2.7. Пуанкаре (1896/1999, с. 100) заметил, что расположение точки (*x, y*) внутри фигуры *S* может быть представлено двойным интегралом по площади *S* от некоторой функции, которая должна была быть специализирована для каждой задачи. Впрочем, молчаливо приняв эту функцию тождественно равной 1, он рассмотрел два (!) варианта задачи: хорда определяется относительно центра круга O и полярной оси, проходящей через O и начинающейся в этой точке, параметрами ω и α, полярными углами своей начальной точки A и своего центра P, либо полярными координатами точки P (θ и ρ) ибо ОP перпендикулярно хорде. Соответствующие двойные интегралы по площади круга от $d\omega d\alpha$ и $d\rho d\theta$ не равны друг другу, что и объясняет парадокс Бертрана.

Пуанкаре начал это исследование, утверждая, что вероятность точке x принадлежать заданному отрезку $[a,b]$ равна интегралу от некоторой выбираемой функции в пределах a и b. Впрочем, ничего интересного в этом утверждении для того времени, видимо, не было.

3. Дальнейшая история

3.1. Мы начнём с некоторым нарушением хронологии. Czuber (1903/1908, с. 107 – 108) привёл три других естественных варианта задачи Бертрана.

d) Один из концов хорды задан, и она проходит через любую точку круга; $p = 1/3 + \sqrt{3}/2\pi \approx 0.609$.

Barth & Haller (1996, с. 391) заметили, что этот вариант может быть заменён случайным выбором точки на хорде и её направления.

e) Оба конца хорды случайны; этот вариант равносилен варианту а).

f) Гораздо более трудный вариант. Случайно выбраны две произвольные точки на хорде; $p = 1/3 + 3\sqrt{3}/2\pi \approx 0.746$.

3.2. De Montessus (1903) выяснил, что задача Бертрана имеет несчётное множество решений. Пусть задан единичный круг с центром O. Некоторый диаметр пересекает круг в точке B и продлён в том же (положительном) направлении. Концентрический круг радиусом 1/2 пересекает тот же диаметр в точке C на OB.

Пусть точка движется в положительном направлении от точки C в бесконечность. В каждом её положении касательная, проведённая из неё к малому кругу, явится границей для хорд, удовлетворяющих условию задачи, и De Montessus вычислил требуемую вероятность для текущей точки, а также и среднюю вероятность. Он допустил грубую арифметическую ошибку, но среднее значение вероятности ($p = 1/2$) оказалось верным, потому что оно определяется бесконечно удалённой точкой на продолжении диаметра OB.

3.3. Книга Borel (1909/1950) содержала две разочаровывающие главы о геометрической вероятности. Вот некоторые из приведенных в них соображений.

Задача о встрече решена на с. 132.

Расстояние между двумя случайными точками на сфере, с. 137, см. наш § 2.4. Борель учёл дополнительное обстоятельство: координаты точки определяются лишь с некоторой точностью, зависящей от её положения относительно экватора сферы.

Задачу Бертрана автор считал необходимым уточнить; большинство её естественных вариантов приводит к $p = 1/2$, с. 148 – 149. Сразу скажем, что эта точка зрения возобладала; так полагал и Прохоров, см. ссылку в § 3.4, и что она равносильна признанию полного незнания (§ 2.5).

3.4. Шмидт (1926) исходил из предпосылок Пуанкаре. Он поставил условие неизменности искомой вероятности при параллельном переносе и вращении системы координат и доказал, что ему соответствуют лишь интегралы от $d\rho d\theta$ или $[\partial(\rho,\theta)/\partial(\xi,\eta)]d\xi d\eta$ (обозначения те же, что и в § 2.7) и что поэтому $p = 1/2$. С тех пор добавилось условие неизменности вероятности при изменении масштаба.

Шмидт также заметил, что и Crofton (1868) заявил, хоть и без доказательства, что параметры θ и ρ являются самыми предпочтительными. Точной ссылки Шмидт не привёл, и мы этого утверждения у Крофтона не нашли. Но добавим, что Крофтон (с. 181) упомянул *теорию локальной или геометрической вероятности.* Подчеркнём, что его статья появилась до публикации книги Бертрана (1888).

Заметим ещё мнение Прохорова (1999): с геометрической точки зрения наиболее естественно полагать, что θ и ρ независимы и распределены равномерно, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$.

3.5. Ссылаясь лишь на Чубера, Bower (1934) доказал, что задача Бертрана имеет бесконечное множество решений. Он вывел основную формулу для подсчёта искомой вероятности, которая появилась уже у De Montessus (§ 3.2), а кроме того указал все шесть частных вариантов, указанных нами в §§ 2.6 и 3.1. Его подход был аналогичен намеченному Пуанкаре (§ 2.7).

Боуер, однако, не пояснил своего изложения в достаточной мере и лишь указал, что равновероятным (equilikely!) элементам, т. е. дифференциалам, могут быть назначены различные веса. Пусть (его с. 508) на единичной окружности с центром в O случайно выбраны две точки. Обозначим центр соответствующей хорды через N и $ON = x$. Тогда (возможный вариант) вероятность, что точка на ON принадлежит интервалу $[x, x + dx]$ окажется равной не $dx/2$, но

$$[\pi(x + dx)^2 - \pi x^2]/\pi \approx 2xdx.$$

Равновероятным здесь был элемент соответствующей площади.

3.6. Мы постарались отыскать все необходимые источники вплоть до примерно 1940 г. Не будучи уверены в успехе, мы назовём ещё одну статью (Petrini 1937). Автор ссылался только на Бертрана и Бореля (не указав точных выходных данных) и привёл своё собственное определение геометрической вероятности. Впрочем, он лишь повторил вариант Бертрана c) (§ 2.6) и заявил, что, несмотря на иные варианты, это решение являлось единственно верным.

3.7. Дальнейшие изыскания ещё не стали историей, однако мы упомянем важный источник (Kendall & Moran 1963). Авторы, как и Крофтон (1868), указывают, что геометрическая вероятность может существенно облегчить вычисление интегралов, ср. малопонятное, правда, замечание Лапласа в § 2.6, и подробно описывают задачи Бюффона и Сильвестра.

Геометрические вероятности и интегральная геометрия (§ 2.6) включены в новую дисциплину, стохастическую геометрию (Амбарцумян 1999).

Библиография

Амбарцумян Р. В. (1999), Стохастическая геометрия. В книге Прохоров (1999, с. 682).

Курно А. А. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

Перес Л. М. Т. (1985), К истории понятия геометрической вероятности. *Вопросы истории естествознания и техники*, № 4, с. 100 – 103.

Прохоров Ю. В. (1999), Бертрана парадокс. В книге автора (1999, с. 46).

---, редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М.

Пуанкаре А. (1896, франц.), *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1980), On the history of the statistical method in biology. *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 22, pp. 323 – 371.

--- (1984), On the history of the statistical method in astronomy. Ibidem, vol. 29, pp. 151 – 199.

--- (1991, англ.), О работах В. Я. Буняковского по теории вероятностей. *Историко-математич. исследования*, вып. 4 (39), 1999, с. 57 – 81.

Шмидт О. Ю. (1926), О парадоксе Бертрана в теории вероятностей. *Математич. Сб.*, т. 33, с. 33 – 40.

Шрейдер Ю. А., редактор (1962), *Метод статистических испытаний* (*Метод Монте-Карло*). М.

Anonymous (1735), Géométrie. *Hist. Acad. Roy. Sci. avec Mém. de math. et de phys.*, pp. 43 – 45 of the *Histoire*.

Barth F., Haller R. (1996), *Stochastik. Leistungskurs*. 5-е издание. München.

Bayes T. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, vol. 45, 1958, pp. 296 – 315.

Bernoulli Daniel (1735), Recherches [...], Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des planètes [...]. *Werke*, Bd. 3. Basel, 1987, pp. 303 – 326.

Betrand J. (1888), *Calcul des probabilités*. Paris, 1907. Reprint of first edition: New York, 1970.

Boltzmann L. (1868), Studien über das Gleichgewicht der lebenden Kraft. *Wiss. Abh.*, Bd. 1, pp. 49 – 96. Leipzig, 1909.

Borel E. (1909), *Eléments de la théorie des probabilités*. Paris, 1950.

Bower O. K. (1934), Note concerning two problems in geometrical probability. *Amer. Math. Monthly*, vol. 41, pp. 506 – 510.

Bru B., Jongmans Fr. (2001), Joseph Bertrand. In Heyde C. C., Seneta E., Editors, *Statisticians of the Centuries*. New York, pp. 185 – 189.

Buffon G. L. Leclerc de (1777), Essai d'arithmétique morale. *Oeuvr. phil.* Paris, 1954, pp. 456 – 488.

Crofton M. W. (1868), On the theory of local probability applied to straight lines [...]. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 158, pp. 181 – 199.

Czuber E. (1884), *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Leipzig.

--- (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung* [...], Bd. 1. New York, 1968, перепечатка издания 1908 г.

Darboux G. (1902), Eloge historique de Bertrand. В книге автора *Eloges académiques et discours*. Paris, 1912, pp. 1 – 60.

Darwin C. (1881), *Formation of Vegetable Mould*. London, 1945. Образование растительного слоя Земли деятельностью дождевых червей. *Соч.*, т. 2. М. – Л., 1936, с. 114 – 238.

De Moivre A. (1743), *Treatise on Annuities on Lives*. Второе издание в книге автора *Doctrine of Chances*, третье издание, 1756, pp. 261 – 328. Перепечатка: New York, 1967.

De Montessus R. (1903), Un paradoxe du calcul des probabilités. *Nouv. annales math.*, sér. 4, t. 3, pp. 21 – 31.

Ellis R. L. (1850), Remarks on the alleged proof of the method of least squares. В книге автора *Math. and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 53 – 61.

Gridgeman N. T. (1960), Geometric probability and the number π. *Scripta Math.*, vol. 25, pp. 183 – 195.
Kendall M. G., Moran P. A. P. (1963), *Geometrical Probabilities*. London.
Laplace P. S. (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1886.
Laurent P. H. (1873), *Traité du calcul des probabilités*. Paris.
Michell J. (1767), An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars. *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. 12, 1809, pp. 423 – 438.
Newcomb S. (1862), Determination of the law of distribution of the nodes and perihelia of the small planets. *Astron. Nachr.*, Bd. 58, pp. 210 – 220.
Newton I. (ca. 1664 – 1666), Рукопись без заглавия. *Math. Papers*, vol. 1. Cambridge, 1967, pp. 58 – 61.
Petrini H. (1937), Le paradoxe de Bertrand. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, t. 25, No. 3, A15 – A24, B14 – B19.
Poisson S. D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements* [...]. Paris, 2003.
Seneta E., Parshall K. H., Jongmans Fr. (2001), Nineteenth-century developments in geometric probability [...]. *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 55, pp. 501 – 524.
Simpson T. (1740), *Nature and Laws of Chance*. London.
--- (1757), On the advantage of taking the mean of a number of observations. In author's book *Misc. Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects* [...]. London, pp. 64 – 75.
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.
Whitworth W. A. (1867), *Choice and Chance*. Одно из последующих изданий, 1886. New York, 1959, перепечатка издания 1901 г.).

VIII

К истории статистического метода в метеорологии

On the history of the statistical method in meteorology.
Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 31, 1984, pp. 53 – 95.

Введение

Мы в основном исследуем второй период статистического метода (Шейнин 1982, с. 243), в течение которого появились статистические данные или наблюдения, но авторы ещё не начали проверять своих выводов количественными стохастическими критериями, т. е. от Граунта и Тихо Браге до конца XIX в. Действительно, после Лапласа, несмотря на труды Пуассона и Чебышева, статистика оказалась на задворках, к тому же естествоиспытатели недостаточно владели математикой.

Авторы многочисленных исследований корреляционной зависимости между солнечными пятнами и погодой, опубликованных до конца XIX в., не применяли подобных критериев. Ранние правила предсказания погоды по различным признакам также иногда основывались на (ограниченном) статистическом материале. Так, Флемлозе (Flemlose; Hellman 1970, с. 410), ученик Тихо Браге, привёл

399 правил предсказания погоды по виду неба, по Солнцу, Луне, звёздам [т. е. планетам] *или по поведению животных*. […] *В 1582 – 1597 гг. в Вене ежедневно регистрировалась погода*.

На острове Вен располагалась обсерватория Тихо Браге.
См. Шейнин (1974, с. 123) по поводу отношений Флемлозе и Тихо Браге и мыслей последнего об астрологии. Но добавим, что подобное множество правил не могло обеспечить совпадающих результатов. Заметим также (Шейнин 1982, § 2.1), что до середины XIX в. многие врачи верили во влияние (иногда корреляционное) Луны на некоторые болезни.

Мы доводим изложение до 1870 – 1880-х годов, когда метеорологические наблюдения стали координироваться во всемирном масштабе и стали широко применяться карты погоды. Исследуя их, метеорологи смогли изучать погоду в обширных регионах в течение любых промежутков времени и сразу же обратили внимание на пространственно-временное распределение метеорологических элементов. Возникло критическое отношение к имеющемуся статистическому материалу.

Гальтон (1863), ещё не бывши известным учёным, предложил систему обозначений для этих карт и заметил (с. 3), что метеорологи *странным образом отстают в сочетании имеющихся у них данных*. По поводу этой книги Бейс-Балло (1872, с. 52) упомянул *прекрасно исполненную метеорографию*, сам же автор (с. 7) был немедленно вознаграждён за свои усилия, подтвердив существование антициклонов. О них он также сообщил в статье того же 1863 г. Прекрасный пример предварительного исследования данных!

К 1820 г. достижения Гумбольдта привели к выделению новой научной дисциплины, климатологии, из метеорологии. С самого начала она была непосредственно связана со статистическим методом, и её возникновение и развитие оказались одним из наиболее важных явлений в метеорологии с конца XVIII в. до 1880-х годов.

Бейс-Балло (1847b, с. 106 – 108; 1850a, с. 629) выделил три стадии в истории (современной ему) метеорологии. Во втором случае он указал:

Первая [стадия] *началась с Гумбольдта.* […] *Следовало установить повсеместное среднее состояние атмосферы и, как он это и осуществил, определить закономерное распределение этого состояния по всему миру. Главным лицом второй стадии был Дове. Длительное время он следовал за Гумбольдтом, затем начал изучать отклонения от этого среднего состояния. Это и сейчас является задачей метеорологии. Отклонения от законов следует исследовать, чтобы выяснить их собственные законы, и в этом нам должны помочь саморегистрирующие приборы и электрический телеграф*.

Полагалось бы, видимо, сказать, что вторая стадия характеризовалась изучением пространственно-временных распределений метеорологических элементов. На предстоящей третьей стадии, продолжал Бейс-Балло, окажется возможным исследовать будущие метеорологические явления.

До Гумбольдта, и в меньшей степени в середине XIX в., метеорологи пытались описывать температуру воздуха эмпирическими функциями широт, а для изучения периодических изменений метеорологических элементов применялся и гармонический анализ, однако все эти попытки оказались почти бесполезными (Leighly 1949, с. 658 – 659; Körber 1959, с. 300).

Dufour (1943, с. 358) заметил существование статистического периода в развитии метеорологии: он *в первую очередь характеризовался* […] *упорными публикациями климатологических данных*. Добавим, что прежде всего данные должны были быть исследованы и обработаны, не говоря уже стандартизованы во всемирном масштабе. Dufour не указал временных рамок введенного им периода, но полагал, что он начался с введения в науку экспериментального метода. Этот метод ведёт начало с Галилея, и мнение автора ошибочно.

Против публикации подробных метеорологических данных в общих периодических изданиях выступил Био (1855, с. 1179 – 1180), а позднее Менделеев (1876/1946, с. 267) заметил, что господствующей *собирательной* школе метеорологов нужны *одни числа и числа*, но затем заключил (1885/1952, с. 527), что зарождается новая метеорология, которая начала на основе статистического материала *понемногу обладать, синтезировать, предсказывать.*

Гумбольдт и Дове представляли себе, что ввели в метеорологию статистический метод. Впрочем, Lamont (§ 4.2.1) усомнился в обоснованности применения среднего арифметического, полагая, что временные отклонения наблюдений от среднего не обладали *обычными* статистическими свойствами; ср. мнение Мейера в § 4.3. Позднее эти отклонения стали считаться элементами временных рядов. Кроме Ламонта никто в середине XIX в., даже Дове, не заинтересовался этой серьёзной проблемой.

Наша статья является первым систематическим описанием своей темы. Сводку её первоначального английского варианта см. Шейнин (1990, с. 395 – 399).

Некоторые работы (Dalton 1793; Lamont 1867a) оставались незамеченными, а вклад Ламарка слишком часто оценивался лишь со строго утилитарной точки зрения. Почти нет и общей литературы и даже общая история метеорологии мало известна. Мы смогли опираться лишь на три источника (Show & Austin 1926; Хргиан 1959; Frisinger 1977), да и то только в небольшой степени. Мы не видели диссертации Fridman (1950), которая всё-таки относится к более раннему периоду. Нам посчастливилось (см. *Признательность*) познакомиться по микрофильму с *Ежегодниками* (1800 – 1811) Ламарка, хранящимися в парижской Bibl. centrale du Muséum national d'histoire naturelle. Тамошний библиотекарь уведомил нас, что их комплект этих *Ежегодников* возможно является единственно полным во Франции. Мы не касаемся ни метеорологических приборов, ни методов наблюдения, хоть и постарались показать отличие этих методов в метеорологии от астрономии и геодезии. Мы также не обсуждаем медицинскую климатологию, которая появилась, возможно, в 1880-е годы (Шейнин 1982, § 8). Впрочем (там же, §§ 7.4.2 – 7.4.3), в 1865 – 1866 гг. немецкий астроном и математик Л. Зейдель исследовал связь заболеваемости брюшным тифом от метеорологических условий. Синоптической метеорологии мы также не касались, ибо и она ещё не существовала по крайней мере до середины XX в. (Thompson 1961, с. 1):

Анализ погоды […] *был* […] *в большой степени субъективен и не вполне удовлетворителен*. […] *Более того, предсказания* […] *были не менее субъективны*.

Никто, видимо, не исследовал, как именно при изучении погоды применялся статистический метод.

2. Влияние Луны на погоду

2.1. Тоальдо, Ламарк. В 1707 г. статистик и метеоролог Caspar Neumann (Guhrauer 1863, с. 267) в письме Лейбницу предположил, что Луна влияет на погоду, а в другом письме того же года он (там же, с. 269) заявил, что метеорологические наблюдения требуют *определённой теории*.

Ламберт (1773b) опубликовал результаты исследования Doppelmayer 1732 – 1742 гг. атмосферного давления в Нюрнберге в течение апогеев и перигеев Луны и обсуждение аналогичных данных Poleni за 40 лет, проведенное Toaldo. Как и Тоальдо, Ламберт утверждал, что атмосферное давление зависит от взаимного расположения Земли и Луны, а Даниил Бернулли [iii, § 1] сочувственно отнёсся к теме работы Ламберта. Многие учёные, видимо включая Джона Гершеля (Shaw & Austin 1926/1942, с. 108) придерживались подобных взглядов по меньшей мере вплоть до середины XIX в.

Тоальдо (1775/1777, с. 89) утверждал, что *барометр обычно находится выше в квадратурах, чем в сизигиях* и что (с. 90) лунные фазы влияют на погоду. (Сизигиями называются и новолуние, и полнолуние.) Он (1777, с. 343 и 344) также привёл сводку данных за 1671 – 1772 гг. о погоде в различных регионах. Оказалось, что при полнолуниях погода изменялась 950 раз и оставалась прежней 156 раз, а в апогеях, соответственно, 961 и 226 раз. Всего подобных наблюдений было 9614 и погода изменилась/оставалась прежней 7546/2068 раз. Без применения каких-либо вычислений Тоальдо заключил, что Луна существенно влияла на погоду. В принципе он мог бы применить соответствующую теорему Муавра 1733 г., результаты которого, однако, оставались неизвестными на континенте Европы ещё много десятилетий. Впрочем, никто не доказал, что биномиальное распределение хорошо характеризует подобные наблюдения, да и сводка данных за столетие не могла считаться единой совокупностью.

Вот дальнейшие замечания об исследовании Тоальдо (1777).

1) Он (с. 341, 345, 346 – 347) сформулировал предположения о силах, при помощи которых Луна влияла на погоду, но даже не попытался количественно обосновать их. То же можно сказать о позднейших учёных (§§ 2.2 – 2.5).

2) Тоальдо (с. 346) утверждал, что *Болезни учащаются и* […] *становятся наиболее опасными в дни месяца, которые приходятся на десять лунных точек*. По поводу влияния погоды на здоровье он ссылался на Рамаццини (итальянский врач, 1633 – 1714), автор первого исследования профессиональных заболеваний), см. об этом Шейнин (1982, § 2.2). Мы не нашли объяснения термина *лунные точки*, которые Ламарк (см. ниже) назвал *пароксизмами*, т. е. обострениями.

3) Тоальдо (с. 364 – 367) закончил своё описание *метеорологическими афоризмами*, в том числе качественно-корреляционными. В соответствии со старинной традицией, он таким образом несомненно формулировал правила для предсказания погоды. Афоризм № 9 утверждал, что некоторые лунные точки *обычно влекут за собой хорошую погоду*, […] *другие точки склонны …*

Своё следующее сочинение Тоальдо (1782) посвятил *метеорологическому саросу*. Не зная ещё количественных критериев, он пытался выявить 18-летний цикл в изменениях метеорологических элементов. По его разумному соображению (с. 178 и 180), погода не могла повторяться в точности через 18 лет и *следовало учитывать* […] *убывание жары вместе с примечательным возрастанием влажности в течение 30 – 40 лет*.

Тоальдо (1777, с. 351) применил термин *сарос* в метеорологическом контексте ещё раньше, а Ф. Бэкон (1597/1914, с. 169), см. также Shaw & Austin (1926/1941, с. 118), намекнул на существование этого сароса:

Говорят, что в Нидерландах наблюдается […] *один и тот же характер лет и их смена и погода повторяются каждые 35 лет*. […] В*ычисляя прошедшее, я установил некоторое совпадение*.

Ламарк (1800 – 1811, № 8, с. 100) считал, что Луна, Солнце и *испарения* Земли, как, например, электричество, оказывают сильнейшее влияние на атмосферу, однако фактически он рассматривал только действие Луны (№ 1, с. 82, № 6, с. 13, № 8, с. 100 и 107, № 9, с. 76 и 127 – 199; 1818b, с. 462), в основном притяжением (№ 5, с. 112, № 11, с. 185 – 191). Ссылаясь на этот *Ежегодник*, мы не будем больше указывать его годы, 1800 – 1811.

Отвергая существовавшее уже тогда мнение, он (№ 8, с. 161) утверждал, что лунные атмосферные приливы оказывают существенное влияние. Через несколько лет Лаплас (1814/1999, с. 847, левый столбец) пришёл к выводу, что колебания атмосферного давления слишком малы, что противоречило мнению Ламарка.

Позднее Лаплас (1823) вернулся к изучению суточных колебаний атмосферного давления. Stigler (1975, с. 510 – 513) описал его исследование, хоть и не затронул прошедшего. Вот одно из высказываний Лапласа (с. 186), см. также Stigler (с. 511):

Именно здесь [при изучении атмосферных приливов] *неизменно чувствуется необходимость использования очень большого числа наблюдений, их сочетаний самым целесообразным способом и обладания метода для определения вероятности того, что ошибка полученного результата заключена в ограниченные пределы. Не владеющие этим методом подвержены опасности представлять себе влияние беспорядочных причин законами природы, что часто и происходит в метеорологии*.

Не на Ламарка ли он намекал? Ламарк (1818b, с. 462), кстати, не сослался на Лапласа и не попытался количественно обосновать влияние Луны на погоду. Развитие теории вероятностей после Якоба Бернулли действительно было обусловлено плодотворными поисками ответа на позднейшее замечание Лапласа. Здесь следует упомянуть Муавра и самого Лапласа, а метод, который последний имел в виду, видимо означал теорему Муавра – Лапласа и/или более общие варианты ЦПТ (нестрого доказанные Лапласом).

Biot (1818b) опубликовал статью под тем же названием, что и Ламарк (1818b). Будучи *настоящим* физиком и к тому же последователем Лапласа, он не сказал ни слова о влиянии Луны на погоду.

Ламарк оставил немало рассуждений о влиянии лунного притяжения, см, например, (№ 11, с. 185 – 191). Он (№ 6, с. 13) выделил 23 520 *жанров* взаимного положения Земли, Луны и Солнца, которые, в соответствии *с сочетанием обстоятельств,* так или иначе влияли на погоду. Он, однако, не обратил внимания на косвенное влияние Луны на атмосферу.

Позднее Лаплас (1823, с. 184) указал эти косвенные причины:

Периодические поднятия и опускания океана и притяжение флюидов [атмосферы] *влияют на море, чья фигура* [внешняя форма] *периодически изменяется*.

По меньшей мере в одном случае Ламарк (№ 6, с. 143) заявил, что *другие планеты воздействуют на Землю с интенсивностью, соответствующей массе и расстоянию каждого из этих тел*. Слишком неопределённо! О действии Луны Ламарк снова заявил в 1800 – 1814 гг. (Vachon et al 1972, с. 95 – 96):

Луна постоянно воздействует на атмосферу, притом с переменной силой, и особенно в нашем климате. И именно в этих пароксизмах, называемых лунными точками, происходят четыре системы весьма различных влияний, в которых её воздействие на атмосферу особенно возрастает. Эти системы имеют место в фазах, апсидах, узлах и склонениях. […] Причины, влияющие на атмосферу, *действуют постоянно в соответствии с состоянием, которое существует в нашей атмосфере*.

Ламарк (1801b, с. 297 – 298; № 2, с. 16 и 109; № 7, с. 124 – 129; № 11, с. 138) считал себя последователем Тоальдо, но всё же утверждал (№ 7, с. 128), что *рассуждения, которые представляют нам* [его] *афоризмы, более эмпирические, чем научные*.

В свою очередь, Cotte (1788с, с. 212) указал, что Ламарк собрал наблюдения влияния Луны на направление ветра. Он (1800, с. 338) также заявил, что

Следует во всяком случае быть благодарными гр-ну Ламарку за то, что он обратил внимание наблюдателей на определённые периоды. Полезные результаты нельзя получить, если не сочетать метеорологические наблюдения с различными явлениями природы. Эту цепь причин и следствий никогда не удастся изучать слишком много.

2.2. Араго. Учёные продолжали изучать влияние Луны на погоду даже после Лапласа. Вот как Schübler (1830, с. 78) пояснил существовавшее положение: *Различные астрономы* […], *а именно Лаплас и Бювар, показали*, […] *что величина вызванных Луной атмосферных приливов должна быть намного меньшей, чем устанавливается из* […] *наблюдений, и поэтому вообще усомнились в их верности.*

А. Бювар (Bouvard, 1767 – 1843), коллега и друг Лапласа, стал известен как преданный вычислитель. В своём метеорологическом мемуаре он (1827, с. 296) заключил, что на широте Парижа влияние Луны на погоду не было *ощутимо*.

Мы не знаем, многие ли разделяли убеждение Шюблера. Во всяком случае через два года Араго (1858b, с. 25) указал, что

Астрономы, физики и метеорологи, как правило, видимо, убеждены, что Луна не оказывает на нашу атмосферу никакого заметного влияния. Но следует признать, что в своём мнении они одиноки. Громадное большинство населения твёрдо верит в сильное действие нашего спутника.

На с. 39 в аналогичном случае Араго упомянул геометров вместо астрономов, и добавил, что мнение о сильном воздействии Луны на погоду было основано на *арифметическом обсуждении* наблюдений и даже определённо заявил (1858a, с. 1), хотя и без пояснений, что находит *преждевременным* доказательство того, что *влияние Луны и комет почти не ощутимо*. И кроме того, он (с. 2 – 3) безоговорочно заявил:

Никогда, какой бы ни был успех науки, добросовестные учёные, заботящиеся о своей репутации, не осмелятся предсказывать погоду.

Под предсказаниями он (с. 3) понимал ответы на *поистине прискорбные для нашего времени вопросы как: Будет ли зима суровой*? Упоминая Араго, Бейс-Балло (1847b, с. 116 – 117) отвергнул это утверждение.

2.3. Глейшер. В своём авторитетном обзоре Muncke (1837, с. 2072) заключил, что *влияние Луны на нашу атмосферу не может больше отрицаться*. Среди учёных, разделявших это мнение, можно назвать Глейшера (J. Glaisher), отца астронома J. W. L. Glaisher. Вначале, исходя из наблюдений 1840 – 1847 гг. в Гринвиче, он (1867, с. 378) заключил, что *Казалось, что положение Луны относительно Солнца оказывало влияние на направление ветра*. И вот мнение Бейс-Балло (1847a, с. 165):

Влияние Луны на направление ветра, кроме как [в зимние месяцы] *никак не может быть заметным, но* […] *нужно использовать наблюдения по меньшей мере за столетие, иначе результатам нельзя будет доверять.*

Там же, на с. 163, он заявил:

Как легко они [кто именно?], *исходя из наблюдений немногих лет, приходят к определённому результату, который не может быть верным*.

Бейс-Балло (1847b, Предисловие) также отметил существование двух противостоящих друг другу школ:

Сторонники и противники влияния Луны почти всегда ограничиваются утверждениями за и против. И те, и другие отступают в свой круг, который не даёт возможности контактов с кругом своих противников.

Сам он (1847a, с. 163) придерживался по меньшей мере одного определённого убеждения, считая *влияние Луны на тепло неоспоримо доказанным*.

Аналогичное, но более обширное исследование Глейшер (1869, с. 343) основал на наблюдениях в том же Гринвиче за 1815 – 1868 гг. На этот раз он изучал влияние возраста Луны на частоту осадков и заключил (с. 350), что *нужны результаты* [новых] *наблюдений, чтобы подтвердить или опровергнуть* это влияние. Он мог бы сослаться на Шюблера (Schübler 1830, начало книги), который опубликовал данные о частоте осадков в трёх немецких городах в течение краткого промежутка времени.

2.4. Леверье. Он (1863, с. 302) отрицал мнение Mathieu, который ещё до Глейшера заявил, что в полнолуние количество осадков возрастает:

Если желательно установить физические законы, то следует воздерживаться от любых сочетаний чисел, на которые особо повлиял один исключительный случай.

Mathieu (там же, с. 305 – 306) не преминул заметить, что Леверье так и не сообщил своего собственного мнения, но в этом виден его благоразумный подход к спорному вопросу. Леверрье, конечно же, хорошо известен: он вычислил положение неизвестной ещё планеты (Нептуна).

2.5. Влияние Луны отвергается. Лишь через несколько лет после появления второго мемуара Глейшера (§ 2.3) Кёппен (1873b, с. 241) заявил, что

Сведения о том, что влияние Луны на метеорологические явления если не отрицается, то всё же весьма малоубедительно, сильно поубавили веру и интерес в этом периоде [capoce].

3. Организация наблюдений

3.1. Прежний период, XVII и XVIII века. Первые сети метеорологических станций появились в середине XVII в. (Wolf 1935/1950, с. 312):

По инициативе Лейбница в Ганновере в 1678 г. и в Киле в 1679 – 1714 гг. производились наблюдения барометрического давления и условий погоды.

Действительно, Лейбниц (1680/1986) предложил проводить метеорологические наблюдения где только это было возможно, см. Keil (1948) и Шейнин (1977, с. 225 – 226). Он, правда, не упоминал международного сотрудничества, но это вполне объяснимо тогдашними политическими условиями Германии.

Jurin (1723) привёл, видимо, первые рекомендации о выборе метеорологических приборов и стандартизации наблюдений. Особо существенной была деятельность общества Societas meteorologica Palatina, учреждённого в 1780 г. и просуществовавшего почти 20 лет (Тихомиров 1931; Kingston 1974). Палатинатом называлась область, подчинённая пфальцграфу; Пфальц расположен на юго-западе Германии. Станции этого Общества в нескольких европейских странах работали в соответствии с едиными правилами, а среди его наблюдателей и корреспондентов были Тоальдо, Cotte и Иоганн Альбрехт Эйлер (Kingston 1974, с. 425).

Частично для указанного общества наблюдения проводились в Скандинавии и Исландии (Kingston 1972). Cotte (Dove 1837) опубликовал сводки метеорологических наблюдений, выполненных во Франции и в отдалённых странах и регионах (Финляндия, Китай, Мадагаскар, Лабрадор, Филиппины). Его источниками служили мемуары различных академий, архивы парижского Королевского общества медицины, а также его собственная переписка. Pueyo (1982a, с. 606) указал, что в 1769 г. Cotte *предложил академии наук* [Парижской?] собрать *старинные метеорологические наблюдения*. Он (1982b) высоко оценил усилия Cotte и его переписку по сбору наблюдений в международном масштабе.

Общество медицины проводило метеорологические наблюдения в нескольких европейских странах примерно в то же время, что и Палатинское общество и опубликовало 12 томов наблюдений (Kingston 1970). Вот, наконец, утверждение Тихомирова (1932, с. 12, только в английском резюме) о наблюдениях в Сибири:

Это исследование совместно с несколькими предыдущими […] *привело автора к заключению, что* [в 1730х – 1740х годах] *в Сибири существовала сеть регулярно работавших метеостанций*. […] *Часть их наблюдений была тайно вывезена во Францию* […] *Делилем и позже их опубликовал Cotte (1774, с. 386 – 387).*

Там же Тихомиров опубликовал инструкцию, составленную Даниилом Бернулли в 1733 г. Она была написана на латинском языке и видимо тогда же переведена на очень трудно понимаемый ныне русский. Точнее, впрочем, не инструкция, а её план. Тот самый Делиль (1738, с. 275 и 278 – 279) сообщил, что Даниил Бернулли *взял на себя разметку делений на семи гидрометрах для* […] *путешествия моего брата*.

Историки науки продолжают обсуждать работу Палатинского общества (Landsberg 1980), причём ещё Lamont (1867b, с. 369) подчеркнул значимость международного сотрудничества, которого оно придерживалось ещё до начала периода международных измерений градуса меридиана. Его комментарий видимо до сих пор остаётся исключительно важным:

Учреждение Палатинского общества […] *оказалось эпохой не только в метеорологии, но также в высшей степени примечательным явлением в истории* [экспериментальной] *науки*.

Наблюдения XVIII века были существенны для развития метеорологии и непосредственно (см. выше), и косвенно, поскольку накапливался опыт повседневной полевой работы в широком масштабе. И всё же Frisinger (1977, с. 108) верно заключил, что даже тогда *было остро необходимо общество* [видимо, международное], *которое бы специально занималось метеорологией*.

Ламберт (1773a, с. 61) предложил проводить международные наблюдения:

Я разделил поверхность Земли на 20 равных треугольников, образующих икосаэдр, с метеорологическими наблюдениями, проводимыми в центре каждого из них. Кроме этих 20 наблюдателей можно будет разместить 12 в общих точках треугольников. […] *Нет ничего легче, чем установить положение этих треугольников на глобусе, но можно также более или менее отступать* …

Этот план, конечно же, подразумевал отсутствовавшее тесное международное сотрудничество и поэтому был мертворождённым, но во всяком случае Ламберт оказался первым после Cotte, кто размышлял о международном изучении метеорологических элементов.

В 1783 г. Шарль и Робер (Charles, Robert) впервые измерили температуру воздуха и давление над Землей, в воздушном шаре (БСЭ, 3-е изд., т. 5, 1971, статья *Воздухоплавание*, с. 254). Кондорсе (1795/1804, с. 536 – 538) предложил международный метеорологический *генеральный план*, включающий наблюдения на море и в воздухе.

3.2. Ламарк. Он (№ 3, с. 103, № 4, с. 147; 1802b, с. 59) обратил особое внимание на общее планирование наблюдений и опубликовал предложения (№ 3, с. 110 – 120) о наблюдениях атмосферного давления, направления ветра и температуры воздуха. Полагая (§ 2.1), что Луна существенно влияет на погоду, он (1801b, с. 303 – 304; № 2, с. 6 – 7, № 3, с. 10) логично убеждал метеорологов записывать фазы Луны и указывать даты наблюдений по лунному календарю. Этой теме он (1801a) посвятил особую статью.

Ламарк (№ 8, с. 188; 1818b, с. 470) даже утверждал, что труды Палатинского общества (§ 3.1) почти бесполезны, поскольку их наблюдения, проведенные на различных станциях, не были сравнимы. Его приговор был слишком суров, однако см. § 4.2.3. При каждом удобном случае он (1802b, с. 131; № 2, с. 113, № 3, с. 7) повторял, что крупная страна (подобная Франции) должна содержать сеть метеостанций, производить наблюдения на них не менее трёх раз в сутки, учредить центральное бюро для обработки всех данных и (1802b, с. 61) регулярно публиковать *таблицы* *наблюдений*. Наличие нескольких метеостанций, как он (1801b, с. 301 – 302) заметил, позволит исключать местные особенности.

Ламарк (1803, с. 118) разумно указал, что

Всё, что можно надеяться установить при помощи подробных наблюдений, определяется исследованием обстоятельств, сопровождавших каждый отмеченный факт, и сравнением одновременных фактов в различных местах. Во всех исследованиях фактов, причины которых сложны, переменны и плохо известны, математика бесполезна.

Как же исследовать подобные факты? О математике он (№ 8, с. 162) заявил, что она *Является лишь инструментом,* который можно *применить верно или ошибочно и получить истину или ошибку.*

Лучше известно выражение Гексли (Huxley 1869, с. L):

Математику можно сравнить с мельницей. […] *Но* […] *что именно от неё получаешь, зависит от того, что закладываешь.* […] *Целые страницы формул не дадут определённого результата, если исходить из неопределённых данных*.

И вот Гумбольдт (1831, с. 413):

Большинство явлений в природе обладает двумя отличающимися друг от друга частями. Одну можно подвергнуть точному исчислению, другую же можно установить только по индукции и аналогии.

Лаплас (1823), см. § 2.1, был более (и, пожалуй, слишком) оптимистичен.

Ламарк (№ 11, с. 150) подчёркивал необходимость наблюдать в установленное время. Он, видимо, имел в виду наблюдения в национальных границах, ибо поясное время было введено лишь в конце XIX в. Его усилия оказались успешными: наблюдения начались в четырёх французских городах, и он сам (1802b, с. 60 – 65, 131; 1818b, с. 469) проводил наблюдения в Париже в соответствии со своим собственным планом 1801 г. (№ 8, с. 203). Его *поддерживал министр внутренних дел Шапталь* (Chaptal), *но* [в 1809 г.] *после него поддержка прекратилась* (№ 11, с. 150).

Химик по профессии, Ж. А. К. Шапталь (1756 – 1832), член Парижской академии наук с 1798 г., был назначен министром в 1801 г. Через много лет Кетле (1869, с. 11) слишком возвышенно охарактеризовал его:

В начале нынешнего века некоторые учёные, размышлявшие о нуждах общества, […] *Лаплас, Фурье, Пуассон, Шапталь, Гаусс и др., почувствовали потребность опустить эту науку* [теорию вероятностей] *с тех высот, на которых она изолировала себя, чтобы привлечь её к государственным делам и помочь идти уверенным шагом к новой открывающейся карьере*.

Здесь всё по крайней мере сомнительно. О Кетле см. Шейнин (1986), здесь мы лишь кратко упоминаем его.

3.3. Гумбольдт. Он (1816, с. 228; 1826, с. 261; 1850, т. 3, с. 375) также полагал наблюдения важными: *Лишь после трудоёмких исследований и объединения большого числа точных наблюдений приходишь к численному результату*.

Восемь тысяч наблюдений *едва хватает, чтобы установить среднюю температуру месяца в некотором месте*.

Сводки численных результатов *являются важной частью непрестанно возрастающего наследства, которое каждое столетие передаёт последующему*.

Вот его характерное высказывание (1843, т. 3, с. 76 – 77):

Наибольший успех метеорологии, и в частности в теории изотерм, который может быть достигнут, достанется Императорской петербургской академии наук, если это славное общество продолжит систему регулярных наблюдений суточных изменений барометра, термометра, гигрометра и т. д. по всей территории Российской империи в соответствии с планом, который представили мой учёный друг Купфер и я.

Этот *план* не попал в переписку Гумбольдта (1962), откуда во всяком случае следует (с. 94 – 95), что Купфер думал об организации наблюдений в России с 1829 г., а Гумбольдт ещё раньше полагал это желательным.

3.4. Вторая половина XIX века. Международный статистический конгресс (Congress 1855, с. xxiii) решил обсудить проблемы климатологии на своей следующей сессии. В 1857 г. Congress (1857, с. 390 – 397) опубликовал вопросник по *физической статистике*, который частично относился и к метеорологии (с. 391 – 392). В нём упоминались *степени и вариации атмосферного давления; динамика температуры и влажности воздуха; атмосферные осадки; бури*.

Вопросник наивно назывался *Элементы, которые естественные науки должны представить статистике*; подробнее см. Шейнин (1980, с. 332). На лондонской сессии (Congress 1861, с. 194 – 195) было зачитано письмо Кёппена *Об общем меридиане для всех стран. После обсуждения, этот вопрос* […], *а также вопрос об общей шкале для термометрических и барометрических наблюдений было рекомендовано* […] *включить в программу следующей сессии*.

Гринвичский меридиан был избран в качестве исходного на международной конференции в Вашингтоне в 1884 г. (*Nature*, vol. 30, 1884, с. 566 и 602). Метеорологов на этой конференции, видимо, не было.

В 1872 г. *предварительная* (Бейс-Балло 1873, с. 1) международная конференция метеорологов, посвящённая стандартизации наблюдений, состоялась в Лейпциге. Бейс-Балло (1872) подготовил для неё вопросник о том, что, где и как часто следует проводить наблюдения и что именно следует публиковать.

В скором времени, как раз перед *окончательным* Венским конгрессом метеорологов 1873 г., Бейс-Балло и опубликовал свою брошюру (1873), в которой обсуждал практическую сторону стандартизации наблюдений. Его первый вопрос (с. 3) был самым общим: *Должна ли быть введена единая для всех стран единица измерения, или же считать достаточным некоторые общие правила для редуцирования мер* [в единую систему]? По общему мнению, первое оказалось предпочтительнее. Кёппен (1873а, с. 19), как можно полагать, выразил общее чувство современных ему метеорологов:

Для распространения и постоянного пополнения однообразной сети наблюдений по всей Земле и для обеспечения её целесообразной и уравновешенной деятельности требуется постоянное международное метеорологическое учреждение.

Подобное учреждение было действительно основано на Венском конгрессе.

Вот типичное утверждение Бейс-Балло (1854, с. 569): *Никакие наблюдения, обработка и публикация не производятся в таких разнообразных видах кроме как в метеорологии*. Вряд ли ему было известно утверждение Кетле (1846, с. 364): *Когда речь идёт о двух государствах, представляется, что находят удовольствие в том, чтобы сделать невозможным любое сопоставление*. Заметим ещё, что Бейс-Балло мог бы сослаться на учёных, которые стремились ввести метрическую систему мер.

4. Статистический метод

4.1. Средние значения. Гумбольдт. *Основной принцип моих работ состоит в стремлении представить явления в мире в качестве единого природного целого*. Так Гумбольдт (1845 – 1862, т. 3, с. 9) сформулировал своё отношение к изучению природы. Оно было и остаётся типичным для многих крупнейших учёных, хоть и видоизменялось с развитием науки. Сам Гумбольдт, например, создал новую научную дисциплину, климатологию, см. ниже. Он (1836, с. 287; 1845 – 1862, Bd. 1, с. 364; 1843, t. 1, с. 83) также выразил свои общие мысли подробнее:

Для нашей эпохи характерна […] *возможность связи явлений путём обобщения эмпирических законов и взаимная помощь, которую обеспечивают науки, длительное время остававшиеся изолированными.*

Все процессы […] *неизмеримого воздушного моря представляются столь тесно связанными друг с другом, что* *каждый отдельный метеорологический процесс одновременно видоизменяется всеми остальными.*

Точные науки достигают успеха только по мере рассмотрения физических процессов в их множестве и постепенного отказа от мнения о чрезмерном значении точек максимума, изолированно расположенных на линиях фактов, и экстремумов температур, достигаемых в течение нескольких дней года.

Первое высказывание было посвящено началу наблюдений земного магнетизма. Körber (1959, с. 334 – 335; 1958) описал эту сторону деятельности Гумбольдта. В 1958 г., как видно из заглавия, автор также остановился на работах Гаусса, хотя и не затронул его переписку 1845 г. с Sabine (1867) и Дж. Гершелем (Herschel et al 1846, с. 64 и 42 – 45) о программе соответствующих измерений в международном масштабе.

Можно привести и замечание Гумбольдта (1843, т. 1, с. 405), аналогичное последнему из указанных выше: Наличие *крупных самородков не всегда является благоприятным указанием среднего содержания золота в окрестных наносных образованиях.*

Таким образом, Гумбольдт обусловил изучение всех естественных явлений установлением соответствующих средних значений (состояний), которые указывают *постоянное в переменном* (1845 – 1862, т. 1, с. 82), см. также Шейнин (1980, с. 330). Вот его высказывание о вулканах (1845 – 1862, т. 3, с. 288):

Знание о многих сотнях действующих вулканов […] *ещё настолько несовершенно, что единственный решающий метод, т. е. метод средних чисел, нельзя применить.*

Он не указал, что этот метод требует однородных данных. И несколько странно, что его определение климата (1831, с. 404) не было непосредственно связано со средними значениями. Впрочем, позднейшие учёные указывали эту связь всё более чётко (Körber 1959, с. 296). Видимо выражая общее мнение, Чупров (1922/1960, с. 151) назвал климатом систему соответствующих средних значений, а Godske (1966, с. 272) выразил ту же мысль иначе:

Климатология – наука, посвящённая многомерным распределениям различных метеорологических элементов в различные периоды и в различных регионах.

Автор, однако, назвал эту фразу *весьма общей и практически бесполезной*, с чем трудно согласиться.

Гумбольдт (1818, с. 179) действительно пытался определить *среднюю динамику атмосферы*, чтобы выделить *определённую закономерность в изменениях явлений*. Его наибольшим достижением (1817) было здесь введение *изотерм*, т. е. линий средних величин температур, которые ясно указывали её распределение в различных регионах. Понятие о них он (1845 – 1862, т. 4, с. 59) отыскал у Галлея: *Мои* […] *линии равного тепла* […] *образованы по полной аналогии с изогоническими кривыми Галлея*. В 1701 г. Галлей (Chapman 1941, с. 5) опубликовал карту Северной Атлантики с линиями равного магнитного склонения на эпоху 1700 г.

Итак, Гумбольдт (1817, с. 466) определил понятие изотерм, провёл различие (как и его предшественники) между солнечным и истинным климатами (с. 471), начертил изотермы 0, 5, 10 и 15° С на карте мира (с. 502), ввёл линии равных температур для зимы и лета (с. 532), оценил падение температуры с высотой места (с. 594) и среднюю температуру сезонов для поясов, расположенных между изотермами 0 и 5, 5 и 10, …, 20 и 25° и в зоне со средними температурами выше 25° (схема, помещённая после с. 602). Его сочинение отделило климатологию от метеорологии. Удачно об этом выразился Dove (1837, с. 121 – 122):

Ранее старались определить крайние границы изменений [метеорологических элементов]. […] *Ограничение проблемы считалось её решением.* […] *Вопрос о среднем состоянии атмосферы* […] *указывает на гораздо более высокое положение науки*.

Он добавил, что метеорологи должны также изучать соответствующие уклонения, см. § 4.2.2. Одной из сопутствующих проблем было выделение местных неправильностей, что весьма напоминало изучение уклоняющихся наблюдений в астрономии и геодезии. Сам Гумбольдт сосредоточился на этом:

Большая задача метеорологии состоит в установлении изгибов этих линий [изотерм] *и в определении, при видоизменениях, вызванных местными причинами, постоянных законов распределения тепла* (1811/1825 – 1827, т. 3, с. 66).

Местные искажения должны быть исключены. *Однако, следует учитывать те, от которых зависят важнейшие явления, например, распределение и развитие органической жизни* (1817, с. 469).

Метеорология развивается медленно, потому что методы наблюдения несовершенны*, а отделение переменных и проходящих явлений, возникающих под влиянием возмущающих причин, исключительно трудно* (1818, с. 179).

Чтобы открыть законы природы необходимо до исследования причин местных пертурбаций установить среднее состояние атмосферы и постоянный тип этих вариаций. (Там же, с. 190).

Уже в 1818 г. Гумбольдт, видимо, осознал необходимость изучать уклонения от средних состояний, т. е. предвидел основные черты последующего развития метеорологии.

4.2. Среднее арифметическое. Кёппен (1874, с. 3) разумно заключил:

С середины прошлого столетия метеорологические исследования проводятся в двух параллельных направлениях: изучаются отдельные явления и средние состояния. В первой половине нынешнего века второе из них оказалось намного важнее, и лишь недавно начали снова проявлять больше интереса к единичным событиям. Это и должно было случиться, ибо иначе метеорология полностью изолировала бы себя и потеряла своё место среди физических дисциплин.

Можно вполне считать, что введение среднего арифметического в метеорологию было важнейшим шагом в её методологии, поскольку это впервые дало возможность ориентироваться в бесконечных сложностях явлений погоды. […] *Но можно также уверенно считать, что исключительное применение этого метода не позволило бы проводить естественнонаучные исследования в метеорологии или познавать причинные связи процессов погоды, ибо среднее арифметическое, в котором совместно погребены самые различные состояния, является не реальностью, а отвлечённой величиной.*

Справедливая оговорка, но ведь нельзя совместно обрабатывать все данные без их предварительного анализа и отбрасывания особых случаев. Leighly (1949) выбрал утверждение Кёппена об отвлечённом характере среднего арифметического в качестве своего эпиграфа. Он (с. 658) также утверждал, что

Неудовлетворённость уже вычисленными средними была движущей силой всех попыток усовершенствовать климатологию.

В течение своей долгой и плодотворной научной карьеры Кёппен не менее двух раз возвращался к статистическому методу в метеорологии. Он (1913, с. 113) указал, что *У нас среднее арифметическое является не вероятнейшим значением конкретной величины, а абстракцией*. Кёппен (1936, с. 206) по существу повторил своё прежнее высказывание, но уже в первом случае рекомендовал ввести элементы корреляционного анализа.

4.2.1. Смысл среднего арифметического. Несколько раньше Кёппена Lamont (1867a, c. 243 – 244) высказал озабоченность отвлечённым характером некоторых средних. Уместно поэтому упомянуть Давидова [vi, § 5]: статистики пользуются средними и при измерении существующих, и при описании абстрактных величин (например, стоимости хлеба), причём различие между двумя видами средних существенно лишь в смысле свойств уклонений от них.

Пусть x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – средние суточные температуры некоторого места, и $\overline{x}$ – средняя годовая или месячная температура. Ни уклонения ($\overline{x} - x_i$), ни разности соответствующих величин в стоимости хлеба не должны подчиняться никакому определённому распределению. Неудивительно, что Lamont (1867a, с. 247) утверждал, что

Неправильные атмосферные изменения следует считать не случайными в смысле исчисления вероятностей, а колебаниями неравной длительности.

Применение среднего арифметического и вероятных ошибок он (с. 245) допускал лишь в некоторых (не пояснённых) случаях. В то же время он (с. 243) заметил, что метеорологи условно допускают, что ошибки наблюдения распределены [нормально].

Учитывая тенденцию погоды к своему сохранению (§ 5), он (с. 245) рекомендовал необычную меру:

Уже более 30 лет как я начал применять разности одновременных наблюдений [в разных местах] *вместо обычных метеорологических констант. Теперь я убеждён, что таков самый подходящий путь, чтобы построить метеорологию как математическую дисциплину.*

Действительно, 30 лет ранее он (прим. 1839, с. 263) заметил, что, поскольку атмосферное давление и температура существенно изменяются, трудно вывести *уверенный средний результат и один-единственный год соответствующих* [т. е. в различных местах] *наблюдений дают ту же уверенность, что и 30-летний ряд обычных данных.*

Последнее утверждение автор никак не обосновал.

В одном случае Кетле (1849, ч. 1, гл. 4, с. 53) заметил, что наблюдения в трёх точках в Брюсселе и его окрестностях *обеспечивают разности* […], *находящиеся в соответствии с теми, которые теория вероятностей назначает случайным ошибкам.*

Случайные ошибки могут следовать весьма различным законам распределения.

Lamont (прим. 1839, с. 264) также заметил, что относительные наблюдения уменьшают объём полевых работ и не возражал против применения теории вероятностей при обработке данных. Он мог бы сослаться на относительные измерения силы тяжести, которые производились с начала XIX в. Ни его нововведение, ни указание Кетле не были подхвачены, см., однако, § 1 о пространственном распределении метеорологических элементов.

4.2.2. Уклонения от среднего арифметического. По Бейс-Балло (§ 1), изучение уклонений от средних значений (состояний) ознаменовало вторую стадию в развитии метеорологии. Он (1847b, с. 108) также заметил, что в астрономии

Вначале орбиты [планет] *считались чисто эллиптическими, затем установили уклонения* [пертурбации]. […] *Этот путь характерен для всех наук, которые не подчиняются экспериментированию*.

Можно добавить, что около двух столетий за фигуру Земли принимался эллипсоид вращения, и лишь в конце XIX в. началось изучение его отклонения от физической поверхности Земли, а точнее от геоида.

Позже Бейс-Балло (1850b, с. 42; 1885, с. 107) снова приписал Дове изучение уклонений от средних.

Итак, факты природы следует изучать в определённой последовательности, однако в метеорологии положение, видимо, оказалось иным: трудно было изолировать влияния какого-либо определённого порядка, ср. указание Гумбольдта 1818 г. в конце § 4.1.

Дове (1837, с. 122) заметил другие, *внутренние* препятствия:

Господство среднего стало таким могучим […]*, что исследования суточных и годичных изменений допускались лишь тогда, когда они приводили к методам, при помощи которых можно было самым удобным и верным путём устанавливать средние состояния*.

Какие же уклонения рассматривал сам Дове? Известно, что он ввёл месячные изотермы, описывавшие уклонения соответствующих температур от средних годичных значений (1850, с. 198): *Линии, которые до сих пор назывались изотермами, теперь стали годичными изотермами*. Его нововведение было вполне естественным, ведь сам Гумбольдт ввёл линии равных температур для зимы и лета (§ 4. 1).

В другом месте Дове (1848, с. 395) сформулировал задачи метеорологии: *Вычисление средних, установление законов периодических изменений и правил для определения нерегулярных изменений*.

Изучение месячных изотерм было, вероятно, направлено на установление законов периодических изменений, и во всяком случае, они описывали временное распределение уклонений температуры. Но Дове придавал не меньшее значение их пространственному распределению. Во-первых, он (там же, с. 401) указал:

Уже поверхностный взгляд […] *показывает, что более крупные уклонения от среднего распределения температуры происходят не локально, а одновременно распространяются более широко*.

Далее, Дове (с. 393) ввёл новое понятие:

Места, чьи [месячные] *температуры соответствуют среднему для своей географической широты, обладают* *нормальной температурой; все места, чья температура ниже или выше, соответственно,– относительно холодными или тёплыми*.

Таким образом, Дове обрисовал путь, по которому следовало изучать пространственно-временное распределение температуры и в климатологических исследованиях, и для изучения погоды, притом ещё до введения карт погоды.

4.2.3. Конкурирующее среднее. В XVIII в. Cotte (1788b, с. 9) назвал выбор среднего ($\hat{x}$) из крайних температур месяца или года *весьма дефектным способом*, поскольку принимаются во внимание только два наблюдения, которые к тому же *представляют не естественное, а неистовое состояние; одним словом, это метод ленивых*. Напротив, как он добавил, среднее из всех наблюдений является *истинным*.

Но вот Даниил Бернулли (1778, § 10) в астрономическом контексте утверждал, что $\hat{x}$ *менее часто ошибочно*, *чем полагал до того, как исследовал это*. Никаких подробностей он не привёл. Кроме того, Гумбольдт (1817, с. 489) заметил, что *ранее* $\hat{x}$ широко применялось для оценки среднегодовой температуры, а Дове (1839b, с. 282) оставил аналогичное утверждение относительно Палатинского общества (§ 3.1):

В соответствии с тогдашним определением среднего в большинстве мест температура отдельных месяцев определялась из двух абсолютных экстремумов. С современной точки зрения науки это число весьма малоценно.

Кетле (1846, с. 74) утверждал, что $\hat{x}$ можно вычислять, чтобы *составить представление о температуре суток*. Подобная практика видимо иногда применялась почти до середины XX в., хотя Гумбольдт (1817, с. 493) рекомендовал оценивать среднюю суточную температуру даже не обычным, а взвешенным средним арифметическим. Обычное среднее, как он пояснял, не учитывает момента третьего наблюдения относительно обоих крайних. Он, стало быть, имел в виду случай трёх суточных наблюдений.

4.3. Кривые плотности. Пирсон ввёл различные плотности в статистическую практику, а Кетле вместе с последующими учёными оказался связующим звеном (мы добавим: не очень надёжным) между ним и Лапласом (Stigler 1977, с. 332 – 333).

Обсуждая наблюдения атмосферного давления, Кетле (1846, с. 168) заявил:

Было выяснено, […] *что понижение ртути относительно среднего как правило превышает её повышение над этим членом. Случаи, когда среднее не находится на равных расстояниях от крайних значений, и когда кривая возможностей теряет симметричность, достаточно часты. Они тем более заслуживают изучения, поскольку отсутствие симметрии всегда происходит от более или менее странных причин, влияние которых можно оценить*.

Он (с. 412 – 424) также опубликовал письма Браве 1845 г. по той же теме. Браве спросил, всегда ли измерения *физической величины* подчиняются [нормальному] распределению, и сам же ответил: *Это то, что я не считаю возможным принимать априорно*. Он привёл в пример рост человека, атмосферное давление и астрономические наблюдения.

Отклонение ошибок результатов астрономических наблюдений от нормального распределения могло быть замечено уже в 1818 г., но эта возможность была упущена (Бесселем), см. Шейнин (2000). Liagre (1852, с. 502), однако, утверждал, что

Атмосферное давление колеблется около среднего состояния, представленного средним из наблюдённых давлений. Эти уклонения от указанного состояния распределены по порядку своей величины в соответствии с законом возможности.

Более интересен его вопрос: может ли *кривая возможностей* атмосферного давления иметь два максимума? В таком случае среднее арифметическое *Никак не представляло бы истинное среднее давление, которое могло бы наблюдаться только весьма редко*. Он не считал подобный случай возможным.

Эмпирические распределения *более или менее случайных* величин появлялись в метеорологии даже до середины XIX в. Schouw (1827) опубликовал распределение ветра в различных европейских городах. В Копенгагене, например (с. 11), в январе северный ветер наблюдался в 9% времени, северо-западный, – в 10% и т. д.

В позднейшей популярной брошюре Кетле (1853, с. 63 – 68) вернулся к традиционным представлениям. Он (с. 63) указал, что *Из физических наук немногие более часто обращаются к этим* [вероятностным] *видам оценивания, чем метеорология*. Затем он (с. 64 – 65) заявил, что при большом числе наблюдений их уклонения от среднего арифметического аналогичны *ошибкам природы* и что они распределены по *закону случайных причин*.

Но что понимать под этим законом, который, как оказывается (с. 57), может быть асимметричным? И ещё больше недоумеваешь, если заметишь у Кетле (1848, с. 27 и 45) *закон случайных вариаций*! Забыв таким образом своё прежнее мнение, Кетле (1853) указал, что только *специальные причины* и аномалии искажают распределения (какие же?) метеорологических элементов, подобных направлению ветра, облачности, влажности.

Раньше он (1846, с. 182) даже утверждал, что

шансы иногда не подчиняются никакому ощутимому закону, и кривая возможностей принимает самую причудливую форму.

Meyer (1891) рассматривал обработку метеорологических данных и заявил (с. 32), что *исчисление ошибок в принципе неприменимо*, поскольку плотности асимметричны. Он (с. 34) продолжил:

В метеорологии следует оставить исчисление ошибок совершенно в стороне, а время и усилия потратить на иные исследования, в первую очередь на определение экстремумов.

Позднее Пирсон (1898) использовал данные Мейера (1891, с. 108) об облачности в Бреслау для проверки применимости своей теории асимметричных плотностей к изучению антимодальных кривых. В 1897 и 1902 гг. он был соавтором статей о корреляции между атмосферным давлением в двух различных местах, а в 1904 г. ту же тему описал один из его последователей.

4.4. Статистическая метеорология. Её формирование оказалось нелёгким. Начиная с Ламарка, который (§ 6.3) постулировал существование и большое значение этой научной дисциплины, учёные постепенно развивали статистический метод в метеорологии, или, точнее, при исследовании погоды, однако Кетле (1846, с. 275) решительно заявил, что метеорология чужда статистике:

Элементы, которые физик изучает с наибольшей заботливостью, не совпадают с теми, которые останавливают внимание статистика. Статистик хочет прежде всего выяснить то, что может повлиять на человека и способствовать его благополучию, физик же занимается изучением природы, законы которой он исследует вне зависимости от идеи о пользе, которую мы можем извлечь. Это различие существенно, потому что многие авторы переносят в статистику другие, чуждые ей науки как физическую географию, минералогию, ботанику, метеорологию.

Здесь всё в лучшем случае устарело, но противники внесения статистического метода в естествознание длительное время удерживали свои позиции. В 1867 г. сессия Международного статистического конгресса во Флоренции приняла меры по стандартизации метеорологических наблюдений. Соответствующая резолюция, а точнее, её основная идея, была при обсуждении подвергнута критике. Было предложено (Quetelet 1873, с. 75), чтобы

Итальянское статистическое бюро пригласило директоров метеорологических бюро различных стран и регионов Европы обсудить принципы и средства для взаимной информации о наблюдениях в определенном числе мест каждого государства, способа подготавливать и производить комплекс работ.

Г-н Энгель полагал, что это предложение излишне: <u>Статистика должна ограничиваться, поле её деятельности уже достаточно широко. Она должна оставить естественным наукам их область и не пытаться вторгаться в неё</u>. Того же мнения придерживался г-н Воловский. Г-н Фарр, напротив, полагал, что метеорология не может запретить статистике свою территорию: <u>Почти все факторы, которые статистика</u>

охватывает, регулируются холодом, теплом, осадками, и если мы не примем это во внимание, то оставим настоящий пробел в науке, которую мы культивируем.

Почти в то же время Бейс-Балло (1874) представил отчёт о статистическом методе в метеорологии. Van Everdingen (1953) составил библиографию его работ, неполную, но, видимо, единственную, и указанный отчёт упомянут там на с. 214. Тогда же и Кёппен (1875, с. 260 – 261) указал, что с тех пор, когда было установлено, что направление и сила ветра зависят от распределения атмосферного давления, предсказания погоды добились *существенной степени вероятности*. В дальнейшем изложении он, однако, упомянул лишь штормовые предупреждения.

Кёппен даже сравнил открытие Бейс-Балло *и других* с достижениями основателей эволюционного учения, Дарвина и Уоллеса. Основная работа Бейс-Балло по этой теме оказалась недоступной, однако он обсуждал свои результаты в другой статье (1863, с. 95 – 99) и указал там: *В C. r.* (1857a) […] *мы сообщили свой первый результат. Подробнее он описан в журнале la Science* [Париж], *год 3-й* [1857], *№ 87, с. 479*.

Основной статистический результат его статьи (1857a) – это корреляционная таблица, показывающая, как сила ветра в данной точке зависит от разности предшествующего атмосферного давления в двух других местах. Он заключил, что если эта разность не превышала 2 *мм*, *почти наверняка* сила ветра не превысит 30 *кг/кв. м.*; при разности в 2 – 4 *мм* ветер *вероятно* не превысит 40, и т. д. Правило Бейс-Балло (см. ниже), которое он не обосновал теоретически, относилось к северному полушарию. Его предшественниками были Brandes, 1816 – 1820 (Тихомиров 1932), J. H. Coffin и W. Ferrel (Burstyn 1970).

Detwiller (1982) кратко описал историю метеорологии и специально исследовал результаты Бейс-Балло. Будучи директором нидерландского Метеорологического института, он указал в Институтском ежегоднике *Jaarboek* (1857b, с. 347):

Обнаруженное правило состоит в том, что за существенными барометрическими различиями в пределах нашей страны следуют более сильные ветры, и в основном ветер, перпендикулярный или почти перпендикулярный направлению наибольшего барометрического градиента. Ветер с востока следует за убыванием барометрического давления с севера на юг, а с убыванием с юга на север – ветер с запада.

И позже (1860, с. 50): *Повернитесь спиной к ветру, и самое низкое давление окажется слева, а самое высокое – справа*.

Заметим, что Бейс-Балло был иностранным членом Петербургской академии наук.

5. Зависимость погоды от её предшествующего состояния

5.1. Ламарк. Он был одним из первых, заметивших зависимость погоды от её предшествующего состояния. Вот его мысли об этом (№ 5, с. 5 и 8, № 11, с. 143).

Все состояния вещей в атмосфере […] *происходят не только ввиду сочетания причин, которые стремятся действовать, но также под влиянием состояния вещей, которое существовало прежде*.

Ясная или плохая погода может продолжаться дольше, чем *должна*, потому что может установиться *стационарное состояние. И тогда она переменится только в результате сильного влияния*.

Действенность любого влияния на атмосферу неизменно пропорциональна положению, в котором вещи существовали в этой атмосфере прежде.

Ламарк (№ 11, с. 122) по существу повторил своё первое высказывание, подчёркивая его громадное значение и возведя его в ранг афоризмов. В другом сочинении он (1818b, с. 465) привёл малоудовлетворительное качественное обоснование этого принципа.

5.2. Дальтон. Он (1793/1834, с. 180 – 181) попытался изучить влияние северных сияний на погоду. В Кендалле (Англия) он заметил 227 сияний и записал данные о последующей погоде. В 139 случаях погода после сияния была ясная, притом 100 раз из 129 она удерживалась не менее двух дней, а в одном случае – не менее 12.

Он привёл свои данные полностью и сравнил продолжительность ясных дней с ожидаемой (т. е. статистически отмеченной) при отсутствии сияний. Так, в 227 случаях n ясных дней без перерыва имели вероятность $227(148/365)^n$, где 148 – количество ясных дней. Вот его окончательный вывод:

Представляется, что сияние не только благоприятно для следующего дня, но указывает, что ряд ясных дней […] *будет более вероятным, чем в противном случае.*

Дальтон, однако, не отметил (что было естественно для того времени), что значения случайной величины не всегда совпадают со её ожиданием, равно как не определил действительного числа периодов ясных дней, происходящего вне зависимости от сияний.

5.3. Кетле. Он (1852; 1853, с. 68) неоднократно упоминал продолжительную ясную или дождливую погоду. В двух других случаях он (1854, с. 23; 1867, с. 39 – 40) оставил аналогичное замечание относительно периодов тёплой или холодной погоды. Вот его доводы.

Пусть ряд из S элементов (дней) состоит из αS элементов a, дождливых дней, и $(1 - \alpha)S = b$ элементов, ясных дней, причём α и $(1 - \alpha)$ – соответствующие вероятности. Кетле (1852) вычислил вероятности периодов *bab, baab, baaab*, … и определил α, оказавшееся равным 0.635 (с. 315). Более подробно об этом см. Stigler (1977, с. 337), мы же (§ 5.4) опишем аналогичную работу Кёппена.

Кетле (1852, с. 316; 1849 – 1857, т. 2, ч. 5, с. 29 и 83) заключил, что шансы сохранения погоды и её изменения *не являются независимыми*, т. е. он рассматривал цепь Маркова с двумя возможными состояниями, и предположил, что периоды погоды соответствуют независимым испытаниям Бернулли, затем вычислял апостериорную вероятность α появления случайного события (например, дождя) по принятой им схеме и ограничился указанным выше выводом.

Кетле (1849 – 1857, 1857) принял, что в Брюсселе число дождливых дней в году примерно равно числу ясных дней; в предыдущей статье он (1852, с. 314) сослался по этому поводу на статистические данные за 18 лет. Затем он сравнил распределение 551 периодов дождя продолжительностью до 12 дней с биномиальными коэффициентами разложения $(1 + 1)^{12}$. Поскольку сумма этих коэффициентов равна 4096, он до сравнения умножил общее число периодов на 4096/551. Оказалось, что наблюдения определённо опровергают указанное предположение.

Dufour & Defrise (1981, с. 9) заметили, что *Кетле главным образом* обсуждал наблюдения *при помощи исчисления вероятностей. Он был первым, кто систематически так поступал в метеорологии*. Всё же, точнее, при помощи *элементов* теории вероятностей, притом не ввёл никаких новых методов в статистическую обработку данных (§ 4.3) и возражал против признания статистической метеорологии в качестве отдельной дисциплины (§ 4.4). Кетле также собирал и систематизировал метеорологические данные, и Кёппен (1875, с. 256, обратный перевод) указал, что именно бельгийские наблюдения *целой сети метеостанций* […] *с ранних 1840-х годов оказались самыми длительными* [в Европе] *и исключительно ценными*.

Faraday (1991 – 2008) несколько раз выражал высокое мнение об измерениях атмосферного электричества, которые провёл Кетле. Вот выдержки из двух его писем (№ 1367, 1841 г., в т. 3, 1996, и № 2263, 1850 г., в т. 4, 1999):

1) *Вы действительно служите достойным примером активности и мощи для всех работников науки, и если я не могу подражать Вам, то по крайней мере могу понять и оценить это*.

2) Фарадей одобряюще заметил отсутствие *воображаемого или гипотез* в работе Кетле и добавил:

Таков был истинный метод, при помощи которого научные успехи в этой очень трудной части [наук] *могут быть действительно достигнуты*.

Dufour (1947) посвятил большую часть своего очерка описанию успехов Кетле в метеорологии.

5.4. Кёппен. Ссылаясь только на сына Кетле, Эрнста, Кёппен (1872) также попытался статистически исследовать периоды хорошей и плохой погоды. Он отстаивал необходимость сравнения эмпирических данных со статистическими моделями:

Несоблюдение этого условия уже неоднократно приводило к опрометчивым выводам, когда полагали, что установили в числах следы естественных законов, которые являлись лишь чисто математическими необходимыми последствиями скопления случайностей (с. 194).

Примеров он не привёл. Пусть (с. 195) дана последовательность большого числа элементов *a* и *b*; первые произошли αS раз, вторые – $(1 - \alpha)S$ раз, $0 < \alpha < 1$. Разделим последовательность на $(S - 2)$ подпоследовательностей по три элемента в каждой без изменения порядка их следования. Ожидание (чего Кёппен не указал, ср. аналогичное замечание в § 5.2) количества серий *bab* будет равно

$$N_1 = \alpha(1 - \alpha)^2(S - 2).$$

Аналогично, серий *baab* окажется

$$N_2 = \alpha^2(1 - \alpha)^2(S - 3)$$

и т. д., а всех видов подобных серий с элементом *b* в начале и конце будет

$$N = N_1 + N_2 + \ldots = \alpha S(1 - \alpha)^2(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots) = \alpha S(1 - \alpha). \quad (1)$$

Заметим, что ни он, ни Кетле (§ 5.3) не учли различия между $(S - 2)$, $(S - 3)$ и т. д.

Вероятность того, что подпоследовательность одних и тех же элементов закончится, будет теперь равна

$$p = \frac{2N}{S} = 2\alpha(1 - \alpha).$$

Кёппен применил этот результат для качественного изучения эмпирических периодов сохранения погоды. Формулу (1) он вывел для больших значений S, предполагая, что αS и $(1 - \alpha)S$ – целые числа. Ожидаемое число серий оказалось равным

$$2N = 2\alpha S(1 - \alpha) + 1.$$

Таково было первое применение теории серий в естествознании, и произошло оно, очевидно, в метеорологии. В том же сочинении Кёппен (с. 232) придал большое значение применению метеорологических исследований для растениеводства: метеорология обеспечивает

Метод, дающий возможность определить самую выгодную культуру (обеспечивающую либо наибольшую возможную прибыль, либо наименьший возможный риск) по данным вероятностям длительности состояния погоды.

Подчеркнем, что Кёппен указал два различных критерия выгоды.

6. Приложение: Ламарк

6.1. Введение. Ламарк, крупнейший биолог своего времени, много занимался физикой, химией и метеорологией. Packard (1901, pp. 85 – 87) назвал его работы по физике и химии почти бесполезными ввиду пустых предположений, но во всяком случае с метеорологией дело обстоит совсем иначе. Правда, в XIX в. этого не признавали; Muncke (1837) не упомянул Ламарка в своём обширнейшем обзоре, а Schmid (1860) сообщил о нём лишь в связи с влиянием Луны на погоду. Заметим, что Ламарк сам (1800 – 1811, № 10, с. 7 – 19) обобщил свои метеорологические достижения.

Но вот Shaw & Austin (1926/1942, с. 130) назвали его изучение погоды *пионерным*. Они также подчеркнули, что *вместе с Лавуазье, Лапласом и другими он установил сеть станций* и первым классифицировал облака, см. также Хргиан (1959, с. 105). Именно Ламарк положил начало метеорологическим наблюдениям во Франции (§ 3.2), тогда как ни Лавуазье, ни Лаплас были здесь не при чём. Grimaux (1888, с. 129) упоминает только одну работу Лавуазье, а точнее статью трёх авторов, включая его (Bézout et al 1780), которые сравнили особо холодные зимы 1709 и 1776 гг. Cotte (1788a, т. 1, с. iv) также коснулся низких температур 1776 г.: *Малое согласие приборов, которые их измеряли, привлекли физиков к исследованию термометров*.

Burkhardt Jr (1977, с. 104) заключил, что

В любой науке он [Ламарк] *считал себя обязанным устанавливать её на прочном основании. Он был уверен, что сложные явления происходят по правильным схемам*.

По крайней мере по отношению к метеорологии (и биологии) эта характеристика верна. Автор (с. 105) также доказывал, что *Теоретические предположения Ламарка в метеорологии сами по себе не имели прямого отношения к его биологии*. Да, но взгляды Ламарка на случайность в метеорологии (§ 6.4) были бы безусловно интересны и историкам биологии. Кроме того, Ламарк считал, что изучение влияния атмосферных явлений на животных и растения составляет одну из основных целей метеорологии (§ 6.3). Некоторые сведения о нём см. в §§ 2.2, 3.2 и 5.1.

По меньшей мере 23 метеорологических рукописей Ламарка хранятся в парижском Muséum national d'histoire naturelle (Vachon et al 1968), в том числе

№ 754(2): *Метод вычисления влияния лунных точек* […] *для определения вероятностей* (1806).
№ 755-2: *Основные соображения об изучении метеорологии*.

Ламарк (№ 2, с. 129) сообщил читателям, что вот-вот заканчивает составление *Теории земной атмосферы*. В нескольких последующих выпусках этого ежегодника были опубликованы объявления о предстоящей публикации этой книги, но она так и не появилась. Ламарк (1802а, с. 187) наверное имел в виду её рукопись, когда упомянул *работу по метеорологии*, которой он *длительное время занимался*. Позже он (№ 11, с. 107) сообщил о своём желании составить *специальный трактат по метеорологии*. Наконец, несколько страниц посмертно опубликованных рукописей 1810 – 1814 гг. (Vachon et al 1972) были посвящены метеорологии. Там, на с. 96, помещено его обещание, так и не выполненное, вернуться к этой теме во второй книге этой работы. Впрочем, она появилась в том же источнике.

Некоторые работы Ламарка остались незаконченными, а многие были предназначены для широкого круга читателей. Видимо по этой причине он повторял многие доводы, особенно о пользе метеорологических изысканий и бесцельности случайного сбора наблюдений.

Первые результаты своих метеорологических исследований Ламарк (1798, с. 429) представил Парижской академии наук в 1777 г.:

Хотя в то время академия благоприятно приняла мой труд и призвала меня продолжить его (что, кроме того, видно по отчёту в начале моей книги (1795, с. 4)), мой мемуар [какой?] *не был отдан в печать. Основная причина была в том, что мои изыскания стали пространными*.

Последующие труды Ламарка быть может заменили указанный мемуар. Ламарк (№ 10, с. 1) указал, что

Сильные морозы зимы 1776 г. привлекли моё внимание, и я с тех пор заинтересовался явлениями в атмосфере и в 1778 г. представил академии наук некоторые свои наблюдения.

Ту же холодную зиму изучали и другие французские учёные, см. выше. Cotte (1788c, с. 205) упомянул Ламарка: *Я слышал в Академии чтение прекрасного мемуара об основных явлениях в атмосфере*. Ламарк дал ему рукопись мемуара, и Cotte (с. 205 – 215) описал его содержание.

Ламарк (1798, с. 431) заметил, что *в течение более 20 лет поочерёдно возобновлял и оставлял эти интересные исследования*. В возрасте 74 лет он (1818b) опубликовал свою последнюю метеорологическую статью, и там, на с. 477, распрощался со своими читателями:

Автор […] *не будет впредь ничего публиковать* [по метеорологии]; *его преклонный возраст и труды по зоологии становятся непреодолимыми препятствиями*.

Аналогичное заявление Ламарк (№ 11, с. 1) оставил намного раньше: *Мой возраст, слабое здоровье и мои дела заставляют меня вопреки моим желаниям прекратить заниматься этими периодическими брошюрами*.

6.2. Метеорология. Ламарк предложил несколько прямых и косвенных определений метеорологии, которые не всегда совпадали друг с другом, а иногда противоречили друг другу. Частично это можно объяснить тем, что в то время никакого установившегося определения не было. Вот некоторые его высказывания.

Теория атмосферы или метеорология, вместе с гидрогеологией и биологией, относится *к физике Земли* (1802а, с. 8). Биосферология заменила физику Земли (Гегамян 1981), но метеорологию этот автор не упомянул.

Метеорология (№ 5, с. 1)

Влиятельная наука, которая, к сожалению, до нынешнего времени не добилась крупного успеха, потому что ей серьёзно пренебрегали. Она рассматривает физические знания применительно к состоянию и вариациям (в № 6, с. 5, *крупным вариациям*) *атмосферы и исследует известные физические причины, которые могут приводить к ним*.

В частности (с. 111),

Должно быть установлено, оказывают ли Луна и Солнце в нашем климате в их каждом частном и периодически повторяющемся положении заметное влияние на эти атмосферные вариации.

Этот вопрос был чисто риторическим: Ламарк был уверен в подобном влиянии (§ 2.1). Здесь и в других местах он ограничился изучением метеорологии [климата] умеренной зоны или только Франции. Погодой экваториальных стран Ламарк не интересовался, возможно, потому, что она устойчивее.

Ламарк (№ 3, с. 4 – 5) видимо отличал климатологию от метеорологии:

Если […] *причины атмосферных вариаций* […] *не регулярны, нет никакого смысла в метеорологических наблюдениях ни в каких целях, кроме как в определении характера климата каждого государства*.

Ламарк (№ 11, с. 9 – 10) также утверждал, что атмосфера изучается с тройной целью (см. § 6.3):

Познать характер климата каждого места, […], *т. е. атмосферную статистику;* изучать *атмосферную физику и химию;* установить общие причины изменений состояния атмосферы, штормов, *ветра всякого рода и т. д*.

Именно последняя цель, как он полагал, соответствовала метеорологии *в строгом смысле*. Он (1802b, с. 300) указал, что метеорология – это

Общее познание метеоров, непосредственных причин образования и их, и тех, которые составляют общие характеристики крупных вариаций в атмосфере в основных частях мира.

Там же, на с. 133, Ламарк привёл другое определение метеорологии, указывая, что она изучает атмосферу *в наших климатах*. Наконец, по меньшей мере в двух работах, включая последнюю статью (1818b, с. 451), Ламарк называет основной задачей метеорологии *познание метеоров*. Он (1818a, с. 416, 417) поясняет: метеорами являются

Различные явления, которые рождаются, проявляются и исчезают […] *в недрах земной атмосферы.* […] *Эти явления чужды природе, состоянию и свойствам атмосферы и происходят от внешних причин*.

Затем, однако, оказывается (№ 7, с. 142), что метеоры включают любое атмосферное явление, которое *в какой-то степени искажает ясность и прозрачность воздуха и ограничено по сроку своего существования*.

Заметим, что Био (1818a) назвал метеорами любое *случайное* явление, *происходящее в земной атмосфере*. Итак, метеоры случайны или по крайней мере чужды атмосфере. Их изучение, в соответствии с одним из определений Ламарка, будет составлять основную цель метеорологии. Неясно, относил ли он ветры к метеорам. Ламарк (№ 10, с. 209) предполагал, что ветер является *основным явлением атмосферы*, вообще же слово *метеор* – греческого происхождения и означало оно *вещь наверху, в воздухе*. Длительное время в XIX в. к ним относили полярные сияния и различные метеорологические явления, но вряд ли ветры.

Оба определения Ламарка относились к *продуманной метеорологии*, которая противостоит *эмпирической метеорологии*, обходящейся без какого-либо *физического познания* (Ламарк № 5, с. 1). Добавим здесь определение метеорологии по Био (1818b, с. 444):

Метеорология – это приложение физики к постоянным и преходящим явлениям, которые происходят в массе атмосферы или на земной поверхности ввиду общего действия таких естественных агентов, как теплота, электричество, магнетизм.

Метеорология, уточняет Ламарк (1801b, с. 296 – 297 и 301; 1801a, с. 419; 1801c, с. 279; № 1, с. 79 и № 3, с. 10), не должна ограничиваться выводами средних и крайних значений наблюдённых величин. Вот одно из этих высказываний (№ 1, с. 79): физики полагают, что в умеренной зоне погода в основном зависит от переменных причин.

Поэтому вот уже много лет, как в Париже метеорологические наблюдения производятся лишь для совершенствования знания о климате. Ограничиваются установлением наибольших жары и холода [даже не средних; следует аналогичное замечание о других метеорологических элементах]. *Никто никогда не произвёл хотя бы малейших исследований, чтобы выяснить, существует ли различимый порядок в какой-либо части изменений.*

Легко понять, почему Ламарк (1801b, с. 297 и 299; 1802b, с. 129) непрестанно жаловался, что не может убедить общественность в пользе метеорологических исследований: *Все европейские научные общества совершенно умалчивают о* [метеорологии]. Указав это, он (№ 9, с. 1) также с горечью правильно заключил, что таким образом выражается *косвенное порицание* его *Ежегодников* (1800 – 1811), см. также § 6.5. Учёные пренебрегают метеорологией, которая поэтому *стала областью шарлатанов* (№ 4, с. 1). Он сам (№ 3, с. 125) занимался её преобразованием в *науку*, которая (там же, с. 104) должна иметь *свою собственную теорию, свои общие принципы и, одним словом, свои афоризмы*. Метеорология (№ 6, с. 5) *ещё не существует* как наука; для него, она зарождалась.

В некотором смысле его точка зрения была противоположна мнению Гумбольдта (§ 4.1). Он желал создать научную метеорологию и открыть законы, управляющие вариациями в атмосфере; не выступая против этого, Гумбольдт направил свои усилия на единственно возможный в то время статистический подход к метеорологии (точнее, на статистическое изучение климата). Напомним (§ 2.1), что ещё Каспар Нойман считал, что метеорология требует своей теории.

6.3. Статистическая метеорология. Ламарк ввёл и регулярно употреблял выражение *статистическая метеорология*. Так он назвал свою статью (1802b). Он (№ 4, с. 153 – 154) утверждал, что

Целью […] *статистической метеорологии является хорошее знание не только общей характеристики климата государства*, […] *но порядка следования ветров в каждом из его основных мест;* […] *силы каждого ветра в любой точке*; *вызываемых им* *метеоров, и, наконец, влияния этих метеоров на животных, растения и на саму почву в каждой из этих точек*.

Заметим, что Ламарк отличал климат, ветры и метеоры друг от друга, ср. § 6.2. Но что именно он понимал под климатом?

Он (№ 3, с. 126 – 127) рекомендовал изучать влияние метеоров на растительность, размножение вредных насекомых, время прилёта и отлёта перелётных птиц и появление эпизоотий и эпидемий, а также (№ 10, с. 164 – 183) на сезонные заболевания человека. Достижение указанных целей, как он добавил, возможно путём *тщательных, подробных, одновременных и сравнимых наблюдений*. Метеорологическая статистика (№ 8, с. 192) – это *часть статистики, относящаяся к климату и атмосфере государства* […] *и лишь к фактам, применимым к его политической экономии*. Ср. мнение Кетле (§ 4.4)!

Далее (с. 194), метеорологическая статистика – *это главное*, что следует рассматривать в *статистике государства*. И, наконец (№ 11, с. 121), *статистическая метеорология* тождественна *атмосферной статистике*.

Ламарк (1802b, с. 300) предложил и другое определение метеорологической статистики: это –

Знание в каждом регионе Земли, а также в каждой местности экстремальных значений (terms) температуры *атмосферы, характера, интенсивности и разнообразия происходящих метеоров, порядка последовательности этих вариаций, и, наконец, их влияния на живые существа и почву*.

Видно, что Ламарк понимал статистику в самом широком смысле, но климатология теперь уже не включается в неё (и вряд ли когда-либо считалась её важнейшей частью); аналогично, звёздная статистика в основном принадлежит астрономии и т. д.

6.4. Случайность. Ламарк отрицал случайность и объяснял её незнанием соответствующих причин, но считал её исключительно важной в биологии и физике (Шейнин 1980, с. 336 – 337). И вот его высказывание о метеорологии (1810 – 1814/1959, с. 632, обратный перевод):

Цели метеорологии были бы бесполезны, ненадёжны и беспочвенны, если бы могла существовать какая-либо часть природы,[…] *не подчиняющаяся неизменным законам в своих движениях, изменениях состояния, в каких-либо своих вариациях, если бы называемое шансом было реальностью*.

Отрицание случайности можно найти у Ламарка и в других источниках (№ 5, с. 7, № 8, с. 192, № 10, с. 4), но он же (№ 1, с. 76, № 3, с. 8) фактически признавал её:

1) *Многие причины могут частично перемещать флюиды, из которых состоит атмосфера, и нарушать равновесие и состояние покоя, к которым эти флюиды непрестанно*

стремятся. Эти причины двояки: одни изменчивы, непостоянны и иррегулярны в своём действии [а вторые постоянны].

Нерегулярные причины он (№ 3, с. 131) упомянул и в другом месте.

2) *Кроме аномалий, которые могут быть вызваны случайными причинами, вариации атмосферы* […] *видимо подвержены некоторой периодичности*.

6.5. Качественные вероятности. Ламарк (1800 – 1811) предсказывал элементы погоды всей Франции по меньшей мере на несколько месяцев вперёд. Разделяя предстоявший год на периоды в 6 – 9 дней, он указывал вероятные состояния погоды и растительности в каждом, например (№ 1, с. 11): *ветры с запада, погода сырая*; или (там же, с. 38) *цветение сирени*. Вначале он даже предсказывал даты изменения погоды, но вскоре (№ 3, с. 15) был вынужден отказаться от этого.

Термин *вероятный* Ламарк не пояснил. Можно полагать, что он имел в виду вероятность, несколько превышающую 1/2. Иногда он применял выражения *правдоподобно* (№ 3, с. 53), *слабые* или *очень слабые вероятности* (там же, с. 51 и 65), но его терминология не была выдержана. В одном случае у Ламарка (№ 4, с. 90 – 91) появилась шкала качественных вероятностей: *очень большая, большая, средняя, неопределённая*. Последняя видимо означала близость к 1/2 и соответствовала *неопределённой погоде*.

Ламарк (§ 6.4) предположил, что равновесие атмосферы нарушают и постоянные, и переменные причины. Но кроме того он (№ 1, с. 4) указал, что *Эти переменные причины сами подвержены влиянию постоянной и размеренной причины* [почти то же самое см. в № 8, с. 100], *указывающей погоду, которую в основном следует ожидать*. Далее (№ 4, с. 83), *вероятности указывают достоверные влияния, хотя интенсивность каждого ещё является предметом исследования*.

Подобная классификация слишком сложна, и вряд ли сам Ламарк практически применял её. Вообще же приложение качественных вероятностей не было в то время новостью. Дальтон (1793/1834, с. 142 – 143) сравнивал и качественные, и количественные вероятности друг с другом: *Вероятность дождя намного меньше* (или: *не так велика, как*) *в другие времена*; *вероятность хорошего дня* […] *относится к вероятности сырого* […] *как 10:1*.

Вряд ли было возможно предсказывать погоду для всей Франции. Сам Ламарк (№ 5, с. 4) понял, что читатели предпочитают твёрдые предсказания:

Чтобы судить о реальном значении вероятностей, их воспринимают буквально и преобразуют их в предсказания вопреки всему, что я мог сказать по этому поводу.

Недавно то же самое сообщил Miller (1972, с. 372): *Некоторые теряются, не понимая вероятности предсказаний. Они говорят: Просто дайте мне ответ*. Впрочем, ещё Кеплер (1610/1941, § 133, с. 253) указывал, что *обычный человек* видит лишь *конкретное*.

И вот как оценивали *Ежегодники* (Ламарк 1818b, с. 474 – 475):

В Париже их вскоре начали считать бесполезным и самонадеянным предприятием, которое невозможно практически применять. […] *В департаментах Франции* […] *население* […] *почти всегда судит более здраво* и оно больше зависит от метеоров. Не следует поэтому удивляться, что *автор получил большое число писем почти из всех уголков департаментов* […]. *Они одобряли и поощряли его предприятие и в немалой их части сообщалось о существенной пользе, уже извлечённой от некоторых сведений, содержавшихся в Ежегоднике.*

Араго (1854, с. 94), см. также Landrieu (1909, с. 140), описал встречу Ламарка с Наполеоном, который заявил: *Эта Ваша нелепая метеорология*, […] *этот ежегодник, который обесчестил Ваши седины* …

Признательность. От нескольких лиц мы получили копии или микрофильмы некоторых источников. Совершенно особо мы благодарим J. Suck, который помог нам получить микрофильмы всего комплекта *Ежегодников* Ламарка.

Библиография

F. Arago

1832, La lune exerce-t-elle […] une influence appreciable? *Annuaire Bureau long.* pour 1832, pp. 157 – 273.

1845, Et-il possible […] de prédire le temps etc. Ibidem, pour 1846, pp. 574 – 608.

1854, Histoire de ma jeunesse. *Oeuvr. posth. Oeuvr. Compl.*, t. 1. Paris – Leipzig, pp. 1 – 102.

1858a, Sur la prediction du temps. Ibidem, t. 8, pp. 1 – 24.

1858b, De l'influence de la Lune sur les phénomènes terrestres. Ibidem, pp. 25 – 82.

C. H. D. Buys-Ballot

1847a, Die Wirkung der ungleichen Erwärmung auf die Richtung des Windes und die Wärmewirkung des Mondes. *Annalen Phys.*, 3. Reihe, Bd. 10 (70) (146), pp. 154 – 165.

1847b, *Les changements périodiques de température etc*. Utrecht.

1850a, Die periodischen […] Änderungen der Temperatur etc. *Fortschritte Phys.*, Bd. 3 für 1847, pp. 623 – 629.

1850b, On the great importance of deviations from the mean state of the atmosphere etc. *Lond., Edinb. and Dublin Phil. Mag.*, ser. 3, vol. 37, No. 247, pp. 42 – 49.

1854, Erläuterung einer Methode zur gleichzeitigen Darstellung der Witterungserscheinungen etc. *Annalen Phys.* Ergänzungsbd. 4, pp. 559 – 576.

1857a, Note sur le rapport de l'intensité et de la direction du vent avec les écarts simultanes du baromètre. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 45, pp. 765 – 768.

1857b, *Jaarboek*. (*Annuare de l'Institut météorologique en Holland.*) Дата указывает либо год публикации, либо отчётный год института, и неизвестно, что именно Бейс-Балло опубликовал в этом издании.

1860, *Eenige Regelen voor aanstaande weersveranderingen in Nederland*. (*Eenige regeln voor te wachten van veêrsveranderingen in Nederland.*) Utrecht.

1863, Beiträge zur Vorhersage von Witterungserscheinungen etc. *Arch. f. Holländ. Beitr. Natur- und Heilkunde*, Bd. 3, pp. 85 – 109.

1865, On meteorological observations made in Holland. *Civil Eng. and Architect's J.*, vol. 28, pp. 245 – 246.

1872, *Suggestions on a Uniform System of Meteorological Observations*. Utrecht.

1873, *A Sequel to the Suggestions etc*. Utrecht.

1874, De methode der statistiek het duidelijkst in de meteorologie. Openingsrede Prov[incial] Utr[echts] gen[ootschap van kunsten en wettenschappen]. Недоступно.

1885, The anomalies in the annual range of temperature etc. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, vol. 11, pp. 104 – 118.

L. Cotte

1774, *Traité de météorologie*. Paris.

1788a, *Mémoire sur la météorologie*, tt. 1 – 2. Paris.

1788b, Sur l'utilité des observations météorologiques etc. In (1788a, t. 1, pp. 1 – 32).

1788c, Sur l'évaporation & l'hygrométrie. Ibidem, pp. 175 – 265.

1788d, Extraits et résultats des observations météorologiques etc. Ibidem, t. 2, pp. 189 – 616.

1800, Suite de la comparaison des températures probables etc. *J. Phys.*, t. 51, an 9, pp. 337 – 343.

H. W. Dove

1837, *Meteorologische Untersuchungen*. Berlin.

1839a, Über die nicht periodischen Änderungen der Temperaturverteilung auf der Oberfläche der Erde. *Abh. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* für 1838, pp. 285 – 415.

1839b, Über Anstellung meteorologischer Beobachtungen etc. *Repert. Phys.* (Berlin), Bd. 3, pp. 264 – 284.

1848, Über die Isothermen des Januar und Juli etc. Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten *Verh. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pp. 389 – 408.

1850, Über Linien gleicher Monatswärme. *Abh. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin,* Phys. Abh. für 1848, pp. 197 – 228.

A. Humboldt, А. Гумбольдт

1811, *Essai politique sur le Royame de la Nouvelle-Espagne*, tt. 1 – 4. Paris, 1825 – 1827.

1816, Sur les lois l'on observe dans la distribution des formes végétales. *Annales chim., phys.*, t. 1, pp. 225 – 239.

1817, Des lignes isothermes etc. *Mém. phys., chim. Soc. d'Arcueil*, t. 3, pp. 462 – 602.

1818, De l'influence de la déclinaison du Soleil sur le commencement des pluies équatoriales. *Annales chim., phys.*, t. 8, pp. 179 – 190.

1826, *Voyage aux régions équinoxiales etc*, t. 12. Paris.

1831, *Fragmens de géologie et de climatologie asiatiques*, t. 2. Paris.

1836, Letter to the President of the Royal Society. *Astron. Nachr.*, Bd. 13, No. 306, pp. 281 – 292.

1843, *Asie Centrale*, tt. 1 – 3. Paris.

1845 – 1862, *Kosmos*, Bde 1 – 5. Stuttgart – Augsburg, 1845, 1847, 1850, 1858, 1862.

1962, *Переписка А. Гумбольдта с учёными и государственными деятелями России.* М.

W. Köppen, В. Кёппен

1872, Die Aufeinanderfolge der unperiodischen Witterungserscheinungen etc. *Repert. Met.* (Petersburg), Bd. 2, pp. 187 – 238.

1873a, Vorschlag an den Wiener meteorologischen Congress. *Z. Öster. Ges. Met.*, Bd. 8, No. 2, pp. 17 – 26.

1873b, Über mehrjährige Perioden der Witterung etc. Ibidem, No. 16, pp. 241 – 248; No. 17, pp. 257 – 267.

1874, Über die Abhängigkeit des klimatischen Characters der Winde von ihrem Ursprunge. *Repert. Met.* (Petersburg), Bd. 4, No. 4, pp. 1 – 15.

1875, О наблюдениях периодических явлений в природе. *Зап. Русск. географич. общ. по общ. геогр.*, т. 6, № 1, с. 255 – 276.

1913, Durchschnittliche Abweichung, Asymmetrie und Korrelationsfactor. *Met. Z.*, Jg. 30, Bd. 48, No. 3, pp. 113 – 121.

1936, Statistische Methoden etc. *Z. angew. Met.*, Bd. 53, No. 7, pp. 205 – 213.

J. B. Lamarck, Ж. Б. Ламарк

1795, *Flore Française*, t. 1. Paris. 2e edition.

1798, De l'influence de la Lune sur l'atmosphère terrestre. *J. phys.*, t. 3, pp. 428 – 435.

1800 – 1811, *Annuaire météorologique*, [tt. 1 – 11]. Paris, pour l'an 8 – pour 1810.

1801a, Mémoire sur le mode de rédiger et de noter les observations météorologiques etc. *J. phys.*, t. 51, frimaire an 9, pp. 419 – 426.

1801b, Recherches sur la périodicité présumée des […] variations de l'atmosphère etc. Ibidem, t. 52, germinal an 9, pp. 296 – 316.

1801c, Réfutation des résultats obtenus par […] Cotte. Ibidem, t. 53, vendémaire an 10, pp. 277 – 281.

1802a, *Hydrogéologie*. Paris.

1802b, Météorologie-statistique. *Annales stat.*, t. 3, pp. 58 – 71, 300 – 317; t. 4, pp. 129 – 134.

1803, Sur les variations de l'état du ciel etc. *J. phys.*, t. 56, pluviose an 11, pp. 114 – 138.

1810 – 1814, Aperçu analytique des connaissances humaines. In Vachon et al (1972, pp. 69 – 141). Аналитический обзор человеческих знаний. *Избр. тр.*, т. 2. М., 1959, с. 593 – 662.

1818a, Météores. *Nouv. dict. hist. natur.*, t. 20, pp. 416 – 444.

1818b, Météorologie. Ibidem, pp. 451 – 477.

A. Quetelet

1846, *Lettres* […] *sur la théorie des probabilités etc*. Bruxelles.

1848, *Du système sociale*. Paris.

1849 – 1857, publ. by Quetelet, *Sur la climat de la Belgique*, tt. 1 – 2. Bruxelles. Pt. 5 of t. 2 publ. in 1852, *Annales Obs. Roy. Bruxelles*, t. 9. Separate paging.

1852, Sur quelques propriétés curieuses qui présentent les résultats d'une série d'observations. *Bull. Acad. sci., lettres, beaux-arts Belg*., t. 19, pp. 303 – 317.

1853, *Théorie des probabilités*. Bruxelles.

1854, Mémoire sur les variations périodiques et non périodiques de la température. *Mém. Acad. sci., lettres, beaux-arts Belg*., t. 28, 45 pp.

1867, *Météorologie de la Belgique compare a celle du globe*. Bruxelles – Paris.

1869, *Physique sociale*. Bruxelles.

1873, *Congress Internationale de Statistique, 1853 – 1872*. Bruxelles.

J. Toaldo

1775, in Italian, *Witterungslehre für den Feldbau*. Berlin.

1777, Essai de météorologie. *J. phys.*, t. 10, pp. 249 – 279, 333 – 367.

1782, Le saros météorologique. *J. phys.*, suppl., t. 21, pp. 176 – 189.

Другие авторы

Бессель Ф. В. (1838, нем.), Исследование о вероятности ошибок наблюдения. *Избр. геодезич. соч*. М., 1961, с. 26 – 258.

Гегамян Г. В. (1981), Ламарк, Вернадский и биосферология. *Природа*, № 9, с. 78 – 81.

Менделеев Д. И. (1876), О температурах атмосферных слоёв. *Соч.*, т. 7. М. – Л., 1946, с. 24 – 269.

--- (1885), Записка об учёных трудах А. И. Воейкова. *Соч.*, т. 25. М. – Л., 1952, с. 526 – 531.

Тихомиров Е. И. (1931), Мангеймское метеорологическое общество. *Мет. Вестник*, № 2 – 4, с. 34 – 36.

--- (1932), Инструкции русским метеорологическим станциям в XVIII в. *Изв. Гл. Геофизич. Обс*. № 1 – 2, с. 3 – 12.

Хргиан А. Х. (1959), *Очерки развития метеорологии*, т. 1. Л.

Чупров А. А. (1922, нем.), Закон больших чисел. В сборнике автора *Вопросы статистики*. М., 1960, с. 141 – 162.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1974), On the prehistory of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 12, pp. 97 – 141.

--- (1977), Early history of the theory of probability. Ibidem, vol. 17, pp. 201 – 259.

--- (1980), On the history of the statistical method in biology. Ibidem, vol. 22, pp. 323 – 371.

--- (1982), On the history of medical statistics. Ibidem, vol. 26, pp. 241 – 286.

--- (1986), Quetelet as a statistician. Ibidem, vol. 36, pp. 281 – 325.
--- (1990), К истории статистического метода в естествознании. *Историко-математич. исследования*, вып. 32 – 33, с. 384 – 408.
--- (2000), Bessel: some remarks on his works. *Hist. Scientiarum*, vol. 10, pp. 77 – 83.
Bacon F. (1597), Essays. Third edition, 1625. London – New York, 1914.
Bernoulli D. (1778, Latin), The most probable choice between several […] observations etc. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 1 – 18.
Bézout E., Lavoisier A. L., Vandermonde A. T. (1780), Expériences […] sur le froid de l'année 1776. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* pour 1777, pp. 505 – 526.
Biot J. B. (1818a), Méteore. *Nouv. Dict. Hist. Natur.*, t. 20, p. 416.
--- (1818b), Météorologie. Ibidem, pp. 444 – 451.
--- (1855), Sur les observatoires météorologiques permanents que l'on propose d'établir en divers parts de l'Algérie. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 41, pp. 1177 – 1190.
Bouvard A. (1827), Sur les observations météorologiques. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris,* t. 7, pp. 267 – 343.
Burkhardt R. W., Jr (1977), *The Spirit of the System. Lamarck and Evolutionary Biology*. Cambridge (Mass.) – London.
Burstyn H. L. (1970), Buys Ballot. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 3, p. 628.
Chapman S. (1941), *Halley As a Physical Geographer*. London.
Condorcet M. J. A. N. Caritat de (1795), *Esquisse d'un tableau historique etc. Oeuvr. Compl.*, t. 8. Brunswick – Paris, 1804. The whole volume.
Congress (1856, 1858, 1861), *Congress International de Statistique, C. r. de la* […] *session* … I refer to sessions held in Paris (1855), Vienna (1857) and London (1860).
Dalton J. (1793), *Meteorological Essays*. Manchester, 1834.
Delisle J. N. (1738), Les thermomètres etc. Lu 1733. In author's *Mémoires pour servir a l'histoire* […] *de l'astronomie etc*. Pétersbourg, pp. 267 – 284.
Detwiller J. (1982), La loi de Buys Ballot. *Météorologie*, 6e sér., No. 28, pp. 61 – 70.
Dufour L. (1943), Les grandes époques de l'histoire de la météorologie. *Ciel et terre*, 49e année, No. 9 – 10, pp. 355 – 359.
--- (1947), Notes pour servir à l'histoire de la météorologie en Belgique, pt. 1. *Inst. Roy. Met. Belg*. [Contr.] No. 29, 32 pp.
Dufour L., Defrise P. (1981), Histoire de la météorologie en Belgique. *Ciel et terre*, t. 97, No. 1, pp. 5 – 18.
Eisenlohr O. (1837), *Untersuchungen über den Einfluß des Windes etc*. Heidelberg – Leipzig.
Faraday M. (1991 – 2008), *Correspondence*, vols 1 – 5. London.
Fridman Th. (1950), *History of meteorology, 1750 – 1800*. Univ. of California, Berkeley. Dissertation.
Frisinger H. H. (1977), *The History of Meteorology to 1800*. New York.
Galton F. (1863), *Meteorographica*. London – Cambridge.
Glaisher J. (1867), The influence of the moon on the direction of the wind. *Proc. Brit. Met. Soc.*, vol. 3, No. 30, pp. 359 – 378.
--- (1869), The influence of the moon on the rainfall etc. Ibidem, vol. 4, No. 43, pp. 327 – 350.
Godske C. L. (1966), A statistical approach to climatology. *Arch. Meteorologie, Geoph., Bioklimatologie*, Bd. B14, No. 3 – 4, pp. 269 – 279.
Grimaux E. (1888), *Lavoisier*. Paris.
Guhrauer G. E. (1863), Leben und Verdienste Caspar Neumann's. *Schlesische Provinzialblätter*, N. F. 2, pp. 7 – 17, 141 – 151, 202 – 210, 263 – 273.
Hellman C. D. (1970), Brahe. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 2, pp. 401 – 416.
Herschel J. et al (1846), Report of the Committee on simultaneous magnetic and meteorological observations. *Report 15th Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci*. for 1845, pp. 1 – 73.
Huxley T. H. (1869), The anniversary address of the President. *Q. J. Geol. Soc. Lond.*, vol. 25, pt. 1, pp. xxviii – liii.
Jurin J. (1723), An invitation for making meteorological observations. *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. 6, 1809, pp. 675 – 676.
Keil K. (1948), Leibniz und die Meteorologie. *Met. Rundschau*, Bd. 1, No. 11 – 12, pp. 321 – 322.

Kepler J. (1610), Tertio interveniens. *Ges. Werke*, Bd. 4. München, 1941, pp. 149 – 258.
Kingston J. A. (1970), A late 18th century source on meteorological data. *Weather*, vol. 25, No. 4, pp. 169 – 175.
--- (1972), Meteorological observing in Scandinavia and Iceland during the 18th century. Ibidem, vol. 27, No. 6, pp. 222 – 233.
--- (1974), The Societas Meteorologica Palatina etc. Ibidem, vol. 29, No. 11, pp. 416 – 426.
Körber H.-G. (1958), Humboldt's und Gauß's organisatorisches Werken auf geomagnetischen Gebiet. *Forschungen u. Fortschritte*, 32. Jg, No. 1, pp. 1 – 8.
--- (1959), Über Humboldts Arbeiten zur Meteorologie und Klimatologie. In: *Humboldt. Gedenkschrift*. Berlin, pp. 289 – 335.
Lambert J. H. (1773a), Exposé de quelques observations […] pour repandre du jour sur la météorologie. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. Berlin* pour 1771, pp. 60 – 65.
--- (1773b), Observations sur l'influence de la Lune dans le poids de l'atmosphère. Ibidem, pp. 66 – 73.
Lamont J. (für 1839), Nachricht über die meteorologische Bestimmung des Königreiches Bayern. In author's *Jahrb. Kgl. Sternwarte bei München*, pp. 256 – 264, 247 – 249. Paging of last three pages wrong.
--- (1867a), Über die Bedeutung arithmetischer Mittelwerthe in der Meteorologie. *Z. Öster. Ges. Met.*, Bd. 2, No. 11, pp. 241 – 247.
--- (1867b), Das Beobachtungs-System der Societas Palatina etc. Ibidem, No. 16, pp. 369 – 376; No. 17, pp. 397 – 402.
Landrieu M. (1909), *Lamarck*. Paris.
Landsberg H. E. (1980), Bicentenary of international meteorological observations. *Bull. World Met. Org.*, vol. 29, No. 4, pp. 235 – 238.
Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. В книге Прохоров Ю. В. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.
--- (1823), De l'action de la Lune etc. Incorporated in *Traité de mécanique céleste*, t. 5, 1825. *Oeuvr. Compl.*, t. 5. Paris, 1882.
Leibniz G. W. (MS 1680, publ. 1866), Vorschlag zu einer Medizinal-Behörde. *Sämml. Schriften und Briefe*, Reihe 4, Bd. 3. Berlin, 1986, pp. 340 – 349.
Leighly J. (1949), Climatology since the year 1800. *Trans. Amer. Geophys. Union*, vol. 30, No. 5, pp. 658 – 672.
Le Verrier U. J. J. (1863), [Sur la théorie météorologique de M. Mathieu.] *Moniteur scient.*, t. 5, pp. 300 – 307.
Liagre J. B. J. (1852), Sur la loi de répartition des hauteurs barométriques etc. *Bull. Acad. Sci., Lettres, Beaux Arts Belg.*, t. 19, pt. 2, pp. 502 – 514.
Meyer H. (1891), *Anleitung zur Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen etc*. Berlin.
Miller R. G. (1972), The probability of rain. In: *Statistics, a Guide to the Unknown*. Eds, Judith M. Tanur, W. Kruskal. San Francisco, pp. 372 – 384.
Muncke G. W. (1837), Meteorologie. In *Gehler's Phys. Wörterb.*, Bd. 6/3. Leipzig, pp. 1817 – 2083.
Packard A. S. (1901), *Lamarck*. New York.
Pearson K. (1898), Cloudiness. *Proc. Roy. Soc.*, vol. 62, pp. 287 – 290.
Pueyo M. G. (1982a), Un continuateur des travaux concernant la météorologie agricole […] L. Cotte. *C. r. Acad. Agr. France*, t. 68, No. 8, pp. 604 – 609.
--- (1982b), Les observations météorologiques des correspondants de L. Cotte. Ibidem, No. 9, pp. 658 – 663; No. 18, pp. 1429 – 1435.
Sabine E. (1867), Note on a correspondence […] regarding meteorological observations etc. *Proc. Roy. Soc.*, vol. 15, p. 29 – 38.
Schmid E. E. (1860), *Lehrbuch der Meteorologie*. Leipzig, this being *Allg. Enc. Phys.*, Bd. 21.
Schouw J. F. (1827), *Beiträge zur vergleichenden Klimatologie*. Copenhagen.
Schübler G. (1830), *Untersuchungen über den Einfluß des Monds auf die Veränderungen unserer Atmosphäre*. Leipzig.
Shaw N. assisted by Elaine Austin (1926), *Meteorology in History*, vol. 1. Cambridge, 1942.
Stigler S. M. (1975), Napoleonic statistics: the work of Laplace. *Biometrika*, vol. 62, pp. 503 – 517.

--- (1977), The transition from point to distribution estimation. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, vol. 46, No. 2, pp. 332 – 340.
Thompson P. D. (1961), *Numerical Weather Analysis and Prediction*. New York.
Vachon M., Rousseau G., Laissus Y. (1968), Liste complète des manuscrits de Lamarck conservés a la Bibliothèque centrale du Muséum etc. *Bull. Muséum nat. d'hist. natur.*, 2e sér., t. 40, No. 6, pp. 1093 – 1102.
--- (1972), *Inédits de Lamarck*. Paris.
van Everdingen E. (1953), *C. H. D. Buys Ballot*. 's-Gravenhage.
Wolf Abr. (1935), *History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*. London, 1950.

IX

С. Ньюком

Письма немецким учёным

Staatsbibliothek zu Berlin. Manuskript Abteilung, acc. Darmst.

1. Letter to C. A. F. Peters 31 July 1862, Code 29.16
Washington, US

Dear Sir, I observe that there is still a disposition to indulge in foolish speculation respecting the inequalities in the distribution of the nodes and perihelia of the asteroids[1.1]. I therefore enclose you an article on the subject for the *Astron. Nach.* [1862].

I beg that you will excuse my not making you a neater copy, as I am about to have taken [a new work?], and have not time to spare. Where it can be done without losing space I should prefer to see the separate tables placed one below another, in column extending but half way across the page, instead of extending them from left to right across the entire page, as I have done, to save paper.

It may be unnecessary to print the figure. A mathematician will not need it. At any rate, a wood cut in the printed page will be all that will be necessary[1.2].

Very truly Yours Simon Newcomb

Herr Dr C. A. F. Peters, Editor of the *Astron. Nachrichten*, Altona

2. Letter to [F. A. T.] Winnecke 7 Aug. 1871, Code 1826-29
Washington

My Dear Doctor, You remember I failed to get your photograph in Berlin. I have a very good album of European astronomers, but it will not be complete without your face. Will you not do me the favor to forward it: – you see I tender you payment in advance.

I hope the *Vierteljahrsschrift* [*Vierteljahresschrift der astron. Ges.*] is flourishing. If you are hard worked, and want to laugh, read Proctor on the Sun [1871], Chapter 1.

Your very truly Simon Newcomb

Herr Dr Winnecke

3. Letter to unknown person 1 Aug. 1876, Code 20.237
Washington

Dear Sir: I am about to bring out a work on astronomy in which I am desirous to embody a brief statement of the views respecting the physical constitution of the sun entertained by the most eminent students of solar physics at the present time. I am especially desirous of including your opinions in this list; I should therefore esteem it a great favor should you think proper to communicate them to me at your earliest convenience.

The points to be especially covered are, the nature of the sun's interior; the structure of the photosphere; the causes of the spots; their nature and their relation to the photosphere; the force which throws up and maintains the protuberances, and the relation of the latter to the chromosphere; and finally, the nature and constitution of the corona. Owing to limitation of space, I wish only a categoric[al] statement of views, with nothing more than the briefest indications of the grounds on which they rest – such a statement as will be included in the compass of one or two octavo pages – say from 400 to 700 words.

I have studied several of your writings, with a view of learning your views, especially your papers in the *Leipziger Berichte* [*Berichte Verh.* (Math. Phys. Kl.) *Kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig*], but cannot formulate them in a manner that I can feel is satisfactory, and hence this application to you personally.

I am, dear Sir, Yours very truly Simon Newcomb

4. Letter to Leo Koenigsberger 9 April 1886, Code 1922.87

Nautical Almanac Office, Bureau of Navigation Navy Department Washington

My Dear Sir: – It was a great pleasure to me to receive your letter of nearly a year ago introducing Dr. Monteser. Had he advised with me before trying his fortune among us I should have counselled him not to come. You know that mathematical science is very little cultivated at our universities and besides that a foreigner has rarely an opportunity to become a professor of anything except his own language unless he is a very eminent man.

I was on the Continent with my daughter last summer. Geneva was our nearest point to Heidelberg. When I again go abroad your presence in Heidelberg will be a strong inducement to pay that town a visit.

Yours very faithfully, S. Newcomb

Professor Leo Koenigsberger, Heidelberg in Baden, Germany

5. Letter to Leo Koenigsberger 12 June 1886, Code 1922.87

Nautical Almanac Office, Bureau of Navigation Navy Department Washington

Dear Sir:– Your letter is in every way most gratifying to me. One cannot desire a higher honor than that of being remembered at the 500th anniversary of so ancient and renowned a university as yours [1386 – 1886, Heidelberg]. It is also pleasant that the announcement should come from a friend so highly esteemed as you are.

I am sorry that the anniversary comes in a year when I cannot be absent for so long a time as is necessary to make the journey.

With best wishes, I remain, Yours very faithfully, S. Newcomb

Professor Leo Königsberger, The University, Heidelberg, Germany

6. Letter to unknown person[6.1] 23 Sept. 1889, Code 1922.87

Nautical Almanac Office, Navy Department. Washington, D. C.

Dear Sir: – I regret that I have been so negligent in acknowledging a number of marks of attention which I have received from you, and which I assure you that I appreciated. Among the late ones is the invitation to the Association of Physicians and Naturalists, a body whose meetings I should like much to attend. I had hoped to go abroad this year, but have been prevented by lameness. There is now little prospect of my doing so for two years. Your University will always be held in grateful esteem for the high honor which I received there in 1886.

The frequency with which I receive such applications as those of Dr. Mandl would suggest that it would be quite easy for an American graduate to secure a position as Professor Extraordinarius in the German Universities by sending over the proper testimonials. If such is the case, I wish it could be more widely known that the reverse is not true. Before a foreigner can get any other position in this country than one for teaching his own [language? letter not finished]

7. Letter to [R.] Lehmann-Filhès, as stated on the attached envelope, 19 May 1902. Code not provided

151, Via del Bahnino, Roma, Italien

Dear Sir: I desire to propose for membership in the Astronomische Gesellschaft – Professor H. H. Turner University Observatory Oxford, England who has expressed to me his readiness to accept membership. But, from what was said on the last occasion when I proposed a new member, I may infer that you want some sort of an expression from the applicator [applicant] himself. If this be so, I shall be much pleased to receive from you a statement of exactly what is required. I expect to be here during the next two weeks (till June 1) and to attend the meeting of the Gesellschaft at Göttingen August 5 – 7.

Very respectively Simon Newcomb

8. Letter to Paul Ehrlich 8 Aug. 1904, No Code

National Academy of Sciences. Office of the Foreign Secretary. Washington D. C.

Geh. Med.-Rat Professor Paul Ehrlich,
Direktor des Königl Instituts für Exper. Therapie,
Frankfurt-am-Main, Germany

Dear Sir: – I take pleasure in informing you that I have this day forwarded by mail to your address your diploma as foreign associate of the National Academy of Sciences.

Very respectfully, Your obedient servant,
S. Newcomb, Foreign Secretary

9. Letter to J. Bauschinger 15 May 1905, Code 30.10

1620 P Street N. W. Washington D. C.

Dear Dr. Bauschinger: – I am now engaged in putting my library into shape and trying so far as I am able, to fill up the gaps in serials.

My set of *Astronomisches Jahrbuch* is complete from 1879 to 1906, with the exception of the following six volumes […]. If I can obtain the volumes for any of these years either by gift or by purchase at a reduced price I shall be much pleased.

I suppose that, if I should try to complete my set for previous years, there is no better way of purchasing them than through the antiquarian booksellers of Leipzig and Berlin; but if you know of any better way I shall be much pleased.

I expect to spend several weeks in Switzerland during July and August, and if you know of any of the Berlin astronomers intending to visit that country I should be pleased to be acquainted with their plan of journey. I leave home June 15, and from that time my address until September 1 will be c/o U. S. Dispatch Agency, […] London.

Yours very sincerely, Simon Newcomb

Dr. J. Bauschinger, Herausgeber der [*Berliner*] *Astronomisches Jahrbuch*, Berlin, Germany

10. Letter to J. Bauschinger 26 Dec. 1905, Code 29.16

1620 P Street N. W. Washington D. C.

Dear Dr. Bauschinger: – I find that my tables of Mars [1898] will have to be reconstructed, as the deviation from observation, amounting to 1.5″ in the heliocentric longitude, indicates something wrong in the elements or data. I have all along had it in view to reconstruct the theory because I was obliged to hurry up my work so rapidly that that on Mars was left in a very imperfect state. One of the first things to be done is to have computed some 300 or 400 geocentric positions of Mars from my new tables of Mars and of the sun. Work of this kind can be done much more cheaply in Europe than here and I write to know whether you can have it done for me in Berlin by a competent computer and if so on what terms. I shall try to enclose you a copy of a computation of the geocentric places when the heliocentric longitudes are given. This may be not the shortest method of computation, but I would like the estimate based on it; telling me also to what extent it can be abbreviated.

Hoping soon to hear from you on the subject and with the best wishes of the season, I remain

Yours very sincerely, Simon Newcomb

Dr. E. (!) Bauschinger, […] Berlin, S. W.

Attachment: Computation of Geocentric Places of Mars, 1841, April 10, 1 page

Added by hand in German: 8 Mark pro [?] 1 1/2 [?] für 1 Herrn

11. Letter to unknown person[11.1] 13 Dec. 1907, Code 29.16

1620 P Street N. W. Washington D. C.

Dear Sir: – I wish to tender my thanks for the copy of the new Auwer's [Auwers'] fundamental catalogue worked up by Dr. Peters, which I have received this morning[11.2]. The typography and arrangement of the matter seem to leave nothing to be desired.

It is of course pleasing to me that you have adopted the system of uniformly expressing the motions in terms of the century as the unit. I have long found this the more convenient system when one is accustomed to it, and I hope you have had the same experience in your office.

I notice that on page VIII you give only the extended rigorous formulae for the trigonometric reduction, without mentioning the abbreviated formulae and tables which I have developed in my *Spherical Astronomy* [1906]. These may be a little clumsy to use on a first trial by one not accustomed to them; but I think that after one has arranged his work he will find their use with the help of the tables very easy in the case of stars not too near the pole. If Dr. Peters or anyone else in your office has had experience in this line it would interest me to know it.

You will doubtless be interested to hear that we hope soon to publish approximate tables for several of the minor planets discovered by James C. Watson. Notwithstanding that they are only approximate the labour has been much greater than I should have anticipated.

Yours very faithfully, Simon Newcomb

Сокращённый перевод

1. Письмо К. А. Ф. Петерсу 31 июля 1862 г., шифр 29.16

Я замечаю, что всё ещё существует склонность предаваться глупым предположениям о неправильностях в распределении узлов и перигелиев астероидов[1.1]. Поэтому я посылаю Вам статью [1862].

Прошу Вас извинить меня за то, что я не представил более опрятную рукопись […] и не имею времени для этого. Если можно сделать это без потери места, то я бы предпочёл видеть отдельные таблицы помещёнными одна под другой, в колонках шириной не более чем в полстраницы, а не простирающимися слева направо по всей странице, как я сейчас разместил их для экономии бумаги. Включать рисунок быть может нет необходимости, математику он не нужен[1.2].

2. Письмо [Ф. А. Т.] Виннеке 7 авг. 1871 г., шифр 1826-29

Уважаемый доктор, Вы помните, что в Берлине мне не удалось достать Вашу фотографию. Я составил очень хороший альбом европейских астрономов, но он не будет полным без Вашего изображения. Не окажете ли Вы мне одолжение, послав его?

[…] надеюсь, что *Vierteljahrsschrift* [*Vierteljahresschrift der astron. Ges.*] процветает. Если Вы заработались и хотите посмеяться, почитайте Проктора [Proctor 1871], главу 1).

3. Письмо неизвестному 1 авг. 1876 г., шифр 20.237

Дорогой Сэр, я вскоре заканчиваю работу по астрономии, в которую собираюсь включить краткое описание взглядов, принятых в настоящее время наиболее известными исследователями физики Солнца на физическое устройство Солнца. Мне особенно желательно узнать Ваше мнение, и Ваше сообщение, если Вы согласитесь переслать мне его как можно более спешно, я поэтому счёл бы большим одолжением.

Особо рассмотреть следовало бы природу внутренних частей Солнца; структуру фотосферы; причины возникновения пятен, их природу и их отношение к фотосфере; силы, выбрасывающие и поддерживающие протуберанцы и их отношение к хромосфере; и, наконец, природу и структуру короны. Ввиду ограничения объёма мне хотелось бы иметь лишь категорическое описание взглядов кроме разве только кратчайших указаний доводов, на которых они основаны и которые можно было бы разместить на одной или двух страницах в одну восьмую листа, – скажем, состоящих из 400 – 700 слов.

Имея в виду узнать Ваши взгляды, я изучил некоторые Ваши сочинения, особенно Ваши статьи в *Leipziger Berichte* [*Berichte Verh.* (Math. Phys. Kl.) *Kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig*], но не в состоянии удовлетворительно изложить их. Вот потому-то я и обращаюсь к Вам лично.

4. Письмо Лео Кёнигсбергеру 9 апр. 1886 г., шифр 1922.87

Дорогой Сэр, Ваше письмо, полученное мной примерно год назад, в котором Вы ознакомили меня с доктором Монтезиром, доставило мне большое удовольствие. Посоветуйся он со мной прежде, чем испытывать свою судьбу среди нас, я посоветовал бы ему не приезжать. Вам известно, что в наших университетах математическая наука культивируется очень слабо и что, кроме того, иностранец, если только он не очень известен, редко получает возможность стать профессором каких-либо дисциплин кроме своего родного языка.

Прошлым летом я с дочерью был в Европе и ближе всего к Гейдельбергу мы оказались в Женеве. И, когда я снова поеду за рубеж, Ваше присутствие в Гейдельберге будет для меня сильным побуждением посетить этот город.

5. Письмо Лео Кёнигсбергеру 12 июня 1886 г., шифр 1922.87

Дорогой Сэр, Мне было во всех отношениях очень приятно получить Ваше письмо. Нельзя и пожелать более высокой награды, чем быть упомянутым на 500-летней годовщине [1386 – 1886, Гейдельберг] такого старинного и известного университета, подобного вашему. Мне также приятно, что известие об этом пришло от столь высоко ценимого друга, как Вы.

Я сожалею, что годовщина приходится на год, в течение которого я не могу отсутствовать так долго, как необходимо для поездки.

6. Письмо неизвестному[6.1] 23 сент. 1889 г., шифр 1922.87

Дорогой Сэр, я сожалею, что был так нерадив в признании знаков внимания, которые Вы мне оказывали и которые, уверяю Вас, я оценил. Среди недавних находилось приглашение в Ассоциацию врачей и натуралистов, на собраниях которых я был бы весьма рад присутствовать. В этом году я надеялся выехать за рубеж, но мне воспрепятствовала хромота, и в течение двух лет я вряд ли выберусь. Я неизменно буду высокого мнения о вашем университете за ту особую честь, которая была мне оказана в 1886 г.

Я часто получаю просьбы, подобные присланным доктором Мандлем, и это предполагает, что, выслав необходимые документы, выпускнику американского университета очень легко получить место экстраординарного профессора в германских университетах. Если это действительно так, то мне хотелось бы, чтобы стало более известным, что обратное не имеет места. До того, как иностранец сможет получить здесь любое место кроме как для преподавания своего собственного [языка? Текст обрывается].

7. Письмо [Р.] Леман-Филе (адресат указан на приложенном конверте) 19 мая 1902 г. Шифр отсутствует

Дорогой Сэр, я хотел бы предложить кандидатуру профессора Тернера из Университетской обсерватории в Оксфорде (Англия) в качестве члена [Гёттингенского] астрономического общества. Он сообщил мне о своей готовности принять членство. Однако, из сказанного при последнем случае, когда я предложил кандидатуру в члены Общества, я заключаю, что вы желаете получить какое-то заявление от самого кандидата. Если это так, мне бы очень хотелось получить от Вас указание, что именно требуется.

Я собираюсь пробыть здесь в течение следующих двух недель и посетить собрание Общества в Гёттингене 5 – 7 августа.

8. Письмо Паулю Эрлиху 8 авг. 1904 г., шифр отсутствует

Тайному медицинскому советнику, Директору Королевского института экспериментальной терапии [ныне его имени]

на бланке руководителя иностранным отделом
Национальной академии наук

Дорогой Сэр, мне приятно сообщить Вам, что сегодня я отправил Вам Ваш диплом иностранного члена-корреспондента Национальной академии наук.

9. Письмо И. Баушингеру 15 мая 1905 г., шифр 30.10

Дорогой доктор Баушингер, я привожу в порядок свою библиотеку и стараюсь по возможности заполнить недостающее в комплектах периодических изданий. Моё собрание журнала [*Berliner*] *Astronomisches Jahrbuch* за 1879 – 1906 гг. является полным за исключением шести томов […]. Я был бы очень рад возможности получить эти тома либо в дар, либо уплатив за них по сниженной цене.

Полагаю, что для восполнения моего собрания за предшествовавшие годы нет лучшей возможности, чем приобрести их [!] в антикварных книжных магазинах Лейпцига или Берлина. Но я был бы очень рад, если бы Вы знали какой-либо лучший способ.

В течение июля и августа я надеюсь провести несколько недель в Швейцарии, и если Вам известны берлинские астрономы, которые собираются посетить эту страну, я был бы рад ознакомиться с планом их поездки.

10. Письмо И. Баушингеру 26 дек. 1905 г., шифр 29.16

Дорогой доктор Баушингер, я выяснил, что мои таблицы Марса [1898] должны быть переделаны, поскольку уклонение от гелиоцентрической долготы, доходящее до 1.5″, указывает на какую-то ошибку в элементах или исходных данных. Я с самого начала имел в виду переделать теорию, потому что мне пришлось ускорить свои труды настолько, что работа по Марсу была закончена в весьма несовершенном виде.

К первоочередным задачам относится вычисление порядка 300 или 400 геоцентрических положений Марса по моим новым таблицам Марса и Солнца. Подобная работа обошлась бы в Европе гораздо дешевле, чем здесь, и я пишу Вам, чтобы узнать, не смогли бы Вы устроить это для меня, предложив компетентного вычислителя и на каких условиях. Я постараюсь приложить копию вычисления геоцентрических мест по данным гелиоцентрическим долготам. Это быть может и не самый короткий метод вычислений, но я хотел, чтобы оценка стоимости работы была основана на нём. Я также прошу Вас, в какой степени работа может быть сокращена.

Приложение: 1 страница вычислений геоцентрических мест Марса, 10 апреля 1841 г.

Добавлено от руки на немецком языке: 8 марок [нрзб]

11. Письмо неизвестному[11.1] 13 дек. 1907 г., шифр 29.16

Дорогой Сэр, я хотел бы поблагодарить Вас за экземпляр нового фундаментального каталога Ауверса, переработанного Петерсом[11.2], который я получил сегодня утром. Оформление и расположение материала видимо не оставляют желать ничего лучшего.

Мне, конечно, приятно, что вы однообразно выражаете движения в единицах столетия. Я давно уже понял, что эта система является наилучшей, стоит только привыкнуть к ней, и я надеюсь, что опыт вашего бюро оказался таким же. На с. VIII я заметил, что вы привели только строгие формулы для тригонометрического редуцирования и не упомянули сокращённые формулы и таблицы, которые я разработал в своей книге [1906]. При первом использовании непривычным лицом они могут оказаться несколько неудобными, но думаю, что для звёзд не слишком близких к полюсу и после того, как вычисления наладятся, они окажутся весьма простыми в обращении.

Если доктор Петерс или кто-либо другой в вашем бюро имеет опыт подобных вычислений, мне было бы интересно узнать о нём. Вам будет безусловно интересно узнать, что мы надеемся вскоре опубликовать приближённые таблицы малых планет, которые открыл James C. Watson. Хоть и приближённые, их составление оказалось намного более трудоёмким, чем я мог себе представить.

Примечания

Первая цифра обозначает номер письма

1.1. *Глупые предположения* Ньюком опроверг, установив общие закономерности. Но уже в 1866 г. Д. Кирквуд опубликовал найденные им новые закономерности (*провалы*) в распределении средних расстояний астероидов от Солнца. Он же в 1892 г. распределил астероиды в 32 группы. О нём см. Marsden (1973).

1.2. И здесь, и во многих сочинениях Ньюкома чувствуется, что он слишком доверял способностям читателей.

6.1. Адресат – Кёнигсбергер, поскольку шифр письма совпадает с шифром Письма № 5, да и содержание обоих писем свидетельствует о том же.

11.1. Адресат – Баушингер, поскольку шифр письма совпадает с шифром Письма № 10.

11.2. Возможно последний том издания Auwers (1882 – 1903). Но о Петерсе мы здесь не можем ничего сказать.

X

С. Ньюком, К. Пирсон

Переписка

Stephen Stigler

Some Correspondence
between Karl Pearson and Simon Newcomb

Between the years 1899 and 1909, Karl Pearson was in written contact (and perhaps personal contact) with the American scientist Simon Newcomb. The following letters were found in the Simon Newcomb papers at the Library of Congress, Washington, D. C. The Box numbers refer to the location within the collection, which is housed with the manuscripts on the third floor of the Thomas Jefferson Building. It is apparent that not all of the correspondence was found; in particular, a letter from Karl Pearson to Simon Newcomb dated June 24, 1904 is referred to, and doubtless others are missing. Some may be with the Pearson Papers in London. […]

The final letter presumably was written in 1909, as it refers to a 1908 paper Pearson & Gibson (Gibson & Pearson 1908) as published more than a year ago. Newcomb died in July 1909; this letter may never have been completed or sent.

1. Letter Pearson – Newcomb 26 May 1899
7 Well Road Hampstead N. W. [London]

Dear Professor Newcomb, I would willingly come down to St. James Street tomorrow for the pleasure of making your acquaintance, but I shall be away from London, on an old-standing engagement. I shall, however, be at Cambridge for Professor Stokes' Jubilee[1.1] on Thursday & Friday and as you are sure to be there shall be hope to have the pleasure of meeting you. I am in town most mornings for lecturing, but usually go down into the country in the evenings, (as my wife and children are away from Hampstead after illness,) otherwise I would have suggested meeting before Cambridge.

Faithfully yours, Karl Pearson

2. Letter Pearson – Newcomb 26 June 1903
University College London

Dear Prof. Newcomb, I am over head and ears in examinations just now, and hardly know how to find time to get through my work. I would try to give you half-an-hour here on Monday, if that would suit you – between 12 and 1, – if it can be of any real service to you. I ought, however, to say that if it has to do with the St. Louis Exhibition, I fear it is quite impossible for me to take part in your conferences. I had a very kind invitation to Boston (Lowell Institution[2.1]) two years ago, but I could not get away from my work here. I live on students' fees practically & any step which leaves my department under less complete supervision[2.2] tends to impair its efficiency & at once affects my income. Thus at present quite apart from the expenses of travel[2.3] I see no possibility of being able to afford a visit to America from either the standpoint of time or money.

I am, yours faithfully, Karl Pearson

3. Letter Newcomb - Pearson of 27 June 1903
Royal Societies' [?] Club […]

Written on the form of the Universal Exposition, St. Louis 1904, Congress of Arts and Science: President Simon Newcomb

Dear Professor Pearson: As I am to be around London for two weeks or more, I prefer to wait and see whether your very busy season may not have passed before I leave. The plain fact is that I believe you are the one living writer whose productions I nearly always read, when I have time and can get at them, and with whom I hold imaginary interviews while I am reading.

Your paper (1902) published sixteen months ago on the Theory of Errors reached me in Washington the day before I left home for a trip to Italy, so I took it with me and read it on the voyage. It was quite a treat to find that you had developed so fully some ideas which I had enumerated in general form some thirty years ago, but only incidentally, in a paper (1872b). I mention this merely to show that certain features of the subject have not been so much neglected by Astronomers as you seem to suppose.

As to the St. Louis Exposition, I hope you will hold your mind in a plastic state until you hear further from me. I may have something to say to you that will put the subject in a different light.

Yours very sincerely, S. Newcomb

Prof. Karl Pearson, University College, Gower Street

4. Letter Newcomb – Pearson of 3 July 1903

U. S. Despatch Agency, […] London

Dear Professor Pearson: I am authorized by the Administrative Board of the International Congress of Science and Arts[4.1], to be held at St. Louis, September 19 – 25, 1904, to extend to you a cordial invitation to attend the Congress as an official speaker on the subject of METHODOLOGY OF SCIENCE[4.2].

I have already sent you a copy of the programme of the Congress and I now enclose a paper containing information for the special use of those who, like yourself, are invited from Europe as official speakers. You will see that the necessary expenses of the journey will be amply defrayed by the Exposition. I should be very glad to have a conference with you on the subject, at such time as may suit your convenience, but shall be out of London most of the time until Friday, July 10th.

Yours very respectfully [Simon Newcomb]

5. Letter Newcomb – Pearson of 14 Nov. 1904

New York

Dear Professor Pearson: I am having sent to you by this mail a paper (1904) very much in your line – a statistical inquiry into the causes of sex; perhaps I should say, sexatable causes. The main feature of the method is, so far as I know, new[5.1]; and I should be very much pleased if you could find [time] to examine it carefully.

On my return home next Friday I have to write to you more fully on the subject, as well as to express my pleasure with your letter to the Carnegie Institution on my plan of [unreadable word] observations.

Sincerely yours S. Newcomb

6. Letter Newcomb – Pearson of 21 Nov. 1904

[…] Washington, D. C.

Dear Professor Pearson: I have read with great interest your letter of June 24 last in which you discuss my idea of an institute for reducing and working out the results of scientific observations[6.1]. I think the apparent divergence of opinion between us to which you allude is not one of principle, but arises solely from your not knowing exactly what I proposed, and especially from your thinking that I have in view something more comprehensive than I really have.

In the first place, my view is that every attempt of this sort should begin in a tentative way, with those subjects which undoubtedly require to be worked up. In astronomy, there is simply no end to this; but I did not have this primarily in view. A sound method should be at the bottom of the entire work – and this involves a comprehension of what is to be aimed at in carrying the work on. I think that, beginning in this way, the difficulties would not be so great as you seem to anticipate. The right men would turn up as they were wanted, and the affair would gradually grow. Beginning in the way suggested we would not have to ostensibly *scrap*[6.2] observations on a large scale.

In meteorology, for example, we should begin with the observation most appropriate to test meteorological theories, or the general phenomena of meteorology, their periodicity and their dependence on any such terrestrial cause as the sun's radiation. One little example of what I mean by *improved methods* is found in a paper which I sent you last week [1904]. If you have time to look at it, I think you will appreciate its idea without the necessity of my saying more than I have said in the paper itself. Its most important points are two in number: one is a method explained in the first three or four chapters in which the ordinary system of comparing causes and effects is impracticable, but in which a result is reached based on a deviation of the second order from a standard[6.3]; the other is the treatment of the statistics of twin births, showing that sex is not determined at any one epoch in development.

I know of no one more competent than yourself to appreciate this attempt[6.4]; and any opinion or discussion of the paper which you might expresswould have great weight. If favorable, it might be decisive in enabling me to develop and extend general methods in dealing with statistical data in all the sciences where they are available.

Yours very sincerely Simon Newcomb
Professor Karl Pearson, University College, London, England

7. Letter Pearson – Newcomb 2 Jan. 1905
Postcard in KP's hand, no address provided, unsigned

Professor Karl Pearson[7.1] is very much obliged for your letter re Carnegie Institute Proposals. He still considers the matter extremely difficult of execution. He has also to heartily thank Professor Newcomb for his memoir [1904] duly received & read. He must plead to very great pressure on his time, if he finds himself unable to write at length at present. He thinks, however, that the memoir might be strengthened had it been accompanied by the probable errors of the quantities involved.

8. Letter Newcomb – Pearson of 1 Nov., 1907 [1909]
[…] Washington D. C.

Dear Professor Pearson: – When, more than a year ago, you published Miss Gibson's paper in the *Monthly Notices R. A. S.* [Gibson & Pearson 1908], I was minded to write you expressing my pleasure that you were extending your statistical methods into astronomy, but pointing out that the method adopted by Miss Gibson was not likely to lead to any conclusive result. This, not from any inherent positive error in the method, but from the meagreness and uncertainty of the data, and the omission to consider relations known *a priori* among the quantities classified. But I was so much occupied at the time as to be unable to make a careful study of the paper, nor can I spare the time to do so now. But, having noticed the recent discussion in *Nature* [Pearson 1907; Hinks 1907], I venture to submit a few remarks which you can yourself apply to the case according to your own judgement.

When we seek to find a correlation between two systems of observed quantities, it is requisite to a certain result that the quantities of each series be not in the nature of purely accidental ones and that there be *something* we can consider definite. Examples are when either system is the result of random sampling, or when the number of quantities is sufficiently large to establish some law among the magnitudes, even when purely accidental. In the case of stellar parallaxes regarded simply as observed quantities without reference to known conditions affecting their value, neither of these requirements is satisfied.

My main point is that in order to reach definite results in this field, the known relations between magnitudes, distances, and parallaxes must be taken as the basis of the investigation. Moreover, the adopted method must be that of trial from hypotheses, by deduction and comparison with observations, rather than by pure induction. The stellar universe consists of stars having definite, absolute luminosities, distributed in space somewhat at random, and endowed with certain absolute speeds of motion in various directions.

It seems to me the only method by which we can obtain results is that of making hypotheses as to the several distributions, and comparing the results with our observations, so as to derive the system of hypotheses which will best accord with what we learn from observation. From this point of view it seems to me very clear that no general result applicable to the totality of the stars, or to any portion of the universe lying outside our very limited means of measurement, can be reached by pure induction from the extremely imperfect results of observations which are so far available.

I am sending you under special cover some short and rather desultory papers of mine bearing on the general subject, especially [1902]. May I invite your attention to the results of this paper, especially as set forth in the last two problems? These seem to have a direct bearing on the question you have been discussing with Mr. Hinks. Can we not obtain a coefficient of correlation from the relations between parallax and proper motion given by the two equations [1902, pp. 168 – 169][8.1]:

For any [given] parallax π; mean proper mot. [μ] = 6.78 π
For any [given] proper mot. μ, mean parallax = 0.064μ

that will be more definite than any to be derived inductively from the observations?

I may add that one reason for writing you is that I am getting more and more interested in almost every branch of the work you are pursuing, and postpone taking an active part in it only because I have to complete some astronomical investigations on which I have long been engaged. Should you have time to reply to this letter, I would be pleased to know whether you have any light on the most enigmatical fact you brought out [1894] some ten or more years ago[8.2], that of a law of grouping in the results of the roulette at Monte Carlo. I have recently been told that the authorities at Monte Carlo published some sort of reply to your article, but I have never seen it. Nor do I know whether the subject has ever been followed up, or whether the grouping became normal after you pointed out the abnormality.

Yours very faithfully Simon Newcomb

Стефан Стиглер

Переписка С. Ньюкома и К. Пирсона

В 1899 – 1909 гг. Пирсон переписывался с Ньюкомом и возможно общался с ним. Приводимые ниже письма [только 4 из восьми] были найдены в Библиотеке Конгресса в Вашингтоне. Ясно, что не все письма были разысканы. Так, на письмо Пирсона Ньюкому 24 июня 1904 г. есть только ссылка, и несомненно, что и другие письма также отсутствуют. Некоторые быть может хранятся в Лондоне. Последнее письмо было, очевидно, написано в 1909 г., поскольку в нём содержится ссылка на статью 1908 г. Ньюком умер в 1909 г., и возможно, что это письмо так и не было окончено, не было и послано.

Сокращённый перевод

1. Письмо Пирсон – Ньюком 26 мая 1899 г.
Лондон

Уважаемый профессор Ньюком, я охотно пришёл бы завтра, чтобы познакомиться с Вами, но я не буду в Лондоне в связи с давно взятым на себя обязательством. Однако, в четверг и пятницу я буду в Кембридже на юбилее профессора Стокса[1.1], а поскольку Вы также несомненно будете там, то есть надежда, что мне будет приятно встретить Вас. В большинстве случаев утрами я читаю лекции в Лондоне, но вечером обычно отправляюсь в сельскую местность, потому что моя жена и дети после болезни покинули город. В противном случае я бы предложил встретиться до поездки в Кембридж.

2. Письмо Пирсон – Ньюком 26 июня 1903 г.
Лондон

Уважаемый проф. Ньюком, как раз я сейчас по уши погряз в экзаменах и вряд ли соображу, как найти время, чтобы справиться со своей работой. Я постараюсь предоставить Вам полчаса в понедельник, если это Вас устроит, если действительно окажется целесообразным, здесь, в Университетском колледже. Должен, однако, сказать, что если дело идёт о Выставке в Сент-Луисе, то боюсь, что никак не смогу присутствовать. Два года назад я получил очень любезное приглашение в Бостон, в Институт Лоуэлла[2.1], но не смог покинуть свою работу.

Я практически живу на студенческие взносы, и каждый шаг, который оставляет мое отделение под менее полным присмотром[2.2], склонен ослаблять его эффективность и сразу же влиять на мой заработок. Таким образом, в настоящее время, даже не говоря о расходах на путешествие[2.3], я не вижу никакой возможности позволить себе поездку в Америку ни со стороны времени, ни ввиду денег.

3. Письмо Ньюком – Пирсон 27 июня 1903 г.
На бланке *Всемирная выставка. Сент-Луис 1904, Конгресс искусств и науки. Президент Саймон Ньюком*
Лондон

Уважаемый профессор Пирсон, поскольку я пробуду в Лондоне две недели или дольше, я предпочту обождать, чтобы выяснить, не закончится ли Ваш очень напряжённый период до моего отъезда. Попросту говоря, я полагаю, что Вы – единственный ныне живущий автор, чьи сочинения я почти всегда читаю, если есть время и могу достать их, с кем во время чтения я веду воображаемые интервью.

Ваша статья [1902] о теории ошибок застигла меня в Вашингтоне за день до моего отъезда в Италию, так что я взял её с собой и читал во время поездки. Мне было по-настоящему приятно узнать, что Вы так совершенно развили идеи, которые я перечислил в общей форме примерно 30 лет назад, хотя только мимолётно [1872]. Я упоминаю это лишь, чтобы показать, что астрономы не так уж пренебрегают некоторыми чертами этой темы, как Вам, видимо, представляется.

Что же касается Выставки [и Конгресса] в Сент-Луисе, я надеюсь, что Вы не станете решать ничего окончательно пока не услышите от меня в дальнейшем. Возможно, я смогу Вам сообщить сведения, которые представят этот вопрос в ином свете.

4. Письмо Ньюком – Пирсон 3 июля 1903 г.
Лондон

Увжаемый профессор Пирсон, Исполнительный совет Международного конгресса искусств и науки[4.1], который пройдёт в Сент-Луисе 19 – 25 сентября 1904 г., уполномочил меня передать Вам сердечное приглашение посетить Конгресс в качестве официального докладчика на тему МЕТОДОЛОГИЯ НАУКИ[4.2].

Я уже выслал Вам копию программы Конгресса, а теперь прилагаю текст, содержащий сведения специально для тех, кто, как Вы, приглашены из Европы в качестве официальных докладчиков. Вы увидите, что необходимые средства на науку будут полностью оплачены Выставкой. Я был бы очень рад встретиться с Вами по этому вопросу в удобное для Вас время, но вплоть до пятницы 10 июля я в основном буду вне Лондона.

5. Письмо Ньюком – Пирсон 14 ноября 1904 г.
Нью-Йорк

Уважаемый профессор Пирсон, этой почтой я высылаю Вам статью, которая весьма близка Вашей тематике [1904]. Насколько мне известно, основная черта моего метода нова[5.1], и я был бы очень доволен, если Вы сможете внимательно её изучить. После своего возвращения домой в пятницу я должен буду написать Вам об этом подробнее и выразить удовлетворение по поводу Вашего письма в Институт Карнеги о моём плане [нрзб] наблюдений.

6. Письмо Ньюком – Пирсон 21 ноября 1904 г.
Вашингтон

Уважаемый профессор Пирсон, я с большим интересом прочёл Ваше письмо от 24 июня, в котором Вы обсуждаете мою идею об институте для обработки и установлении результатов научных наблюдений[6.1]. Думаю, что видимое расхождение наших мнений, на которое Вы ссылаетесь, не принципиально, а вызвано лишь тем, что Вы не знаете, что в точности я предложил и особенно тем, что Вы полагаете, что я имею в виду нечто более всестороннее, чем в действительности.

Во-первых, я считаю, что всякое подобное дело должно начинаться как пробное, с решения вопросов, которые несомненно должны быть изучены. В астрономии таких вопросов просто не перечесть, но думал я в основном не об этом. В основе всей работы должен быть здравый метод, а это в частности означает понимание её целей. Я думаю, что, при подобного рода начале, трудности будут не такими серьёзными, какими, видимо, Вам представляются. Необходимые работники появятся по мере надобности, и дело будет постепенно налаживаться. Начиная так, как мы предположили, нам не придётся *отбрасывать*[6.2] большое число наблюдений.

В метеорологии, к примеру, следовало бы начать с наблюдений, наиболее подходящих для проверки теорий, т. е. с общих метеорологических явлений, их периодичности и их зависимости от любых земных (?) причин, подобных солнечной радиации. В статье [1904], которую я послал Вам на прошлой неделе, есть скромный пример того, что я называю *улучшенными методами*. Если у Вас есть время, чтобы просмотреть её, Вы, как я полагаю, оцените её идею на основании того, что я сказал в ней самой, не нуждаясь в дальнейших моих разъяснениях. Два важнейших моментов в ней таковы.

Метод, описанный в первых трёх или четырёх главах, для случая, когда обычная система сравнения причин и следствий практически не годится, а результат достигается по рассмотрению уклонения второго порядка от стандарта[6.3]. Второй момент – это обработка наблюдений статистики двоен, которая показывает, что пол новорожденного не определяется ни на какой стадии его внутриутробного развития.

Я не знаю никого, более компетентного, чем Вы, для оценивания этой попытки[6.4], и любое Ваше мнение или обсуждение моей статьи будет весомо. Если Ваше суждение будет благоприятным, оно может оказаться решающим для развития и расширения общей обработки статистических данных, в которых такие данные имеются.

7. Письмо Пирсон – Ньюком 2янв. 1905 г.

Открытка, текст написан почерком Пирсона, без адресов, без подписи

Профессор Пирсон[7.1] весьма обязан Вам за Ваше письмо о предложениях, направленных им [Пирсоном] в Институт Карнеги. Он тем не менее полагает, что было бы исключительно трудно претворить их в жизнь. Он также должен сердечно поблагодарить профессора Ньюкома за мемуар [1904], в должное время полученный и прочитанный им. Если, однако, он оказывается не в состоянии подробно написать о нём в настоящее время, то должен привести в оправдание свою исключительную занятость. Тем не менее, он полагает, что мемуар будет усилен, если дополнить его вычислением вероятных ошибок соответствующих величин.

8. Письмо Ньюком – Пирсон 1 ноября 1907 г. [1909 г.]

Вашингтон

Уважаемый профессор Пирсон, когда, более года назад, Вы опубликовали статью мисс Гибсон [Gibson & Pearson 1908], я хотел было написать Вам, выразив свое удовлетворение тем, что Вы доводите приложение своих статистических методов до астрономии, но вместе с тем указать, что метод мисс Гибсон вряд ли приведёт к какому-либо окончательному результату. Это объясняется не какой-то присущей ему и несомненной ошибки, а ввиду скудости и недостоверности исходных данных и отказа от учёта априорно известных соотношений между исследуемыми величинами. Но я был в то время настолько занят, что оказался не в состоянии тщательно изучить её статью, да и сейчас тоже не могу выбрать для этого времени.

Однако, недавно заметив дискуссию [Pearson 1907; Hinks 1907], я решаюсь представить несколько замечаний, которые Вы сами сможете использовать по своему усмотрению. Для получения достоверного результата, отыскивая корреляции между двумя системами наблюдённых величин необходимо, чтобы включённые в каждой системе величины не были чисто случайными и чтобы они содержали *что-нибудь*, что можно было бы считать определенным. В качестве примеров укажем случай, когда каждая система является результатом случайного выборочного исследования и когда число этих величин достаточно велико, чтобы можно было установить какой-то закон среди количеств, даже если они чисто случайны. В случае звёздных параллаксов, рассматриваемых просто в качестве наблюдённых величин без учёта известных условий, влияющих на их значения, ни одно из этих требований не соблюдается.

Мой основной довод состоит в том, что для достижения определённых результатов в качестве основы исследования здесь должны быть взяты известные соотношения между величинами звёзд, их расстояниями и параллаксами. Более того, следует исходить из гипотез путём проб при помощи дедукции и сравнения с наблюдениями, а не ограничиться одной только индукцией. Звёздный мир состоит из звёзд, обладающих определёнными абсолютными светимостями; они распределены в пространстве в некоторой степени случайно и наделены определёнными абсолютными скоростями движения в различных направлениях.

Мне представляется, что единственный метод, при помощи которого можно добиться результата, состоит в формулировании гипотез о нескольких распределениях и сравнения результатов с нашими наблюдениями, чтобы вывести систему гипотез, наилучшим образом соответствующую тому, что мы узнаём из наблюдений. С этой точки зрения мне представляется весьма очевидным, что никакой общий результат, применимый ко всему множеству звёзд или к любой части вселенной, простирающейся вне наших крайне ограниченных возможностей измерения, не может быть достигнут чистой индукцией по весьма несовершенным результатам имеющихся пока наблюдений.

В другом конверте я посылаю Вам свои краткие и несколько отрывочные статьи по общей рассматриваемой тематике и особенно статью [1902]. Могу ли я обратить Ваше внимание на её результаты и в частности на тех, которые изложены в двух последних задачах? Они, видимо, непосредственно относятся к вопросу, который обсуждали Вы и Хинкс [Pearson 1907; Hinks 1907]. Разве мы не можем найти коэффициент корреляции из соотношений между параллаксом и собственным движением по двум уравнениям (1902, с. 168 – 169)[8.1]

при любом [заданном] параллаксе π среднее движение μ = 6.78π,
при любом [заданном] движении μ средний параллакс = 0.064μ,

который окажется более определённым, чем любой индуктивно установленный по наблюдениям?

Могу добавить, что одна из причин моего письма состоит в том, что я всё более и более интересуюсь почти каждой отраслью Ваших работ и откладываю своё активное участие в них [?] только потому, что должен закончить те астрономические исследования, которыми давно уже занимаюсь. Если у Вас найдётся время ответить на это письмо, я был бы рад узнать, есть ли у Вас новые сведения о наиболее загадочном факте, который Вы обнаружили примерно 10 лет назад или более [1894] о результатах игры в рулетку в Монте Карло[8.2]. Недавно я узнал, что тамошние ответственные лица опубликовали какой-то ответ на Вашу статью, но я его не видел. Я также не знаю, не была ли эта тема исследована когда-либо впоследствии и не стала ли группировка примерно нормальной после того, как Вы указали на нарушение этого условия.

Примечания

Первая цифра обозначает номер письма

1.1. Дж. Г. Стокс (1819 – 1903) действительно мог справлять юбилей.

2.1. В Институте Лоуэлла (видимо, в основном) проводились научные и научно-популярные лекции.

2.2. Лишь в 1907 г. Пирсон стал деканом факультета прикладной математики.

2.3. См. Письмо № 4.

4.1. Прилагательное *Международный* отсутствовало в официальном названии Конгресса, см. Письмо № 1.

4.2. Тему доклада Ньюком указал безусловно в связи с книгой Пирсона (1892), которая сразу стала общеизвестной. Мах (Mach 1897, Vorberichte), в первом же издании своей книги, вышедшем после 1892 г., заявил:

Публикация [1892 г.] *познакомила меня с исследователем, кантианские воззрения которого во всех важных пунктах совпадают с моими и который умеет откровенно и мужественно противостоять вненаучным тенденциям в науке*.

Уилкс (Wilks 1941, с. 250), крупнейший американский статистик своего времени, чьи инициалы S. S. воспринимались как Statistician Supreme (Верховный статистик), назвал *Грамматику* классическим философским произведением и пояснил, что Пирсон подчеркнул необходимость освободить науку от богословия и метафизики. В 1916 г. та же книга произвела сильное впечатление на Ю. Неймана, который прочёл её по рекомендации своего *учителя* С. Н. Бернштейна в Харьковском университете (Pearson E. S. 1936, с. 213). Ленин (1909/1961, с. 190 и 274) назвал Пирсона *добросовестным и честным врагом материализма* и *одним из самых последовательных и ясных махистов*. И, наконец, в Википедии, правда, без ссылок, утверждается, что Эйнштейн в возрасте 23-х лет основал научный кружок и предложил прежде всего изучать *Грамматику*.

5.1. Мы не усматриваем ничего особенного в исследовании Ньюкома о возможном существовании тенденции рождения однополых детей в семьях (а не о причинах мужских и женских рождений вообще). Он сравнил собранные по его просьбе данные для семей с различным (вплоть до 16) числом детей и сравнил их с теоретическим распределением, которое имело бы место при отсутствии указанной тенденции. Он (с. 15) заключил, что распределение этих рождений *следует статистическим законам шанса в пределах вероятного отклонения*, – явно недостаточно чёткая формулировка!

Ньюком (с. 8) усомнился в реальности зарегистрированного уменьшения избытка мужских рождений у детей, рождённых вне брака. Для подкидышей этот факт, по крайней мере для Парижа, прояснил Лаплас: мальчиков подкидывали не так охотно. Вообще же уменьшение избытка могло быть связано с более тяжелыми в среднем условиями жизни одиноких беременных женщин.

6.1. В 1905 г. Институт Карнеги опубликовал предложение Ньюкома и отзывы шести учёных включая Пирсона (Newcomb et al 1905); двух из них (но не Пирсона) об этом попросил сам Ньюком, остальных (и быть может и других), – Институт.

Ньюком (с. 179 – 181) отметил, что в XIX в. в различных отраслях естествознания и в социологии накапливались статистические данные и рекомендовал Институту учредить *институт или бюро точных наук*. Не вполне чётко он пояснил, что новая организация должна будет исследовать математические методы обработки существующих наблюдений, включая качественные данные, например, в физиологии.

Пирсон (с. 184 – 188) указал, что половина собираемых данных бесполезна. Основываясь на собственном опыте, он предложил создать Статистический и вычислительный институт для консультирования по поводу собранного материала, сбора и обработки данных. Только после общего признания нового института, добавил Пирсон, он сможет классифицировать и отбрасывать данные, собранные другими, *без чрезмерного трения и споров*.

В 1915-м или 1916-м году Чупров (Шейнин 1990/2010, с. 162) полагал, что следует основать институт для статистического изучения России:

При отсутствии статистических лабораторий […] *разработка накопляющегося статистического материала не может быть успешно вестись неопытными* […] *исследователями и учреждениями*. Существующее положение он назвал *прискорбным*: *Материалы велики и обильны, а порядку в них нет и не извлекается из них и малой доли той пользы, которую они могли бы дать*.

6.2. Слово *отбрасывать* Ньюком выделил; его употребил Пирсон в своём письме в Институт Карнеги, см. Прим. 6.1.

6.3. См. Прим. 5.1.

6.4. Он мог бы, видимо, назвать Юла и Стьюдента (Госсета).

7.1. Странно, что текст написан в третьем лице.

8.1. Указанные формулы Ньюком вывел аналитически. В некоторой степени они могут быть проверены эмпирически, но коэффициент корреляции здесь не нужен.

8.2. Пирсон исследовал публикуемые результаты простейшего варианта игры в рулетку и обнаружил, что, по сравнению с теоретическими требованиями, смена цвета выигрышных номеров происходила слишком часто.

Краткие сведения об учёных, упомянутых в обеих переписках

Ауверс А. Ю. Г. Ф., 1838 – 1915. Астроном. В 1888 г. переработал каталог Брадлея.

Баушингер И., 1860 – 1934. Астроном. Редактор *Berliner Astronomisches Jahrbuch.*

Виннеке Ф. А. Т., 1835 – 1897. Астроном. Изучал движение Меркурия, исследовал астрономические константы. В 1858 – 1867 гг. был и. о. директора Пулковской обсерватории. Опубликовал в Петербурге статистические сведения о северных сияниях (1869).

Кёнигсбергер Л., 1837 – 1921. Математик и историк науки.

Леман-Филе Р. Л.-Ф., 1854 – 1914. Астроном.

Петерс К. А. Ф., 1806 – 1880. Астроном. Редактор журнала *Astron. Nachrichten.* Директор обсерватории в Кёнигсберге. Член-корреспондент Петербургской АН.

Тернер Г. Х., 1861 – 1930. Астроном и сейсмолог. Директор Университетской обсерватории в Оксфорде. Член Парижской АН.

Уотсон Дж. С., 1838 – 1880.

Эрлих П., 1854 – 1915. Химик, врач. Изобрёл химиотерапию. Нобелевский лауреат 1908 г. (премия, совместная с И. И. Мечниковым).

Общая библиография к обеим перепискам

S. Newcomb

1862, Determination of the law of distribution of the nodes and perihelia of the small planets. *Astron. Nachr.*, Bd. 58, pp. 210 – 220.

1872a, Review of […] and Proctor (1971). *Nature*, vol. 4, pp. 41 – 43.

1872b, *On the Right Ascensions of the Equatorial Fundamental Stars*. Washington.

1898, *Tables of the Heliocentric Motion of Mars*. Washington.

1902, On the statistical relations among the parallaxes and the proper motions of the stars. *Astron. J.*, vol. 22, pp. 165 – 169.

1904, *Statistical Inquiry into the Probability of Causes of Sex in Human Offspring*. Carnegie Instn of Washington. Publ. 11.

1905, Evolution of the scientific investigator. *Annual Rep. Smithsonian Instn for 1904*, pp. 221 – 233. President's address at the Congress of Arts and Science. St.-Louis, 1904.

1906, *Compendium of Spherical Astronomy*. New York – London.

Newcomb S., Turner H. H., Pearson K., Lord Rayleigh, Darwin G. H., Schuster A., Pickering E. C. (1905), Methods for promoting research work in the exact sciences. *Carnegie Instn of Washington. Year Book*, No. 3 for 1904, pp. 179 – 193.

K. Pearson

1892, *Grammar of Science*. London. Many later editions in England and beyond as well as translations.

1894, Science and Monte Carlo. *Fortnightly Rev*., new ser., vol. 55, pp. 183 – 193.

1902, On the mathematical theory of errors of judgement with special reference to the personal equation. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A198, pp. 235 – 299.

1907, On correlation and the methods of modern statistics. *Nature*, vol. 76, pp. 517 – 518, 613 – 615, 662.

1948, *Early Statistical Papers*. Cambridge. Editor E. S. Pearson.

Другие авторы

Виннеке А. (1869), Северные сияния в 1816 – 1864 гг. Зап. Имп. АН, т. 15, Прил. 3.

Ленин В. И. (1909), *Материализм и эмпириокритицизм*. ПСС, 5е изд., т. 18. М., 1961.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1990), А. А. Чупров. *Жизнь, творчество, переписка*. М., 2010.

--- (2002), Simon Newcomb as a statistician. *Hist. Scientiarum*, vol. 12, pp. 142 – 167.

--- (2010), Karl Pearson a century and a half after his birth. *Math. Scientist*, vol. 35, pp. 1 – 9.

Achibald C. (1924), S. Newcomb. Bibliography. *Biogr. Mem. Nat. Acad. Sci*. vol. 17, pp. 19 – 69.

Auwers A. (1882 – 1903), *Neue Reduktion der Bradley'schen Beobachtungen*, Bde 1 – 3. Leipzig.

Benjamin M. (1910), S. Newcomb. In *Leading American Men of Science*. Editor, D. S. Jordan. New York, pp. 363 – 389.
Camp B. H. (1933), Karl Pearson and mathematical statistics. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 28, pp. 395 – 401.
Gibson W., Pearson K. (1908), Further considerations on the correlation of stellar characters. *Monthly Notices Roy. Stat. Soc.*, vol. 68, pp. 415 – 448.
Hinks A. R. (1907), On correlation and the methods of modern statistics. *Nature*, vol. 76, pp. 566 – 568, 638.
Mach E. (1897), *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Leipzig. Third edition.
Marsden B. G. (1973), Newcomb. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 10, pp. 33 – 36.
Merrington M . et al (1983), *List of the Papers and Correspondence of Karl Pearson*. London.
Morant G. M. et al (1939), *Bibliography of the Statistical and Other Writings of Karl Pearson*. London.
Pearson E. S. (1936 – 1937), Karl Pearson, an appreciation of some aspects of his life and work. *Biometrika*, vol. 28, pp. 193 – 257; vol. 29, pp. 161 – 248.
Proctor R. A. (1871), *The Sun.* London, 1879.
Wilks S. S. (1941), Karl Pearson: the founder of the science of statistics. *Scient. Monthly*, vol. 53, pp. 249 – 253.

XI

А. А. Марков, Ф. Клейн

Переписка

I. Письма Маркова Клейну

1. Письмо 17.12.1880

Monsieur, Je suis dans le plus grand doute quant au sort de mon second mémoire. Ayant envoyé à M. Teubner les feuilles corrigées de la première impression j'en ai reçu <u>les deux dernières</u> une second fois; cela m'a fait présumer que celles que je lui avais envoyées ainsi que ma lettre avec la prière de m'en envoyer quelques exemplaires ne lui etaient pas arrivées. J'ai telégraphié et ecrit une lettre à M. Teubner dans le cours du mois de Novembre; mais n'en ai pas reçu de réponse jusqu'à présent. Je Vous demande mille pardon, Monsieur, de Vous déranger par ces choses.

Je profite de cette occasion pour Vous dire quelques mots sur la question de Bernoulli dont j'ai fait mention dans mon mémoire sur les formes quadratiques et sur laquelle j'ai fait quelques recherches nouvelles.

Question. Les nombres réels a et b et un nombre entier positif n étant donnés, il s'agit de trouver la plus courte des périodes du système

$$F(a + b) - F(b),\ F(2a + b) - F(a + b),\ \ldots,\ F(na + b) - F[(n - 1)a + b)] \quad (1)$$

où $F(c)$ représente en général un nombre entier se raprochant le plus à c $[- 1/2 < F(c) - c < 1/2]$.

J'ai resolu cette question dans le cas $b = 0$. Pour le cas général j'ai demontré le théorème suivant.

Théorème. La période la plus courte du système (1) sera en même temps la période de la suite

$$F(\Theta) - F(- p/q + \Theta),\ F(p/q + \Theta) - F(\Theta),\ F(2p/q + \Theta) - F(p/q + \Theta),\ \ldots$$

où p/q est l'une des fractions principales ou intermédiaires convergentes à a. t peut être choise de manière que

$$\begin{aligned}
&F(a + b) - F(b) = F(p/q + \Theta) - F(\Theta),\\
&F(2a + b) - F(a + b) = F(2p/q + \Theta) - F(p/q + \Theta),\\
&F(3a + b) - F(2a + b) = F(3p/q + \Theta) - F(2p/q + \Theta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F(qa + b) - F[(q - 1)a + b] = F(qp/q + \Theta) - F[(q - 1)p/q + \Theta].
\end{aligned}$$

Exemple. $a = \dfrac{4}{11} = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + 1/3}},\ b = \dfrac{1}{11},\ n = 6.$

$F(4/11 + 1/11) - F(1/11) = 0,$
$F(16/11 + 1/11) - F(12/11 + 1/11) = 1,$
$F(8/11 + 1/11) - F(4/11 + 1/11) = 1,$
$F(20/11 + 1/11) - F(16/11 + 1/11) = 0,$
$F(12/11 + 1/11) - F(8/11 + 1/11) = 0,$
$F(24/11 + 1/11) - F(20/11 + 1/11) = 0.$

La plus courte des périodes du système 0, 1, 0, 1, 0, 0 sera 0, 1, 0, 1, 0.

En posant

$$\frac{p}{q}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+1/1}}}=\frac{2}{5},\ \frac{1}{10}>\Theta>-\frac{1}{10}$$

nous aurons

$F(2/5 + \Theta) - F(\Theta) = 0$, $F(4/5 + \Theta) - F(2/5 + \Theta) = 1$,
$F(6/5 + \Theta) - F(4/5 + \Theta) = 0$, $F(8/5 + \Theta) - F(6/5 + \Theta) = 1$,
$F(10/5 + \Theta) - F(8/5 + \Theta) = 0$.

Si Vous ne trouvez pas mes recherches dénuées d'intérêt je les exposerai sous forme de mémoire et Vous les enverrai pour être inserées dans Votre vénéré journal.

Je finis ma lettre en Vous priant de ne pas trop m'en vouloir pour le français de mes lettres. Quoique je comprenne l'allemand je ne le posséde toutefois pas assez pour ecrire dans cette langue.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus distingués. André Markoff

St. Pétersbourg; rue de Pskoff, maison N 1.

2. Письмо 30.1.1885

Monsieur, Je Vous prie, ayez la bonté de m'annoncer le sort de ma note sur la correction de la formule de Gauss [1885].

S'il Vous plait, on peut ajouter à cette note comme exemple le calcul numerique des intégrales définies

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log(1+y)}{\sqrt{1-y^2}}dy \text{ et } \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\log(1+y)\sqrt{1-y^2}} .$$

Dans mon mémoire (publié en russe) [1884b], que j'ai envoyé à Vous (2 Janvier 1885), j'ai résolu la suivante question de M. Tchebychef:

Soit $\Omega(z)$ une fonction donnée; soit aussi données les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(z)dz,\ \int_a^b zf(z)dz,\ldots,\ \int_a^b z^n f(z)dz,$$

où $f(z)$ est une fonction inconnue et positive dans l'intervalle de z jusqu'à $z = b$.

Il faut trouver maximum et minimum des intégrales définies

$$\int_a^x \Omega(z) f(z) dz \text{ et } \int_a^b \Omega(z) f(z) dz.$$

Ici x est une quantité donnée et $a < x < b$. Ma résolution a lieu, si la fonction $\Omega(z)$ satisfait à quelques conditions restrictives.

Veuiller, Monsieur, agréer l'assurance de ma considération très distinguée. André Markoff

St. Pétersbourg; rues Witebska et Mjasna, maison N 19 – 7, log. 7.

3. Письмо 14.2.1885

Monsieur, J'ai reçu Votre letter [No. 11], datée du 4 Fevrier et je Vous présente mes plus grands remercîments.

Quoique j'ai eu une nouvelle au mois d'Octobre, mais j'en avais des doutes, parce qu'il n'y avait mot de la question de publier ma note. J'ai Vous envoyé les exemples mentionnés ce 10 Fevrier.

Maintenant je prépare pour Votre honorable journal un mémoire, dans le quel je me propose de

1. généraliser les inégalités de M. Tchébychef;
2. déduire la reste de la formule de Gauss et des formules semblables indépendamment de la formule de M. Hermite.
3. démontrer la convergence de la fraction continue correspondante à l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(y)dy}{z-y}. \qquad (2)$$

Quant à la solution de la question de M. Tchébychef, j'ai l'intention de l'exposer dans un autre mémoire. Votre proposition ne m'est pas entierèment claire.

Dans le mémoire *Démonstrations de certaines inégalités* … [1884a] je mets en premier lieu deux formules fondamentales assez connues, des quelles je déduis aisement tout ce qu'il me faut.

On trouve ces formules en allemand dans l'ouvrage de M. Heine *Handbuch der Kugelfunctionen*. Quant aux résultats de ma note dernière, je me propose les déduire indépendamment de la formule de M. Hermite et j'entrerai alors dans les détails.

Il me parait, que l'application des fractions continue au calcul approché des intégrales est suffisamment connue. Peut être, leurs applications au développement des fonctions en séries et à l'intérpolation par la méthode des moindres carrés sont moins connues; ce sont précisement quelques formules de M. Tchébychef.

Mais en général l'application des fractions continues à l'intérpolation me parait avoir peu d'importance scientifique. Je ne sais rien dans cette partie des mathématiques, que l'on ne sache pas en Allemagne et qui soit plus ou moins important. C'est pourquoi Votre proposition ne m'est pas entièrement claire. Si Vous désirez, je peux au commencement du mémoire, qui je prépare, faire mention:

1. des formules fondamentales de la théorie des fractions continues correspondantes à l'intégrale (2).
2. de la distribution des racines de quelques equations [1886].

3. de l'application des fractions continues à l'intérpolation [1896b?].
4. de l'application des fractions continues au calcul approché des integrals [1896b?].

Vous avez peut-être en vue d'autres fractions continues et rélativement à cela d'autres questions, par exemple des fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro, ou bien de l'intégration sous forme finie.

J'aurais pu parler sur la première de ces questions; quant à la séconde – je n'en dirais pas la même chose. En même temps permettez moi de Vous démander dans quele état se trouve la question sur la transcendance des nombres e et π [cf. 1883]. J'ai appris, que M. Weierstrass [1885] a simplifié la démonstration de M. Lindemann [1882a, b]. Ceci m'intéresse, parceque j'ai publié en russe la démonstration de M. Lindemann avec quelques explications supplémentaires.

Veuillez bien, Monsieur, accépter ma plus haute considération. Votre tout devoué Dr. André Markoff

Rues Witebska et Mjasna maison N. 19-7, log. 7

4. Письмо 29.9.1886

Monsieur, Je prépare pour Votre honorable journal deux notes sur l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \qquad (1)$$

de la série hypergéométrique.

Dans la première note, que je Vous envoye avec cette lettre, je me propose d'obtenir tous les cas, où le produit de deux intégrales de l'équation (1) se réduit à une fonction entière de x.

Les résultats de cette note j'applique ensuite dans la note seconde à la résolution de la question suivante:

Il faut trouver toutes les valeurs de α, β, γ pour lesquelles notre équation (1) admet l'intégrale

$$X(y')^2 + Yy'y + Zy^2 = 0$$

où X, Y, Z sont les fonctions entières de x.

Si mes résultats sont neufs, j'espére que Vous leur donnerez une place dans Votre honorable journal.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de ma considération la plus distinguée. A. Markoff

St. Pétersbourg, Rue de Pskoff, maison N. 10, log. 3

5. Письмо 1.1.1892

Monsieur, Il me semble intéressant d'appliquer encore Votre théorème au cas particulier $n = k$. Dans ce cas nous parvenons à la conclusion, que le nombre N_1, des racines positives de l'équation

$$0 = x^n - \frac{n\cdot 2\alpha\cdot 2\beta}{1\cdot 2n(n-1/2)}x^{n-1} + \frac{n(n-1)\cdot 2\alpha(2\alpha+1)\cdot 2\beta(2\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)(n-1/2)(n-3/2)}x^{n-2} - \ldots,$$

où $\alpha + \beta = -n$, est égal au plus petit des nombres 0, 1, 2, 3, …qui doit ajouter à $2\alpha \geq 2\beta$ pour avoir un nombre positif.

Quant au nombre N_2 des racines négatives de la même équation, il est égal à

$$\frac{1-(-1)^{N_1+n}}{2}.$$

Je Vous félicite, Monsieur, à l'occasion de la nouvelle année.

Votre très humble et tout devoué A. Markoff

St. Pétersbourg Rue Torgovaja 30, log. 9

6. Письмо 5.12.1895

Monsieur et très honoré confrère.

Dans la séance d'hier la Classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences Vous a élu unanimement, sur notre proposition, au nombre de ses Membres-Correspondants. La proclamation solemnelle aura lieu dans la séance publique de l'Académie, le 10 Janvier 1896; mais en attendant nous nous empressons de Vous présenter nos félicitations les plus cordiales comme à notre nouveau collègue.

Veuillez agréer, Monsieur et très honoré confrère, l'expression de notre parfaite considération.

A. Markoff N. Sonin

7. Письмо 9.1.1896

Monsieur, Votre lettre dissipe mon doute et me rappele, que le fait, dont il s'agit, se rencontre aussi dans mes recherches sur la fonction entière égale au produît de deux séries hypergéométriques (*Math. Annalen*, 40 [1892]).

De plus, je vois maintenant, que par les considérations de Sturm il est facile de démontrer Vos assertions sur la valeur de X, pour l'équation différentielle considerée, dans les cas

$$B_{2n+1} < B < B_{2n},\ \ldots,\ B_2 < B < B_1.$$

Or les cas

$$B < B_{2n+1} \text{ et } B > B_1$$

présentent la difficulté particulière et je pense dans ce moment, qu'il ne suffit des considérations de Sturm pour démontrer Votre égalité

$$X' = X'' + \left[\frac{n}{2}\right].$$

Il m'intéresse beaucoup, quelle portée donner Vous aux considérations de Sturm dans Vos recherches au X?

Quant à la publication de ma lettre précedente, je prie, Monsieur, de Vous retreindre à la partie positive.

Veuillez agréer, Monsier honorable Collègue, l'assurance de mon estime profonde et de mes sentiments les plus distingués.

St. Pétersbourg (Russie). W. O. 7 (septième) ligne

N. 2 (Académie des Sciences), log. 10 André Markoff

8. Письмо 30.3.1899

Monsieur, En 1907 va s'accomplir le 200[e] anniversaire d'Euler. Les admirateurs de son génie ont émis l'idée d'organiser une souscription internationale pour élever au grand géomètre un monument à St. Pétersbourg.

Cette idée a soulevé diverses objections, dont une seulement me semble avec quelque valeur.

Euler, a-t-on objecté, *est né à Bâle, et a passé 25 années de sa vie à Berlin, des lors ne serait il pas plus convenable d'élever le monument plutôt dans une de ces deux villes qu'à St. Pétersbourg*?

Sans vouloir nier complétement la force de cette objection, je rappellerai cependant qu'Euler a passé, en deux séjours, plus de 30 ans à St. Pétersbourg, qu'il y est mort et qu'il y a été enterré, que toute sa postérité est restée en Russie, enfin, que la plus grande partie de ses travaux est inserée dans les éditions de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, avec laquelle il n'a cessé d'être en relations continues même pendant son séjour à Berlin.

Je me borne à mentionner une autre objection selon moi dénouée de toute valeur et de tout fondement: c'est qu'à l'époque actuelle les travaux d'Euler seraient dépourvues de tout interét scientifique!

Si l'idée d'élever un monument à Euler Vous est sympathique et si Vous estimez que c'est à St. Pétersbourg que doit revenir le privilège d'être orné de ce monument, je Vous prie de vouloir bien répondre a l'appel que j'ai l'honneur de Vous adresser. Votre réponse, avec la permission de la communiquer à l'Académie des Sciences, me sera d'un sécours précieux dans les efforts que j'entreprends pour obtenir une solution favorable.

Je dois dire en terminant que quoique mon désir soit de voir le monument d'Euler à St. Pétersbourg, je serais néanmoins satisfait, jusqu'à un certain point, même au cas où cet hommage à la mémoire du grand savant lui serait rendu à Bâle ou à Berlin.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon estime profonde et de mes sentiments les plus distingués. André Markoff

9. Письмо 10.10.1901

Monsieur, La note, envoyée avec cette lettre pour *Mathematische Annalen* [1903], est une améliaration [amélioration] d'une note publiée récemment en russe dans les travaux de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg [1901].

Elle se joint étroitement à mes recherches antérieures et aux recherches de G. [Egor Iv.] Zolotareff et de M. [Monsieur] A. Korkine et contient la solution, quoique incomplète, d'un problème difficile. Je suis persuadé, que non seulement mes démonstrations mais encore mes résultats sont nouveau. En d'autre cas je me propose de démontrer les propriétés intéressantes des formes obtenues

$$x^2 - xy + y^2 - 2z^2, x^2 - xy - y^2 - 2z^2, x^2 + y^2 - 3z^2$$

par rapport à la répresentation des nombres.

A propos de tout cela il n'est pas superflu de remarquer que la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies reste jusqu'ici un domaine mal exploré. Par exemple contrairement aux opinions de M. M. Jordan et Picard (Notice sur M. Ch. Hermite; *Oeuvres scientifique de Charles Hermite*) le problème de leur équivalence ou non équivalence reste jusqu'ici non resolu.

En profitant de l'occasion je Vous prie, Monsieur, agréer l'assurance de mon estime profonde et de mes sentiments les plus distingués. André Markoff

St. Pétersbourg (Russland), W. O. 7 (siebente) Linie N. 2 (Acad. [Akad.] des Wissenschaften)

10. Письмо без даты

Sehr geehrter Herr College, Der vorliegende Aufsatz, um dessen Aufnahme in den Spalten Ihres geschätzten Journals ich Sie zu bitten mir erlaube, enthält eine Entwickelung der von Tchebychew hingestellten Fragen.

Dieser Aufsatz ist jedoch etwas selbstständiges und ganzes und erfordert keine Berufung auf vorausgehende Schriften, weil alle meine Betrachtungen auf bekannten Sätzen der Theorie der Kettenbrüchen basieren. Ich füge noch hinzu dass diese Betrachtungen die Lösung aller Fragen dieser Art beleuchten.

Hochachtungsvoll Ihr ergebener A. Markow

St. Petersburg (Russland). Wasili Ostrow 7 (siebente) Linie N 2 (Akademie der Wissenschaften)

[Этот адрес впервые появился в Письме № 7 9 янв. 1896 г.]

II. Письма Клейна Маркову

11. Письмо без начала, почтовый штемпель 5.2.1885

gebahnt ist, dürfte in Deutschland relativ unbekannt sein. Wäre es Ihnen nicht möglich, uns hierüber ein zusammenhängendes, auch für Nicht-Specialisten verständliches Referat zu geben, in welchem ebensowohl die Methode als der Umfang der bisher erreichten Resultate besprochen würden? Es würde mich freuen, wenn Ihnen ein solches Anliegen nicht ungelegen käme.

Hochachtungsvoll, Ihr ergebener F. Klein

Adr. Sophiestr. 10/II

Адрес Письма:

Herrn Privatdocenten A. Markoff St. Petersbourg. rues Witebska et Mjasna maison N 19 – 7, log. 7 Stamp: Leipzig 5/2 85

12. Письмо 10.10.1886

Prof. Dr. Felix Klein. Göttingen, 10. Okt. 1886.
Weender Chaussee 6.

Sehr geehrter Herr!

Auf Ihre Zusendung, die ich am 2. Okt. wohlbehalten erhielt, möchte ich zuvörderst vorläufig antworten.

Es ist mir nicht bekannt, daß die von Ihnen behandelte Frage als solche irgendwo in definitiver Form untersucht wäre. Dagegen gibt es verwandte Problemstellungen, die mannigfach behandelt sind. Ich möchte Sie in dieser Hinsicht auf die Arbeiten zur Hermite, Fuchs und Brioschi verweisen, über die in den [*Jahrbuch über die*] *Fortschritten der Mathematik* (Bd. 10, 1878) auf p. 232 – 233 berichtet ist. Vielleicht haben Sie die Güte, diese Arbeiten zu vergleichen und mir Ihr mitzutheilen, ob an Ihrer Arbeit irgend etwas geändert werden soll oder nicht. Eventuel bringen mir Ihre Arbeit baldmöglichst zum Abdruck.

Habe noch eine Frage, die mir gelegentlich aufstiess. Sie haben [ziehen?] in der Ebene zwei Gerade und einen Punkt; durch den Punkt soll eine dritte Gerade so durchgelegt werden, daß das auf ihr durch die beiden ersten Geraden abgeschnittene Stück ein Max. oder Min. wird. Die Aufgabe hat 3 Lösungen. Ist Ihnen bekannt, ob dieselben irgendwo discutiert sind?

Mit hochachtungsvollem Gruß Ihr ergebener F. Klein

13. Письмо 19.12.1886

Prof. Dr. Felix Klein. Göttingen, 19. Dec. 1886.
Weender Chaussee 6.

Sehr geehrter Herr!

Hatten Sie doch den Brief [No. 12] bekommen, den ich Ihnen Mitte Oktober zu geschicken hatte und in welchem ich Sie insbesondere auf Arbeiten von Fuchs aufmerksam machte? Da ich hierüber bisher nichts erfahren habe, bin ich unschlüssig, ob Ihre Meinung ist, daß wir Ihre Untersuchung einfach abdrucken, oder ob ich noch auf einen Brief von Ihrer Seite warten soll. Eine weitere Frage möchte ich wegen der zweiten neuerdings übersandten Note an Sie richten. Die Fälle, in denen ein particuläres Integrale der Differenzialgleichung der hypergeometrischen Reihe existirt, deren logarithmischen Ableitung eine rationale Function von x ist, finden Sie bei Schwarz in Bd. 75 des Crelle'schen Journals [1873], p. 294, 295, vermutlich vollständig aufgezählt. Es ist nun keineswegs meine Meinung, daß darum Ihre Darstellung besonders modifiziert zu werden brauchte: vielleicht wird ein bloßes Citat, welches Sie einfügen wollen oder welches auch die Redaktion, wenn Sie dies vorziehen, einfügen kann, genügen. Ich möchte Sie aber in der That bitten, mir [?] in nicht zu ferner Zeit gute Nachricht zukommen zu lassen. Der Druck kann dann sehr bald erfolgen.

Ihr hochachtungsvoll ergebener Prof. Dr. Felix Klein

Отдельная страница

Abs. [Absender, отправитель] Prof. Klein. Göttingen. Штемпель 23 янв 1892 С. Петербург

14. Письмо 1.2.1892

Göttingen 1. Februar 92.

Sehr geehrter Herr College!

Eine Reihe von Zufälligkeiten hat mir leider verhindert, auf Ihre weithin Briefe schon vorher zu antworten. Lassen Sie mich heute vor allem Dingen den Wunsch aussprechen, von Ihrer Seite zweites Abdruck in den mathematischen [*Mathematischen*] *Annalen* vielleicht eine einheitliche Redaktion Ihrer verschiedenen Bemerkungen zu bekommen. Andererseits darf ich erzählen, daß ich die Überlegungen durch welche ich in Bd. 37 [Klein 1890] mein Theorem entwickelt habe, inzwischen nach verschiedenen Seiten weiter verfolgte. Insbesondere habe ich eine Anwendung auf den Hermite'schen Fall der Lame'schen Gleichung gemacht. Es liegen da die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei Ihnen, insofern die lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung zwei Particularlösungen hat, deren Produkt erst einem rationalen Polynom gleich ist. Eben für letzteres Polynom bestimmte ich Zahl und Lage den reellen Wurzeln. Der kleine Artikel, den ich darüber schrieb, würde längst gedrückt sein, wenn nicht die Setzer in Leipzig seit Anfang November gestricket hätten. Nun endlich hat der Strike aufgehört und ich hoffe in nächster Zeit wenigstens Correcturabzüge zu haben, von denen ich Ihnen dann umgehend ein Exemplar schicken kann. Ein junger Amerikaner, der hier ist, Hr. Van Vleik, hat die Weiterführung der Betrachtungen übernommen, welche ich selbst in meinen Vorlesungen nur habe skizzieren können. Dabei hat er ganz [?] auch die Fragen weiter untersucht, die Sie in *Annalen* 27 (*Sur les raçines de certaines équations*) [1886] in Angriff genommen haben. Wenn Sie es gestatten, wird er Ihnen gern über seine bisherigen Resultate Näheres mittheilen. Ich selbst bin leider für dieses Jahr durch anderweite Arbeiten ausschließlich in Anspruch genommen; ich gebe aber die Hoffnung nicht auf, auf dem geometrischen Wege von Bd. 37 in das Wesen der linearen Differenzialgleichungen 2$^{\text{ter}}$ Ordnung (d. h. der durch diese Differenzialgleichungen definirten Proportionen) noch genauer eindringen zu können.

Hochachtungsvoll bin ich Ihr ganz ergebener F. Klein

15. Письмо 9.12.1895

Göttingen 9. Dec. 1895

Nehmen Sie für die überraschende und mich überaus ehrende Wahl Ihrer Akademie [No. 6] meinen besonderen Dank. Ich finde mich in der That, wenn ich die Sache persönlich wenden darf, in Augenblicke in Folge von allerlei Widerstand, den ich erfahre, in einem Stadium der Depression, so daß eine Anerkennung, wie Sie sei mir schicken, war in der That sehr willkommenisch. Nicht minder freue ich mich, was ich Ihnen kann auszusprechen brauche, durch Ihre Wahl in unmittelbare Verbindung mit einem wissenschaftlichen Kreise gesetzt zu sein, dessen hervorragende und originale Leistungen der besonderen Richtung meines mathematischen Interesses in hohem Grade entgegenkommen.

Wollen Sie bitte allen Ihrer werthen Collegen meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Hochachtungsvoll verbleibe ich Ihr sehr ergebener F. Klein

Адрес письма

Mr. A. Markoff Membre de l'Académie des Sciences
St. Pétersbourg Wasili Ostroff 7. ligne N. 2 Russland
Stamp: 9.12.95

16. Письмо (открытка) 26.10.1901

Sehr geehrter Her. [Herr] College! Ich danke Ihnen verbindlicht für Ihre wertsvolle Zusendung für die mathematischen [*Mathematischen*] *Annalen* und erwidere Ihre Grüsse auf das angelegentlichste.

Ihr sehr ergebener F. Klein
Göttingen, 26. Oktober 1901.

Адрес письма (лицевая сторона открытки)

Mr. A. Markoff Membre de l'Académie des Sciences
St. Petersburg W. O. 7^{me} Linie Nr. 2 Russland

Библиография

А. А. Марков

1879 – 1880, Sur les formes quadratiques binaires indefinites. *Math. Annalen* (MA), Bd. 15, pp. 381 – 406; Bd. 17, pp. 379 – 399.

1882, Sur une question de Jean Bernoulli. MA, Bd. 19, pp. 27 – 36.

1883, *Доказательство трансцендентности чисел е и* π. СПБ.

1884a, Démonstration de certaines inégalités de M. Tchébychef. MA, Bd. 24, pp. 172 – 180.

1884b, Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева. *Сообщ. и проток. засед. Харьк. математич. общ.* за 1883, т. 2, с. 105 – 114.

1885, Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. MA, Bd. 25, pp. 427 – 432.

1886, Sur les racines de certaines equations. MA, Bd. 27, pp. 143 – 150, 177 – 182. О корнях некоторых уравнений. В книге автора (1948, с. 34 – 43).

1887, Sur l'équation différentielles de la série hypergéométrique. MA, Bd. 28, pp. 586 – 593; Bd. 29, pp. 247 – 258.

1892, Sur la série hypergéométrique. Extrait de deux lettres adressées à F.Klein. MA, Bd. 40, pp. 313 – 316.

1896a, Sur l'équation de Lamé. Extrait d'une lettre adressée à Mr. Klein. MA, Bd. 47, pp. 47, pp. 598 – 603.

1896b, Nouvelles applications des fractions continues. MA, Bd. 47, pp. 579 – 597. Новые приложения непрерывных дробей, 1896. В кн. автора (1948, с. 120 – 145).

1901, О неопределённых троичных квадратичных формах. *Изв. Имп. АН*, 5-я серия, т. 14, № 5, с. 509 – 523.

1903, Sur les formes quadratiques ternaries indéfinies. MA, Bd. 56, pp. 233 – 251.

1948, *Избр. тр. по теории непрерывных дробей и т. д.* М. – Л.

Ф. Клейн

1890, Über die Nullstellen der hypergeometrischer Reihe. *Math. Annalen*, Bd. 37, pp. 573 – 590.

Другие авторы

Гродзенский С. Я. (1987), *А. А. Марков*. М.

Левшин Б. В. и др. (1974), *Персональный состав Академии Наук СССР*, т 1. М.

Юшкевич П. С. (1968), *История математики в России*. М.

Burau W., Schoeneberg B. (1973), Klein. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 7, pp. 396 – 400.

Heine L. (1861), *Handbuch der Kugelfunctionen*. 2. Auflage, Bde 1 – 2. 1878 – 1881.

Hermite Ch. (1905 – 1917), *Oeuvr.*, tt. 1 – 4. Paris.

Lindemann F. (1882a), Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logarithmes néperiens commensurables etc. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 95, pp. 72 – 74.
--- (1882b), *Über die Zahl* π. *Math. Annalen*, Bd. 20.
Schwarz H. A. (1873), Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. *J. f. d. reine u. angew. Math.*, Bd. 75, pp. 292 – 335.
Weierstrass K. (1885), Zu Lindemann's Abhandlung (1882b). *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pp. 1067 – 1085.

XII

А. В. Васильев

Меран, Италия. 30 дек. 1898 г.

Письмо Я. Люроту

Staatsbibliothek zu Berlin, Manuskript Abt., H*1892(13) Wassiliew

Hochgeehrter Herr College!

Im Auftrage der Physico-mathematischen Gesellschaft zu Kasan habe ich die Ehre Ihnen als dem Ehrenmitglied des Lobatschewsky Comite's die Lobatschewsky'sche Medaille übergesenden [übersenden].

Hochachtungsvoll A. Wassiliew

Глубокоуважаемый коллега,

По поручению Казанского физико-математического общества, в качестве почётного члена его Комитета Лобачевского, имею честь переслать Вам Медаль Лобачевского.

Библиография

Юшкевич А. П. (1968), *История математики в России*. М.

Brille A., Nöther M. (1911), Jakob Lüroth. *Jahresber. Dtsch Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 20, pp. 279 – 299.

Pfanzagl J., Sheynin O. (1996), A forerunner of the *t*-distribution. *Biometrika*, vol. 83, pp. 891 – 898.

--- (1997), Lüroth. *Enc. of Stat. Sci.*, vol. 7, 2006, pp. 4433 – 4434.

XIII

А. А. Чупров

Лекция по статистике (обзор)

Анонимная запись, видимо только одной лекции, без даты.
Моск. отделение Архива РАН, фонд 1604, опись 2, № 33.
Страницы рукописи пронумерованы: 19, 19об, …, 25, 25об, 26

Текст разбит на три главы, которые в свою очередь не вполне последовательно подразделяются на параграфы. В подправленном виде это выглядит так: первая глава (без заглавия) состоит из шести пунктов, также без заглавий, но в § 5 выделены переписи. Вторая глава названа *Группировка и сводка* с выделением счётной обработки, третья глава, *научная обработка* с выделением статистики народонаселения и истории статистики.

Изложение во многих местах конспективное, иногда тема лишь названа. Общими вопросами первой главы являются статистическое наблюдение и переписи (особо – сельскохозяйственные). Упомянем теперь отдельные высказывания Чупрова.

Периодичность переписей *убивает подозрительность* (с. 20об); за показание неверных сведений и за отказ от участия в переписях в США и Англии предусмотрены денежные штрафы (с. 21об). До 1917 г. в России была проведена только одна всеобщая перепись (в 1897 г.), Чупров же сообщает лишь о городских переписях Москвы и Петербурга (видимо, в 1882 и 1890 гг. соответственно), проведенных *новейшими приёмами* и обработанных *лучше, чем во многих городах З.Е.* [Зап. Европы] (с. 20об), а также о частных текущих списках населения. Он (с. 22) замечает, что ограничение сведений *церковными записями приводит* […] *к лишению судебной защиты иноверцев, сектантов и пр*.

Далее, *типические явления не подлежат статистическим исследованиям* (с. 19об), но статистик должен же выделять и по возможности пояснять их. Впрочем, там же Чупров упоминает *обследование нескольких типических объектов*, т. е. ещё не названное выборочное исследование.

Но вот недостаточно определённые или просто ошибочные утверждения. Несколько раз встречаются ссылки на закон больших чисел Бернулли, но его суть не пояснена. Неожиданно даётся определение средней арифметической, затем – не вполне чёткое обобщение этого понятия, про которое сказано, что оно *иногда называется средним геометрическим или динамическим целым*, что весьма странно (с. 23об). И далее (с. 24): *в расположении чисел, отклоняющихся от среднего числа, господствует* (не всегда!) *закон симметрии*, затем *Вероятность полученной средней вырастает как корень квадратный из числа единичных случаев*.

А вот это просто неверно. Возрастает вес или убывает стандартное отклонение результата, вероятность же его может и понижаться. Всё зависит от плотности распределения $\varphi(x)$ соответствующей случайной величины. При возрастании числа наблюдений понижается дисперсия этой величины и соответственно изменяется форма кривой $\varphi(x)$, но вероятность результату находиться в некотором интервале $[x_0 \pm dx]$ внутри области определения аргумента x не обязательно повышается указанным образом. Более того: эта область расширяется, на долю интервала $[x_0 \pm dx]$ быть может придётся намного меньше площади *под* кривой $\varphi(x)$[1].

В заключение вспомним, что Чупров (1903) опубликовал введение в свой курс лекций, в котором не было вообще ничего, схожего с данным текстом и что 11.10.1902 в письме отцу он (Шейнин 1990/2010, с. 17) сообщил, что отклонил предложение (чьё?) издать весь свое курс и *подробно объяснил своё решение*.

Примечание

1. В 1902 – 1904 гг. и в некоторые последующие годы теория вероятностей в Московском университете не преподавалась (*Обозрение*. Б. г.), возможно, что и Чупров не изучал её в качестве обязательной дисциплины, а потому и ошибся. И в своём *кандидатском сочинении* (дипломной работе) он поверхностно описал его вероятностную часть (Шейнин 1990/2010, § 9).

Библиография

Обозрение (б. г.), *Обозрение преподавания на физико-математическом факультете* [Московского университета] *на … год*. Ежегодное издание, без года и места, без титульного листа.

Чупров А. А. (1903), Статистика и статистический метод. Их жизненное значение и научные задачи. В книге автора *Вопросы статистики*. М., 1960, с. 6 – 42.

Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка*. М., 2010.

XIV

Генглез

Письмо А. А. Маркову

Архив РАН ф. 173, опись 1, № 27, лл. 3 и 3об

Глубокоуважаемый Андрей Андреевич,

Содержание Вашего письма от 30 сего июля будет мной доложено на ближайшем заседании членов Правления, а также Ваш отказ от звания члена Общества, и, стало быть, кандидата в члены Правления. Что касается Вашего членского взноса, то ввиду того, что Вы состояли членом Общества всего полтора месяца, и, очевидно, по недоразумению, то соблаговолите сообщить, желали ли Вы его получить обратно, или прикажете ему дать иное назначение.

Прошу принять уверение в искреннем моём сожалении о недоразумениях, вызвавших Ваш отказ и в которых Правление Общества совершенно не повинно.

С совершенным почтением Г. (?) Генглез

Исп. об. Председателя Правления

31 июля 1913 г.

XV

П. А. Некрасов

Письма П. А. Флоренскому

не опубликовано

Письмо № 1. 4авг. 1916

Запись, приложенная к письму А. Чельцова, племянника Некрасова и послужившая началом переписки

Проект […] введения теории вероятностей в среднюю школу […] *встретил жестокую оппозицию со стороны академика А. А. Маркова и его партии*.

Доклад академической комиссии *за подписью* […] *партизанов А. А. Маркова*. […] *Не найдёт ли возможным проф. о.* [отец] *П. А. Флоренский ознакомиться с полемикой и реагировать на нее* […].

Школа А. А. Маркова направляет подготовку учителей в духе панфизизма с антихристианской окраской, как это *подтверждается его Руководством (изд. 3е, стр. 225 и изд. 2-е, стр. 213 – 214).*

В *Новом времени* №№ 14356 и 14366 1916 г. *в статье Академия наук и наука* А. А. Бронзов**[1.1]** *подчеркнул, что академики стараются отстоять научность марксизма, тогда как П. А. Некрасов выяснил ошибочность самой арифметики марксизма и иллюзорность их реализма*.

Письмо № 2. 22 сентября 1916 г.

Кажется мне, что профессора Духовных академий должны бы реагировать на споры между мной и академиком А. А. Марковым, оставаясь на научно-философской почве, а в практическом отношении не выходя из границ научной педагогики.

По поводу *Доклада* академической комиссии: *Тяжеловесная ирония А. А. Маркова и* K^0.

Письмо № 3. 2 ноября 1916 г.

Некрасов благодарит за брошюру *Около Хомякова* и за сочувствие своим идеям о *вероятности в суждениях*.

Марков выступил против Буняковского, *злонамеренно* создаёт *антихристианское умонастроение.*

Для будущего нашей родины необходимо поднять в средней школе математическое образование, но предохранить его от умонастроения А. А. Маркова и K^0 *теми наставлениями, эмблемами и упражнениями, кои входят в родное наше слово и в арифметику Магницкого, в аритмологию Бугаева, в теорию вероятностей Буняковского, Чебышёва, Менделеева и мою*[3.1].

Математическая сторона спора касается критики апорий, софизмов математического анализа. Философская сторона *переходит в критику антиномий математического опыта и кантианских антиномий чистого разума. Практическая сторона спора сводится к борьбе за то или другое* <u>*общее*</u> *направление дела народного просвещения*.

Некрасов видит *отражение миросозерцания* Магницкого у Ломоносова, затем у А. С. Хомякова, Киреевского[3.2] и др. Свои научно-педагогические воззрения считает продолжением взглядов Магницкого, упоминает решение им социальных, бытовых, гражданских, политических, религиозных вопросов. Магницкий оказывается у Некрасова на уровне Ломоносова.

Обратите внимание на главную апорию, подчёркнутую в нашем споре об <u>*аксиоме непрерывности*</u> *(Лагранжа, Вейерштрасса, Дедекинда)*[3.3]. *Антитеза этому* <u>*аналитическому*</u> *постулату –* <u>*аритмологический*</u> *постулат:* <u>*аксиома прерывности*</u> […] *тел. Эти постулаты пропитывают* <u>*главные физико-математические теории*</u>.

За счёт апорий и под видом принципов якобы точной науки можно провести в учебники лжеучения и ложную веру в панфизизм, увлекающий А. А. Маркова и K^0 *и нисколько не отличающийся от пантеизма, человекобожия*.

Письмо № 4. 11 ноября 1916

Получил брошюру <u>Приведение чисел[4.1]</u>. Одобряет предложение рецензировать <u>Среднюю школу</u> … [1916c] Разрешает использовать текст письма 2 ноября, радуется единомыслию. Послал брошюру <u>Принцип эквивалентности</u> … [1916b] Конструктивные формулы Флоренского родственны структурным химическим формулам В. Г. Алексеева[4.2]. Его *делом с А. А. Марковым и* K^0 *интересуются профессора Петроградской Духовной академии А. А. Бронзов и Николай Никандрович Глубовский*. Просит Флоренского *проводить в богословской литературе* математические и нравственные религиозные идеи арифметики Магницкого, дать комментарии свои, Бугаева, Некрасова и других. Преподаватель гимназии Д. Д. Галанин уже опубликовал комментарии (1914), но он мало устремлён к единству веры, знания и опыта. Полагает, что <u>Богословский вестник</u> и подобные журналы должны также принять участие. *Обратите внимание на трёхсторонник (*<u>*Теория вероятностей*</u>*, стр. 119;* <u>*Вера, знание*</u> *…*, [1912], *стр. 117).*

Вашим попыткам преподавать в Духовной академии математическую энциклопедию […][4.3] *вполне сочувствую. Из Ваших рук она получится иная, нежели энциклопедия А. А. Маркова и* K^0*, внушённая из Берлина*[4.4]*; она внесёт в дело центральную* <u>*жемчужину*</u> *(веру), которую нулист А. А. Марков ценит ни во что …*

Софистическая (нигилистическая) метафизика А. А. Маркова и K^0 *имеет одну особенность: она боится говорить об* <u>*актуальной бесконечности*</u>[4.5]*, хотя честно и добросовестно отказаться от этого понятия невозможно (ни в математике, ни в астрономии, геологии, истории, политике и юриспруденции).*

Письмо № 5. 15 ноября 1916

Продаётся книга Я. Линцбаха в духе готтентотской морали Ницше. Полностью использована математика [в языкознании] *кроме моральной её части. Нет христианской совести. Московская школа выдвинула принципы языка христианской науки и даёт отпор языку в стиле К. Маркса, А. А. Маркова, Я. И. Линцбаха*[5.1]*. Сравнение книг Линцбаха, Маркова, Рабиновича и, с другой стороны, книг главных представителей московской философско-математической школы ясно говорит о распутье, на которое толкает нас немецко-еврейская культура и литература*[5.2].

Посылает брошюру Функциональные уравнения состязаний [1916а]. *Бертран в начале своей книги противопоставляет нарды закону и случаю*[5.3].

Письмо № 6. 26 ноября 1916

Не смутил ли Вас ориентировочный трёхсторонник при помощи плоских и сферических диаграмм, показывающий концентрацию и взаимоотношения работников Церкви, Государства и народной общественности и борьбу порядка и хаоса. Можно ли применять концентрацию в психологии и педагогике?

Письмо № 7. 7 дек. 1916

Своевременно было бы поднять вопрос об учреждении при университетах православных богословских факультетов. Реформа высшей и средней школы. Проекты Министерства находятся *под давлением антинационального и антиправославного созвездия членов Императорской Академии наук и Учёного комитета.*

А. Н. Крылов […] *избран в ординарные академики несмотря на своё научное безграмотство* (!). *Он безграмотно перевёл книгу Ис. Ньютона* Математические начала *… и снабдил этот тенденциозно выполненный перевод в духе панфизизма, т. е. в том же духе, в каком лжетолкованиями академика А. А. Маркова извращены принципы классического труда В. Я. Буняковского.* […]

Ньютоновский термин натуральная философия *академик А. Н. Крылов отождествляет с термином* физика. […] *Переводчик отлично знает, что в век Бэкона и Ньютона под натуральной философией разумелись не только физическое знание, но и естественная теология.*

Научно безграмотный А. Н. Крылов не замечает аналитических апорий (математических антиномий), содержащихся в книге. […] *Главнейшая аналитическая апория, не отмеченная невежественным комментатором, содержится в Лемме 1 Ньютона (стр. 53). Этот двойственный ньютонианский постулат, представляющий дурную метафизику*[7.1] *академика А. Н. Крылова, А. А. Марков и А. М. Ляпунов и проф. К. А. Поссе повелительно навязывают студентам, преподавателям, магистрантам и докторантам, запрещая критиковать апорию*, […] *которую я критиковал чв* *споре с А. А. Марковым и К^0 в статье* Принцип эквивалентности [1916b].

Механика и анализ А. Н. Крылова тем более несостоятельные, что силы притяжения и отталкивания тел […] *могут вести (и ведут иногда) к столкновениям, крушениям, катастрофам*[7.2].

Сличавшие текст подлинного произведения Ньютона с переводом […] *говорят ещё о множестве филологических неправильностях перевода, исказивших до неузнаваемости мысли великого учёного, верившего в Бога и его пророков. Поместите краткую рецензию перевода в* Богословском вестнике.[…]

[…] *куда ведёт нас Академия наук, подбирающая в первенствующее учёное сословие столь недвусмысленный, определённый состав панфизистов, марксистов и прочих ницшеанствующих сверхчеловеков? Впрочем, я не отрицаю заслуг этих людей в специальных областях математики, физики, механики, техники. Но светочами на жизненном пути учителей и служителей нашего отечества эти люди, с погасшими светильниками в душе, быть не могут*.

Письмо № 8. 13 дек. 1916

М. О. Меньшиков (Новое время, 11 дек.) теперь *вплотную соединился с нашими антиподами, с А. А. Марковым и К^0.* […] Панфизизму А. А. Маркова и К^0 мы ещё в 1902 – 1904 году противопоставили математический *панлогизм* и философию общего дела и цельного знания[8.1]. *Верхом бессовестности я считаю повторение М. О. Меньшиковым* […] *основной неправды (навета) А. А. Маркова, что я будто бы* смешиваю *(а не примиряю* логично, правильно и правомерно […]) *математику с религией и философией.*

Примечания

Первая цифра обозначает номер письма

1.1. Об А. А. Борзове см. Письмо № 4.

3.1. У Менделеева не было даже теории ошибок.

3.2. И. В. Киреевский (1806 – 1856), философ, Вместе с Хомяковым основал славянофильство. А. С. Хомяков (1804 – 1860), религиозный философ, поэт, математик. Вместе с Киреевским основал славянофильство.

3.3. Об аксиомах (во множественном числе) непрерывности см. БСЭ, 3е изд., т. 17, 1974, с. 447.

4.1. Эту брошюру (1916 г.) Флоренский написал в 1906 г.

4.2. В 1901 г. В. Г. Алексеев опубликовал несколько подходящих статей.

4.3. Математическими энциклопедиями назывались руководства по введению в анализ и дифференциальному исчислению (Юшкевич 2006, с. 21).

4.4. Некрасов написал это во время войны с Германией, что было особенно неприемлемо, а упоминание Линцбаха и Рабиновича в Письме № 5 свидетельствует лишь о его антисемитизме.

4.5. Различие между актуальной и потенциальной бесконечно малыми не сказалось на научных достижениях Маркова.

5.1. Линцбах (1916) не обсуждал ни марксизм, ни религию.

5.2. И это Некрасов написал во время войны с Германией, однако в 1887 – 1896 гг. он сам опубликовал четыре статьи в *Math. Annalen*, а в 1910 г., в автографе, посланном Дармштедтеру (Шейнин 2003, с. 338), указал, что в своих трудах *неизменно восхищался трудолюбивым немецким гением*.

5.3. В известном руководстве Бертрана 1888 г. нарды не упоминались.

7.1. *Ньютонианский постулат*, представляющий дурную *метафизику*: это и непонятно, и противоречит всему контексту.

7.2. Со ссылкой на указанную книгу Некрасова, хоть и не на это Письмо, мы (Чириков и Шейнин 1994, с. 128) назвали Некрасова *неким математическим Нострадамусом*.

8.1. Некрасов вполне мог воспринять идеи религиозного философа В. С. Соловьёва (Радлов 1900, с. 786): *В основе истинного знания лежит мистическое или религиозное восприятие*, а *система истинного знания* есть *всесторонний синтез теологии, рациональной философии и положительной науки*. Вряд ли эти составляющие воспринимались равноправными; Некрасов *логично, правильно и правомерно* **подчинил** теорию вероятностей религии и мелкой философии. Андреев (1999) отыскивал рациональность у Некрасова и объяснял причину его словоизвержений. Его попытка заслуживает внимания.

Библиография

Сокращение: ИМИ = *Историко-математич. исследования*

Андреев А. В. (1999), Теоретические основы доверия (штрихи к портрету П. А. Некрасова). ИМИ, вып. 4 (39), с. 98 – 113.

Галанин Д. Д. (1914), *Магницкий и его Арифметика*. М., 2й выпуск.

Демидов С. С., Паршин А. Н., Половинкин С. М. (1989), О переписке Н. Н. Лузина и П. А. Флоренского. ИМИ, вып. 31, с. 116 – 191.

Линцбах Я. (1916), *Принципы философского языка*. Пг.

Некрасов П. А. (1902 – 1904), Новые основания учения о вероятностях сумм и средних величин. *Математич. Сборник*, т. 21, с. 579 – 763; т. 22, с. 1 – 142, 323 – 498; т. 23, с. 41 – 455.

--- (1912), *Вера, знание и опыт.* СПБ.

--- (1916a), *Исследование функционального уравнения состязаний в шахматных и нардных играх.* М.

--- (1916b), *Принцип эквивалентности величин в теории пределов и последовательном приближённом исчислении*. Пг.

--- (1916c), *Средняя школа, математика и научная подготовка учителей.* Пг.

Петрова С. С., Сучилин А. В. (1993), О понятии l'imaginaire у П. А. Флоренского. ИМИ, вып. 34, с. 153 – 163.

Радлов Э. Л. (1900), В. С. Соловьёв. Религиозные и философские взгляды. *Энц. словарь Брокгауз и Ефрон*, полутом 60, с. 785 – 792.

Флоренский П. А. (1914), *Столп и утверждение истины*. М., 1990.

--- (1999), Учение Милля об индуктивном происхождении геометрических понятий. ИМИ, вып. 3 (38), с. 32 – 73.

Форд Ч. (1999), О влиянии П. А. Флоренского на Н. Н. Лузина. ИМИ, вып. 2 (37), с. 33 – 43.

Чириков М. В., Шейнин О. Б. (1994), Переписка П. А. Некрасова и К. А. Андреева. ИМИ, вып. 35, с. 124 – 147.

Шейнин О. Б. (2003), Nekrasov's work on the central limit theorem. The background. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 57, pp. 337 – 353.

Юшкевич А. П. (2006), Годы учения. ИМИ, вып. 11 (46), с. 9 – 48.

XVI

Андерсон

Письмо К. Пирсону

University College London, Pearson Papers No. 627/2.
Опубликовано только на языке оригинала (немецком):
Шейнин (2005, с. 275 – 277)

Высшая коммерческая школа, Варна, Болгария. 10 дек. 1925

Уважаемый г-н профессор, Только что я получил Ваше письмо от 4 дек. и спешу ответить. Как мне известно, проф. Виноградов (Оксфорд), председатель Союза русских учёных за рубежом, сумел получить заверения от нескольких академий наук (Осло, Рим, Лондон, …), что они готовы по его рекомендации принимать для публикации также и статьи русских авторов. При составлении своего последнего письма Вам я имел в виду именно эту возможность. Однако, поскольку проф. Виноградов быть может предпочтёт коллег своего собственного направления (и никто не сможет его винить за это), т. е. историков и юристов, и, более того, поскольку я опасаюсь, что публикация моих работ может быть существенно замедлена ввиду наплыва других *конкурентов*, я был бы, естественно, очень рад, если Вы действительно захотите принять мою рукопись для *Биометрики*. Этот журнал пользуется международной репутацией, и кроме того его читатели должны быть хорошо знакомы с принципами методов *последовательных конечных разностей*, что позволило бы мне кратко изложить свой материал.

Я ещё не знаю, удастся ли мне сжать свою работу до 15 – 20 страниц, которые Вы мне предлагаете, но я попытаюсь. В любом случае я разобью статью на краткие, по возможности самостоятельные параграфы и оставлю на Ваше усмотрение исключение какого-либо из них. Те, которые Вы отбросите, я постараюсь опубликовать в Норвегии или Италии. Ввиду нехватки места я рассмотрю как можно кратко Вашу публикацию Pearson & Elderton (1915) и ограничусь несколькими краткими замечаниями. Надеюсь, г-н профессор, что Вы возможно сочтёте желательным сообщить о своей нынешней точке зрения в качестве либо предварительного, либо заключительного замечания к моей статье.

Если Вы согласны со мной, то возможности Вашей лаборатории будут в Вашем распоряжении для вычисления поправок. Равным образом я не буду вычислять никаких поправок к методам *выравнивания* Rhodes (1921) или иным. Надеюсь, однако, что сумею послать Вам свою заново отредактированную рукопись до начала февраля, после чего буду с нетерпением ожидать Вашего окончательного решения. В конце концов, у меня всё ещё остаётся возможность, что Вы согласитесь опубликовать текст моего письма от 27 ноября в майском выпуске *Биометрики*.

Наконец, позвольте задать ещё один вопрос, который Вы быть может сочтёте совсем преждевременным, но который для меня уже сейчас представляет некоторый интерес. Это – вопрос о языке. Практически каждый русский или немецкий учёный читает по-английски, но сравнительно мало англосаксов и французов понимает или пытается понять немецкий. Поэтому для меня было бы очень важно, чтобы моя будущая статья (если Вы действительно примете её) появилась на английском языке. Если я сам переведу её, это займёт у меня сравнительно очень много времени, и, что главное, я не буду уверен, что где-либо не проскочит какой-либо нелепый русизм. На с. 4 каждого выпуска *Биометрики* сказано, что *русские авторы могут писать по-русски или по-немецки, но до публикации их рукописи будут переведены на английский*. Так что мне нужно сделать, чтобы устроить такой перевод? В деньгах ли дело?

Библиография

О. Андерсон

1914, Nochmals über “The elimination of spurious correlation due to position in time or space”. *Biometrika*, vol. 10, pp. 269 – 279. Reprinted in author’s book (1963, Bd. 1, pp. 1 – 11).

1923, Über ein neues Verfahren bei Anwendung der “Variate Difference” Methode. *Biometrika*, vol. 15, pp. 134 – 149, 423. Reprinted in author’s book (1963, Bd. 1, pp. 12 – 27).

1925, О методе последовательных разностей. В *Сборнике статей, посвящённых П. Б. Струве*. Прага, с. 9 – 27.

1926 – 1927, Über die Anwendung der Differenzmethode […] bei Reihenausgleichungen etc. *Biometrika*, vol. 18, pp. 293 – 320; vol. 19, p. 53 – 86. Reprinted in author’s book (1963, Bd. 1, pp. 39 – 100).

1963, *Ausgewählte Schriften*, Bde 1 – 2. Tübingen. Hrsg. H. Strecker.

Другие авторы

Pearson K., Elderton E. M. (1915), Further evidence of natural selection in man. *Biometrika*, vol. 10, pp. 488 – 506.

Rhodes E. C. (1921), Smoothing. *Tracts for Computers*, No. 6, pp. 1 – 60.

Sheynin O., Compiler (2005), *Probability and Statistics. Russian Papers of the Soviet Period*. Berlin. Also at www.sheynin.de

XVII

О. Б. Шейнин

Мнение Е. Е. Слуцкого 1928 г. об одном выводе закона распределения Максвелла

Не опубликовано

1. Введение. Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880 – 1948), математик, статистик и экономист, был одним из создателей теории случайных функций; известен он и работами по математической статистике с приложениями к геофизике и экономике и табулированием функций нескольких переменных. Из обширной литературы о нём мы назовём лишь статью Колмогорова (1948).

В Архиве МГУ (ф. 276, оп. 1, № 114) хранится его письмо 1928 г. физико-химику Александру Николаевичу Щукареву (1864 – 1936), публикация которого составляет цель нашей заметки. Слуцкий сообщил своё мнение о неназванной работе Щукарева, найти которую, впрочем, оказалось достаточно легко. Мы описываем её в § 2, но уже здесь укажем, что написана она была настолько небрежно, что публиковать её просто нельзя было. Он не пояснял смысла некоторых введенных им обозначений, применял одну и ту же букву для указания различных величин и т. д. и детали его рассуждения неясны.

Слуцкий отметил только одну небрежность подобного рода; возможно, впрочем, что Щукарев просил его не обращать внимания на эту сторону дела. Письмо Слуцкого почти не требует пояснений. Заметим, что иногда он пишет *теория вероятности* и что вывод Щукарева всё-таки требует существования какого-то распределения скоростей молекул v_1, v_2, … с соответствующими устойчивыми *весами*, чего Слуцкий не отметил. Вообще же его письмо лишний раз свидетельствует о широте его взглядов и деликатности. Именно это обстоятельство оправдывает нашу публикацию.

2. Заметка Щукарева (1928). Подчёркивая хорошо известную уже в то время нестрогость вывода закона Максвелла, см. появившиеся позже статьи Кас (1939) и Линника (1952), автор отмечает, что существование распределения Максвелла подтверждено экспериментально и что поэтому он пытается обосновать его теоретически, притом по существу без привлечения вероятностных представлений. Пусть, рассуждает автор, n молекул газа при температуре T и давлении P занимают объём V. Поскольку равновесное состояние газа можно понимать как равновесие химических полимеров, для *концентраций* имеют место равенства типа

$$C_1/C_2 = K. \quad (1)$$

Концентрацией C_i автор называет количество молекул, имеющих данную скорость v_i и находящихся в единице объёма. Зависимость равенств (1) от температуры имеет вид

$$\frac{d\ln K}{dT} = \frac{Q}{RT^2} = \frac{E_1 - E_2}{RT^2} \qquad (2)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\ln C_1}{dT} - \frac{d\ln C_2}{dT} = \frac{E_1}{RT^2} - \frac{E_2}{RT^2}.$$

Можно поэтому положить, что для текущего индекса n

$$\frac{d\ln C_n}{dT} = \frac{E_n}{RT^2}. \qquad (3)$$

Щукарев замечает, что подобные уравнения могут включать универсальную постоянную K, не зависящую от C, T и E, но *предварительно* принимает, что $K = 0$. Интегрируя (3), он получает

$$\ln C_n \equiv \ln\frac{n}{V} = -\frac{E_n}{RT} + \mathrm{Const},\ \ \frac{n}{V} = Ae^{-E/RT}.$$

Здесь n обозначает уже не только текущий индекс, но и количество молекул, обладающих скоростью v_n, а в последнем равенстве E лишено индекса! Полагая

$$\frac{E}{N} = e_n = \frac{mv^2}{2},\ \ \frac{R}{N} = k,$$

где N, однако, означает количество молекул, имеющих скорости либо v_1, либо v_2, и далее, полагая при постоянном давлении $m/3P = K$ (снова K!) и при постоянной температуре

$mv^2/2kT = k$ (?),

автор окончательно получает

$$\frac{n}{N} = Kv^2e^{-kv^2},$$

где n/N – *так называемая вероятность* молекуле иметь скорость v, а постоянная A без всяких пояснений исчезла. Известно, что последнее уравнение действительно соответствует распределению Максвелла.

3. Текст письма Е. Е. Слуцкого. Глубокоуважаемый Александр Николаевич! Очень Вам благодарен за присланную статью и чрезвычайно интересное письмо. Разрешите сделать несколько замечаний.

Ур-ие (3), как Вы сами указали, должно содержать еще константу. Вы предположили *предварительно*, что она = 0, но это *vorläufig* в пределах Вашей заметки осталось окончательно. Во-вторых, едва ли можно считать Ваш вывод не зависимым от теории вероятностей. Прежде всего, ур-ие (2), если не ошибаюсь, связано с II законом термодинамики, а следовательно имеет теоретико-вероятностную подоплёку; затем, и ур-ие (1) Вы написали в форме ур-ия не совсем законно, ибо это – равенство только приближённое; на самом деле линейно связаны могут быть только математические ожидания степеней концентрации: мат. ожид. $C_1 = K$ мат. ожид. C_2.

В самом деле, на чём основывается равенство (1)? На том, что состояние подвижного равновесия характеризуется *приближённым равенством* числа элементов 1-го и 2-го сорта, переходящих из 1-го во 2-й и из 2-го в 1-й. Точнее же опять дело идёт о равенстве математических ожиданий. Чтобы поставить Ваш вывод в принципиальную связь с основами физики и теории вероятности (!), каковая [нрзб] сейчас не совсем ясной, и чтобы сравнить Ваш вывод с максвелловым, нужно проработать стохастическую сторону до конца, т. е. дойти до эксплицирования предположений, лежащих в основе вывода. В конце концов Вы придёте к выяснению того, *какие события* в атомном мире предполагаются в Вашем выводе как *равновозможные*. Может быть Вы получите опять ни что иное, как максвелловы предпосылки, хотя я, конечно, не ручаюсь.

Извините за эти замечания: я мало смыслю в физике, но мне кажется, я несколько улавливаю логическую структуру этого сорта теорий. …

Глубоко уважающий Вас Евгений Слуцкий

P. S. Сейчас только заметил, что молекула каждого *сорта* может переходить в любой другой сорт, так что если Δn_i будет число молекул, *выходящих* из сорта i, а $\Delta_k n_i$ – число молекул, выходящих из сорта i и превращающихся в сорт k (за время τ), то

$$\text{м. о. } (\Delta n_i - \sum_j \Delta_i n_j) = 0.$$

Однако, этого мало для устойчивости, т. к. и при равенстве мат. ожиданий фактического равенства величин не бывает. Нужно показать, что соотв. отклонения компенсируют друг друга в смысле закона больших чисел, а это требует особых приёмов доказательства, свойственных теории вероятности (!). Впрочем, тут так много всяких соображений, что всего не напишешь.

Ещё раз, всего лучшего. Ваш Е. С.

Библиография

Колмогоров А. Н. (1948), Евгений Евгеньевич Слуцкий. *Успехи математич. наук*, т. 3, № 4 (26), с. 143 – 151.

Линник Ю. В. (1952), Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла. *Докл. АН СССР*, т. 85, с. 1251 – 1254.

Kac M. (1939), On a characterization of the normal distribution. In author's book *Probability, Number Theory and Statistical Physics*. Cambridge, Mass., 1979, pp. 77 – 79.
Schükarev A. N. (1928), Ein Versuch der Ableitung des Maxwellischen Verteilungsgesetzes. *Phys. Z.*, Bd. 29, No. 6, pp. 181 – 192.

XVIII

Андерс Моландер

Сведения о Я. Мордухе

Письмо О. Шейнину 21 янв. 2000 г. Архив Упсальского университета

Dear Mr. Sheynin, I have received Your inquiry concerning Mr. Morduch. From what our student records show, Mr. Jacob Morduch, born on August 4th, or possibly July 4th, was matriculated at Uppsala University on January 20th 1919.

Jacob Moruch graduated from Uppsala University with a Bachelor of Arts degree on September 14th 1921. His subjects were Slavonic languages, Mathematics and Statistics. Enclosed with this letter You will find a copy of Mr. Morduch's student records where all the abovementioned information is given.

Good luck with Your research. Yours sincerely

Anders Molander, Uppsala University Archives

Уважаемый г-н Шейнин, я получил Ваш запрос о г-не Мордухе. Записи о наших студентах показывают, что Якоб Мордух родился 4 августа или быть может 4 июля и был принят в Упсальский университет 20 янв. 1919 г. Он окончил Упсальский университет со степенью бакалавра искусств 14 сент. 1921 г. Он изучал славянские языки, математику и статистику. В качестве приложения Вы найдёте копию записей о нём, в которой всё это указано.

Примечание

В указанных записях приведена дата рождения Мордуха: 4 июля 1895 г. Мы обнаружили дополнительные сведения об этом, почти неизвестном ученике Чупрова, обладавшим недюжинными математическими способностями (Шейнин 1990/2010, с. 98 – 99). В частности, можем добавить, что его звали Якоб Давидович и что он умер в 1950 г. в Англии.

Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка.* М., 2010.