О. Б. Шейнин

Статьи по истории теории вероятностей и статистике

Часть. 2-я

Берлин, 2008
Авторский перевод с английского

Текст книги размещен также в Интернете www.sheynin.de
ISBN 3- 938417-72-2

Содержание

От автора

Мы приводим переводы некоторых наших английских статей, опубликованных с 1974 г. и по сей день. Переводы некоторых других статей находятся в первой части сборника (2007). Наши статьи, появившиеся в весьма различных изданиях, вряд ли более или менее известны российским (а часто и западным) читателям. Мы изменили первоначальные тексты и иногда настолько, что теперь их нельзя назвать переводами. В частности, мы постарались учесть новые сведения и выправлять недостатки.

В Приложении мы приводим рефераты нескольких других наших статей и надеемся, что и они окажутся полезными. Перекрестные ссылки на статьи указаны римскими цифрами в соответствии с Содержанием книги.

К предыстории теории вероятностей

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 12, 1974, pp. 97 – 141

1. Введение

“Никакая традиционная наука очевидно не занимается случайностями” (**Аристотель** *Метаф.* 1064b15). Ими “не занимается ни одна признанная наука, только софистика” (*Метаф.* 1026b, 1027a; *Эвдемова этика* 1247b)[1]. Уточним, однако: теория вероятностей также не занимается ими, но изучает их законы[2], формализация же случайности – серьезнейшая задача, выходящая за рамки этой дисциплины.

Сам Аристотель (п. 3.2) описывал риторику как искусство убеждения, основанную на (субъективных) вероятностях, да и вообще еще до возникновения теории вероятностей в науку проникло много высказываний о вероятном (пп. 3 – 8). Соответственно, наш п. 2 в основном посвящен Аристотелю и его известному комментатору **Фоме Аквинскому**, а после указанных пп. 3 – 8 в п. 9 приведена сводка соответствующих мнений ученых нового времени (особо – **Якоба Бернулли**). Предысторию теории ошибок мы исследовали отдельно (1973b).

2. Случайность и вероятность в древней философии

2.1. Период до Аристотеля известен в основном по его собственным сочинениям. Так (*Физ.* 196a10),

> *Среди признаваемых ими причин прежние физики явно не нашли места случаю.* […] *Это странно; либо они полагали, что ничего подобного не существует, либо они* […] *забыли упомянуть его, хотя иногда они, как* ***Эмпедокл****, прибегали к случайности. Он говорит нам*, […] *что большинство частей животных произошло случайно.*
>
> *Некоторые приписывают эту небесную сферу и все миры самопроизвольности.* […] *Подобное утверждение вполне может поразить, ибо они заявляют, что животные и растения, природа и разум существуют и были порождены не случайно*, […] *и однако* […] *они доказывают, что небесная сфера и превосходнейшие вещи произошли случайно* […]

Он продолжал (196b5): “Другие полагают, что случай является причиной, […] но непостижим рассудку […].” Но некоторые (195b35) “утверждают, что ничего не происходит случайно”.

Редактор сочинений Аристотеля поясняет, что все неназванные лица – это **Демокрит**, который, видимо, действительно относился к случайности двойственно. Это косвенно подтверждается сравнением мнений различных древних комментаторов, включая **Платона**: одни полагали, что, по Демокриту, люди сотворили себе кумир из случая, чтобы скрыть недостаток своего здравого смысла, другие же приписали ему объяснение всего случаем (Bailey 1928, с. 121 и 139; Баммель 1935, с. 57, 61, 129).

2.2. Аристотель был первым, кто попытался объяснить случай, включив его в свое общее учение о причинах (*Вторая анал.*, 94a; Физ. 194b; *Метафиз.* 983a, 1013a, 1044a). Он неоднократно упоминал случай, случайность и совпадения. Случайностью он (например, *Топика* 102b6, см. также *Вторая анал.* 73b и *Топика* 120b) назвал “нечто, возможно принадлежащее или не принадлежащее любой одной и той же вещи”, и он же ввел этот термин в классическую философию.

Далее, случай (и изменение) “характерны для бренных вещей на Земле” (*Части животных* 641b15); некоторые действия могут быть вызваны между прочим, т. е. самопроизвольно, случаем (198a5); случай противоположен рассудку и доводам (*Магна моралиа*

1207a5) и его причину “нельзя установить” (*Риторика* 1369a31; см. также *Эвдемова этика* 1247b). “Результаты случая и судьбы противоположны тому, что есть или будет всегда или обычно” (*О небе* 283b1; см. также *Физ.* 196b и *Риторика* 1369a).

Аналогичные утверждения Аристотель оставил по поводу случайности (*Метафиз.* 1025a, 1065a), случайных соединений (*Вторая анал.* 87b) и совпадений (*Парва натуралиа* 463b).

Аристотель (*Физ.* 197b0 и 197b14, см. также 197a5) также различал случай и самопроизвольность:

> *Случай и его результаты подходящи для тел, для которых, вообще говоря, возможна удачная судьба и которые способны к моральным действиям. Поэтому случай по необходимости существует в области моральных действий.*
>
> *Самопроизвольное, с другой стороны, можно найти и у низших животных* [просто: у животных] *и у многих неодушевленных предметов.*

Возможно наилучшее описание понятия случая у Аристотеля содержится в довольно редком издании (Junkersfeld 1945, с. 22): случай это то, что происходит

> *Время от времени; представляется целью; таков, что мог бы быть целью естественной или рациональной потребности; на самом же деле не был объектом никакого влечения и произошел случайно.*

Как следует из сказанного неявно выше, подобный порочный круг действительно усматривается в сочинениях Аристотеля. Юнкерсфельд (с. 78) упоминает и существенное отличие в понимания случая Аристотелем и современностью: мы сейчас не связываем его с целью (точнее, с недостижением цели). Впрочем, она ссылается только на **Курно** и, видимо, переоценивает его роль в образовании понятия случая.

Приведем теперь три примера (из 12, собранных Юнкерсфельд) случайных событий у Аристотеля (*Метафиз.* 1025a; *Физ.* 196b30; и *Физ.* 199b1 и *О возникновении животных* 767b5):

1. Роя яму для растения, некто отыскивает клад (но не ржавый гвоздь, который вряд ли мог быть “целью естественной или рациональной потребности”). Аристотель называет это случайностью в первом смысле. Заметим, что разделение неожиданных событий на примечательные и обычные здесь значительно легче, чем в современной науке.

2. Встреча двух знакомых, не имевших такой цели.

3. Ошибки в “действиях природы”, приводящие к “уродствам”. Ее первое отклонение от “типа” происходит при рождении самки вместо самца, “потому что самец иногда не возобладает над самкой […] либо ввиду незрелости или старости, либо по другой подобной причине”.

Таким образом, Аристотель приписывает рождение самки случаю, хотя и добавляет, что это – “естественная необходимость”.

И он быть может первым (не очень удачно) подошел к противопоставлению случайности и необходимости.

Встречу знакомых можно представить как случайное пересечение цепей детерминированных событий, которое не произойдет даже при малом изменении в них. Это истолкование, правда, упускает аристотелево соединение случая с невыполнением (или отсутствием) цели, в остальном же подводит к пояснению **Пуанкаре** (1912, с. 4 – 5/1999, с. 11 – 13): случайное событие происходит тогда, когда при неустойчивом равновесии малые причины приводят к существенным последствиям. Примерно так же можно истолковать и оба других примера Аристотеля.

Сочинения Аристотеля содержат и рассуждения о вероятном. Вероятное, как он (*Перв. анал.* 70а0) указал, это

> *всеобще одобренное предложение про то, что известно, что оно происходит или нет большей частью так-то и так-то, например завистливые ненавидят.*

Формулируя верное вероятностное рассуждение, Аристотель (*Риторика* 1402а5, см. также *Поэтика* 1461b) замечает, что “что невероятно, всё же происходит […], поэтому вероятно, что невероятные вещи будут происходить”. В то же время он понимает, что весьма редкие события практически невозможны (п. 5).

Риторику он описывает как искусство убеждать, основанное на вероятностях (п. 3.2), а при обсуждении убеждения в поэзии, предвосхищая **Аркесилая** и **Карнеада**, он (*Поэтика* 1460а25) даже вводит элементарную шкалу субъективных вероятностей: “правдоподобная невозможность всегда предпочтительнее неубедительной возможности”.

Аристотель несколько раз упоминает удачу (*Метафиз.* 1065а, *Риторика* 1361b) и судьбу (*Магна моралиа* 1206b, 1270а). Они, по его мнению, (качественно) выражают уклонения от разумного ожидания, – от иного качественного понятия. И если даже считать ожидание численной мерой в смысле теории вероятностей, удача и судьба у Аристотеля всё же будут отличаться от тех же понятий у **Якоба Бернулли**. В одном месте он (*Риторика* 1361b – 1362а), правда, посчитал, что удача в равной мере означала и нечто, превышающее ожидание, и избавление от ожидаемого зла. Но он (*Магна моралиа* 1207а30) также указал, что

> *удача видимо состоит в большей степени и более подходяще в получении какого-то блага,* […] *тогда как избежание бедствия – это удача в косвенном смысле.*

Фактически Аристотель уточнил свое собственное мнение о невозможности науки о случайном (п. 1), когда (*Эвдемова этика* 1247а) приписал стратегию и навигацию “к вещам, которые включают мастерство, но в большой степени зависят от случая”. Он, правда, тут же заявил, что в навигации “не умнейшие наиболее удачливы, а здесь всё, как при броске костей”.

Означает ли это, что не существует, например, науки навигации? Вот более разумное мнение **Платона** (Cioffari 1935, с. 30):

Хоть случай составляет почти всё в искусстве […] *кормчего и врача* [см. п. 6], *и генерала*[3], […] *но при шторме помощь искусства кормчего несомненно была бы большим преимуществом.*

Самбурский (1956, с. 37), который заметил, что Платон (2004, 92b) и Аристотель (*Метафиз.* 1010a4) четко отличали вероятное от истинного и процитировал **Симпликия** (Физ. 18.29, эту ссылку автор привел лишь в перепечатке своей статьи), утверждавшего, что оба указанные ученые называли естествознание "наукой о вероятном" (*эйкотологией*).

Во всяком случае, Аристотель фактически признавал вероятность в биологии и медицине (п. 6.2.2) и полагал *среднее* моральной категорией. Так (*Этика Никомаха* 1104a24, также 1107b –1108a, 1133b и *Магна моралиа* и *Эвдемова этика*), "умеренность и мужество […] уничтожаются излишествами и недостатком и сохраняются средним [состоянием]"[4].

В медицине (п. 6.2) среднее считалось идеальным состоянием здоровья, а в теории ошибок (Шейнин 1973b) и азартных играх (п. 5) среднее арифметическое заняло особые положения.

2.3. Эпикур и Лукреций. Эпикур (Bailey 1926, с. 25) считал, что атомы "вновь и вновь отскакивают, как только случайно сдерживаются сплетением с другими …" Такова была его попытка вероятностного объяснения физического явления. По иному поводу Эпикур (Smith 1956, с. 140) сказал, что

Возможно, что ввиду различий областей, пересекаемых [звездами], *в некоторых местах имеются равномерные воздушные пространства, которые заставляют их двигаться вперед,*[…] *в других же эти пространства настолько необычны, что вызывают наблюдаемые движения, – блуждания некоторых звезд* […] *и закономерные движения некоторых других звезд.*

Это быть может означает, что Эпикур задумывался о закономерности случайного; см. также п. 8.1.1.

Отклонения в движении атомов, ни моменты, ни направления которых не могли быть известны заранее, существенны для физики Лукреция (1952, кн. 2, с. 216 – 224, 251 – 262, 292 – 293) и даже понадобились ему для наивного разъяснения *свободной воли*. Они также служили качественным случайным механизмом, приводящим к детерминированным результатам. Снова, как у **Аристотеля** (п. 2.2) и, возможно, Эпикура (см. выше), это – сочетание случайности и необходимости.

Некоторые современные авторы полагают, что древние сторонники атомных взглядов не рассматривали случайных событий. Так, описывая философию до Аристотеля, **Рассел** (1962, с. 83) замечает:

> *Существует важная причина полагать, что вес не являлся исходным свойством атомов Лукреция и* ***Демокрита****. Более вероятно, что по их мнению атомы первоначально двигались случайным образом.* […] *Ввиду столкновений, средоточия атомов начали образовывать вихри.*
>
> *В древности было обычным упрекать сторонников атомных взглядов за приписывание всего случаю. Они, однако, были строгими детерминистами. Демокрит прямо отрицал, что что-либо может происходить случайно.* […] ***Левкипп*** […]*, как известно, сказал … <u>Ничто не происходит из-за ничего, а всё – по причине и необходимости</u>. Он, правда, никак не объяснил, почему мир должен был быть вначале таким, каким он был; это, возможно, было допустимо приписать случаю.* […] *Причинность должна начинаться с чего-то, и, где бы она ни началась, никакой причины не может быть установлено для исходных данных* […]*. Сам Создатель не может быть объяснен.*

И всё же в трудах древних ученых можно заметить и случайность, и причинные связи, и представляется, что почти каждый философ, по меньшей мере до **Канта** включительно, находил у них либо первое, либо второе. Вот сам Кант (1755/1910, 8. Hauptstück, с. 334): "Не случайные столкновения атомов Лукреция создали мир". Как и Аристотель (начало п. 1), **Цицерон** (1991, кн. 1, с. 149 и кн. 2, с. 151) полагал случай неприемлемым: "Ничто так не противоположно оценке и закономерности, как случай"; "О случайных вещах нет никакого предчувствия".

2.4. Фома Аквинский (Wallace 1970) был одним из главных комментаторов **Аристотеля**. Его общей целью было объединение веры и разума и приспособление язычника-Аристотеля христианству, и он не мог обойти понятие случая. Его замечания о *Физике* Аристотеля видимо указывают, что он разделял объяснения Философа (Byrne 1968). Основной труд Фомы (Thomas Aquinas 1952)[5] также содержит пояснение случая:

> *Действия, порожденные волей Бога*, [иногда] *непредвиденны,* […] *потому что Он подготовил для них случайные причины* (1952, т. 19, с. 116).
>
> *Непреднамеренные и случайные события* [это те, которые] *происходят по своим причинам в меньшем числе случаев и совсем не известны* [заранее] (там же, с. 297).

Фома (1952, т. 19, с. 592) фактически сочетал случайность с возмущениями:

> *Некоторые причины так связаны со своими последствиями, что порождают их не необходимо, а только в большинстве случаев, а в меньшинстве случаев не порождают их,* […] *что должно быть приписано препятствующим причинам.*

Примером действия такой причины он (там же, с. 489) назвал рождение женщины, объясняя это ссылкой на Аристотеля (п. 2.2) и повторяя его сочетание случайности и необходимости:

С другой стороны, по отношению к природе вообще, женщина не является непродуманным созданием; она включена в цель природы как предопределенная к труду по воспроизводству потомства.

Трудно понять, как Аристотель, и тем более Фома, пояснял случаем (который происходит время от времени – Юнкерсфельд) рождение женщины. Ведь не могло не быть известным, что в *обычных* поселениях численности обоих полов не различались слишком сильно.

Там же Фома (с. 463) привел другое рассуждение о случайности и необходимости:

Будучи способна быть или не быть, случайность происходит от материи, потому что способность – это свойство материи. Но необходимость вызывается формой, ибо, что бы ни следовало ввиду нее, необходимо находится в содержании. Но материя – это принцип индивидуализации, тогда как всеобщность происходит по причине отвлечения формы от определенной материи. […] *Случайное* […] *известно непосредственно по ощущениям, а косвенно – по разуму, тогда как всеобщие и необходимые принципы случайных вещей известны по разуму. Поэтому, если рассматривать цели науки в их универсальных принципах, то вся она состоит из необходимых вещей, если же изучать вещи сами по себе, то некоторые науки окажутся о необходимом, другие – о случайном* [6].

Вряд ли это звучит сейчас убедительно, но во всяком случае Фома фактически расширил понятие случайности, поставив ее в соответствие с индивидуализацией и диалектически сравнивал частное и универсальное. Он, однако, не развил своей мысли о раздвоении наук (противоречащей Аристотелю).

Фома (1952, т. 19, с. 653) раздвоил и понятие случайности:

Полностью случайное пренебрегается каждым искусством [art, мастерством, наукой?] *ввиду его недостоверности и бесконечности* [бесконечном разнообразии]. *Но случайность подобного рода – это не то, что мы называем обстоятельствами.* […] *Последние находятся в своего рода соприкосновении* [с действием]. *Случайности в собственном смысле* […] *рассматриваются искусством.*

Это неясно, и можно только сказать, что классическая теория вероятностей также не имела дела с полностью случайным (хаотичным).

Byrne (1968) рассмотрел все труды Фомы с вероятностной точки зрения. Для средневековья, как он (с. xxiii) замечает (впрочем, и для Аристотеля, см. п. 2.2),

> *Именно мнение являлось вероятным или нет, или более или менее вероятным. И понятие о мнении относилось не только к объективному предложению, но и к субъективному обязательству по отношению к нему.*

Важно, что вероятность была лишь субъективной или логической. Вероятные мнения и предположения, продолжает Byrne (с. 210), являются для Фомы основанием судопроизводства (см. также п. 3.2), а кроме того Фома *ссылается на своего рода моральный закон больших чисел*, [так что по его мнению] *более вероятно, что группа людей, а не отдельный человек совершит то, к чему ее (его) склоняет небесное тело*.

Мы оставляем на совести автора его моральный закон и предположим, что объяснение следует искать в психологии коллектива. Наконец, Byrne (с. 202 – 208) утверждает, что Фома придерживался зачаточной частотной теории вероятностей, но его доводы неубедительны, и что (с. 296) “существует сходство между теорией вероятностей Фомы и современной логической теорией вероятностей, равно как между его теорией случайного и современной частотной теорией”.

Труды Фомы должны были оказать серьезное влияние на последующих ученых, хотя, видимо, в основном в области религии и юриспруденции, тогда как зарождение теории вероятностей было частично обусловлено иными чисто практическими потребностями. И сам Byrne подчеркивает не прямое влияние Фомы, а скорее возможно неосознанную преемственность идей. Его исследование относится ко вряд ли достаточно изученной проблеме соотношения средневековой и современной науки.

3. Юриспруденция

Этот параграф следовало бы озаглавить *Случайность и вероятность в юриспруденции*, однако и здесь, и в пп. 4 – 8 мы остановились на сокращенных названиях.

3.1. Тяжелые испытания. Бируни (1963, с. 472 – 473) сообщил о судопроизводстве в Индии XI в.: “Если истец не в состоянии представить неопровержимое доказательство, ответчик должен принести клятву”.

Различные виды клятвы должны были соответствовать ожиданиям выгоды от неправедного решения суда: чем дороже был объект притязаний, тем ниже, видимо, была вероятность безнаказанности лжесвидетельства. Впрочем, вряд ли здесь существовали какие-либо количественные оценки, тем более, что все верили в божественную защиту справедливости:

> *Более сильная клятва состоит в том, что обвиняемому предлагают выпить аконит* […] *и если он говорит правду, питье не вредит ему.*

Бируни упоминает и испытание калёным железом:

> *Нагревают кусок железа до того, что он почти плавится, и кладут его щипцами на ладонь ответчика; между кожей и железом кладут только широкий лист одного растения, под который подкладывают несколько отдельных зерен риса в шелухе. Ему приказывают пронести это железо семь шагов, после чего он может бросить его на землю.*

Степени испытаний не были связаны ни с правдоподобностью доводов сторон, ни с соответствующими физическими страданиями: Бируни сообщает, что одним из тяжелейших испытаний была [безнадежная] попытка почти моментально изменить свой вес.

Тяжелые испытания были распространены повсеместно (Pollock & Maitland 1898, т. 2, с. 598):

> *Не следует говорить о судебном процессе; приходится обсуждать доказательства. Прежние их способы могут быть сведены к двум, – к тяжелым испытаниям и клятвам, – каждый из которых являлся призывом к сверхъестественному. История испытаний – это длинная глава в истории человечества.* […] *Доказывая свою невиновность, люди многих, если не всех народов, носили на руках раскаленное железо или совершали какой-либо подобный подвиг.* […]
>
> *У наших собственных предков два самых распространенных метода добиться знака Божьего заключались в том, чтобы просить пруд с водой принять невиновного и считать обожженную руку доказательством вины. Основания, которыми мы располагаем, видимо показывают, что испытание калёным железом устраивалось так, чтобы предоставить обвиняемому серьезную возможность избежать ожога.*

Ссылаясь на документы венгерского монастыря XIII в., авторы заключают: “шансы того и иного исхода испытания калёным железом были почти равны друг другу”.

Свидетельство Бируни об Индии представляется убедительным, по крайней мере в основном, но там существовала и более *простая* система испытаний (Bühler 1886, раздел VIII, с. 274 и след.):

> *§ 114. Или* [судья] *может заставить* [сторону в деле] *пронести огонь, или нырнуть в воду, или по отдельности* [severally; быть может severely, т. е. сильно] *дотронуться до голов жены и детей.*
>
> *§ 115. Того, кого не обожжет железо, кого вода не выталкивает* [быстро] *вверх, с кем вскоре не случается никакого несчастья, следует в силу его клятвы считать невиновным.*
>
> *§ 116. Ибо ранее, когда Ватса был обвинен своим братом, огонь* […] *в силу его правдивости не сжег даже единого* [его] *волоса.*

Вера во вмешательство сверхъестественного вносит дополнительные трудности в изучение испытаний, и трудно сказать, приписывали ли юристы (или общество в целом) какие-либо вероятности их возможным исходам. Но по крайней мере в католических странах должно было быть известно учение **Фомы** о чудесах. Он (1952, т. 19, с. 544) определил чудо как нечто, "совершаемое Господом минуя известные нам причины". Там же он (с. 545) приписал чудесам объективные ранги величия, а каждый ранг подразделил на степени "в соответствии с различиями в превышении сил природы". Он, правда, недостаточно пояснил свою *табель*, но во всяком случае наименьшим чудом он считал то, "что превышает силу природы по мере и порядку, как, например, когда человек внезапно исцеляется от лихорадки".

Можно сравнить удачный исход тяжелого испытания (см. выше) с чудом низкого ранга, но вот не были ли такие счастливые случаи просто обманом? Так утверждает Tylor (1879), который заметил, что они имели место в 50% испытаний, и то же указали Pollock & Maitland, см. выше.

Да, все верили, что Бог поможет невиновному, и мать **Кеплера**, обвиненная в 1621 г. в колдовстве, сумела воспользоваться этой верой (не по подсказке ли своего истинно верующего сына?), см. *Judicium* (1870, с. 549 – 550): в присутствии судей она упала на колени и попросила Бога дать знак, если она действительно колдунья …

3.2. Вероятности в судопроизводстве

Как заметил Самбурский (1956/1977, с. 36), **Платон** (1993, 272d, с. 59) заявил, что в судах все думают об убеждении, которое основано на вероятностях, но не об истине. **Аристотель** (*Риторика* 1376a19) также упоминал вероятности в связи с судопроизводством:

> *Если у тебя нет свидетелей* […] *доказывай, что судьи обязаны основывать решение на том, что вероятно.* […] *Если же у тебя есть свидетели, а у противной стороны нет, заявляй, что нельзя выносить вероятности на суд, и что свидетели вообще не были бы нужны, будь достаточным взвешивать ходатайства, заявленные обеими сторонами.*

Со ссылкой на **Августина Фома** (1952, т. 20, с. 314) обсуждал вероятности свидетельских показаний:

> *В людских делах вообще нет убедительных и непогрешимых доказательств, и мы должны довольствоваться некоторой предположительной вероятностью.* […] *Следовательно, хоть вполне возможно двум или трем свидетелям договориться о лжи, но это не так легко и вряд ли окажется успешным. Поэтому их свидетельство считается истинным.*

И вот сведения об Индии (Bühler 1886, §73, с. 267 и § 108, с. 273):

При расхождении в показаниях свидетелей раджа должен принять [показания] *большинства. Если же* [число свидетелей на той и другой стороне] *одинаково, – принять* [показания] *тех, кто выделяется достойными чертами характера.*

Свидетель [в исках о займах], *с которым в течение семи дней после того, как он дал показания, случится* [несчастье в виде] *болезни, пожара, или смерти родственника, должен будет уплатить долг и штраф.*

Это установление выглядит одним из первых, более вразумительных по сравнению с тяжелыми испытаниями, правил для разграничения случайного и божественного вмешательства (т. е. необходимого). Возможно также, что именно в юриспруденции появилось первое (неформализованное и вряд ли связанное с вероятностями) понятие об ошибках первого и второго рода. Вот, действительно, Аристотель (*Проблемы* 951b0): “Каждый из нас предпочел бы скорее вынести приговор, оправдывающий правонарушителя, чем признать виновным невинного**[7]** […]”

Аналогичное заявление имеется также и у Фомы (1952, т. 20, с. 505), Byrne (1968, с. 223 и 226):

Лучше чаще подвергаться риску быть обманутым, имея хорошее мнение о других, чем оставаться подозрительным к ним и хоть изредка недооценивать кого-нибудь.

Опасность [для других], *которая существует, пока они* [преступники] *живы, больше и более достоверна, чем благо, которого можно ожидать от их исправления. Более того, даже перед самой смертью у них остается возможность раскаяться и обратиться к Богу. Поэтому* […], *если даже перед самой смертью их сердца не отвращаются от преступных намерений, то можно полагать с достаточно высокой вероятностью, что они никогда и не раскаются.*

Заметим, что Фома, не совсем в соответствии с Аристотелем (п. 2.2), упоминает опасность и благо на равных основаниях.

Перейдем теперь к юристу-**Лейбницу** (1765/1936, кн. 4, гл. 16):

Имеются доказательства, так сказать, более чем наполовину, когда тому, кто основывается на них, дозволено дополнять их под присягой – это iuramentum suppletorium. Имеются другие доказательства менее, чем наполовину, где, напротив, присягать разрешается тому, кто отрицает факт, чтобы очиститься от обвинения – это iuramentum purgationis. Кроме того, имеются многие степени предположений и признаков. […]

Все формы действий в судопроизводстве по существу являются ничем иным, как видом логики, приложенной к вопросам права. Врачи также имеют многие степени и различия в своих симптомах и показаниях. […]**[8]**

Лейбниц не упомянул вероятностей; см., однако, его высказывание о видах логики в п. 5. И вот аналогичное утверждение об эпохе средневековья (Nagel 1939, с. 6): “для полного доказательства требовалось два свидетеля, сомнительный же свидетель считался менее, чем за половину”.

Судопроизводство основывается на законах, которые при данном общественном устройстве вырабатывались в соответствии с обычным, вероятным поведением человека. Вот утверждения Фомы (1952, т. 20, с. 235 и 314):

> *Законодатель не может предусматривать каждый отдельный случай и приспосабливается к тому, что случается чаще всего* […].
>
> *При назначении наказания за воровство закон имел в виду то, что вероятно будет случаться чаще всего.*

Впрочем, история системы наказаний – это почти история общества, и мы оставляем ее в стороне.

3.3. Применение средних. В гражданских делах, видимо, широко применялось среднее арифметическое из различных оценок. Об этом косвенно сообщил **Кардано** при описании одной азартной игры (Ore 1953, с. 215): “Это среднее образовано из крайних [является их полусуммой], а не так, как в судах, при оценках и т. д.”

Весьма определенно по этому поводу высказался **Лейбниц** (1765, кн. 4, гл. 16):

> *Основой всех этих теоретических построений* [в теории вероятностей] *является так называемый простаферезис, т. е. берут среднее арифметическое между несколькими одинаково приемлемыми предположениями. Наши крестьяне, следуя природной математике, уже давно пользуются этим методом.*

Он разъясняет: стоимость земельного участка принималась равной среднему арифметическому из оценок, предложенных тремя группами оценщиков. “Это аксиома – *aequalibus aequalia* – равно принимать в расчет равноценные предположения”.

4. Изящные искусства

Мы обратимся к скульптуре. Известно, что математическое учение о пропорциях широко применялось в архитектуре и в древности, и в эпоху Возрождения, и что уже **Витрувий** систематически измерял пропорции человеческого тела. Подобные измерения возобновил **Альберти** (1404 – 1472), – ученый, архитектор, скульптор, музыкант и писатель. Он не только применил для этого специально сконструированную линейку (*экземпеду*), но, что намного важнее, начал применять средние значения (Gadol 1969, с. 82, из сочинения Альберти *Della pittura e della statua*):

> *Я желаю установить не личные черты того или иного человека, а насколько возможно точную красоту, дарованную природой и данную, как бы в отборных долях, многим телам.* […] *Поэтому я выбрал много тел, которые знатоки считали самыми красивыми,*

измерил и их, и пропорции между их частями, сравнил и отбросил избытки крайних [размеров]. […] *И я отобрал из многих тел и моделей* [models – натурщики и натурщицы?] *те средние пропорции, которые представлялись мне наиболее достойными похвалы.*

Именно он ввел статистический метод в изящные искусства. Его метод нельзя непосредственно сравнить с введением *среднего человека* **Кетле**, предвосхищенного **Бюффоном** (1977, § 8), т. е. человека вообще, неуклюжего и просто невозможного (**Курно** 1843, § 123), притом будто бы представлявшего собой стандарт моральных и социальных качеств. Альберти отыскивал среднее из самых красивых людей, видимо примерно одной и той же конституции.

Gadol (1969, с. 80 прим.) характеризует роль Альберти в истории изящных искусств:

> *Он был первым теоретиком, который продвинул систему пропорций* [в изящных искусствах] *и от средневековых норм, и от классической системы. Его два* <u>*правила*</u> [для измерения пропорций тела] *и его метод измерений* [частей тела относительно его полной длины] *полностью оригинальны. Среди художников-теоретиков и* ***Леонардо****, и* ***Дюрер*** *воспользовались этой системой и усовершенствовали ее, а F. Giorgi описал ее в своей умозрительной Harmonia mundi totius.*

Как заметила Gadol, Альберти был и выдающимся геодезистом или астрономом, – это неясно (Cantor 1900/1965, т. 2, с. 292): “В своих письмах […] 1466 г. **Региомонтан** назвал двух человек, как особо достоверных наблюдателей, **Тосканелли** и Альберти”. Было бы интересно изучить, как он обрабатывал свои полевые измерения.

Статистический метод применил и Леонардо да Винчи (1939, §§ 587 и 309):

> *Осмотрись и возьми лучшие черты многих прекрасных физиономий. Таким образом выбирай красивое* […] *и запоминай это* […].
>
> *Посмотри на многих людей ростом в три braccia* [три руки] *и выбери большое их число, схожих друг на друга своими членами. Выбери одного из тех, кто наиболее изящен, и измерь.*

В заключение упомянем **Гальтона** (**Pearson** 1924, гл. 12), который придумал одно время ставшие весьма известными *составные фотографии* лиц определенной профессии, национальности, преступников. На одну и ту же пленку он снимал нескольких человек, каждый раз с недостаточной выдержкой. Мы не беремся судить о практическом значении его нововведения. Впрочем, см. McLearn и др. (1928).

5. Азартные игры

Они существовали уже на заре цивилизации (David 1955; Kendall 1956) наравне с жеребьевкой, о которой сообщали **Аристотель** и **Платон** и которая упоминается в Библии (Числа 3:44 – 49, 26:55 – 56, 33:54), см. Шейнин (2007с, с. 32 – 33).

Сами по себе игры не могли существенно продвинуть ни комбинаторный анализ, ни понятия случайного или вероятного: обычные игральные кости (не говоря уж об астрагалах – небольшой четырехгранной кости в лодыжке животного) были недостаточно совершенны, правила многих игр были сложны, но, главное, господствовала вера в сверхъестественное вмешательство в игры[9].

Лишь в середине XVII в. крупнейшие математики (**Паскаль**, **Ферма**) заинтересовались вероятностным изучением игр, которые и предоставили возможность ввести в математику первые понятия будущей теории вероятностей. В дальнейшем азартные игры изучали **Гюйгенс, Якоб** и **Николай Бернулли, Монмор** и **Муавр**, частично ввиду существовавшего *социального заказа*, но также и в связи с логикой развития теории вероятностей и понимая их методологическое значение. Вот вполне оправдавшееся предсказание Гюйгенса из письма 1657 г., предварявшего позднейшие издания его трактата того же года об азартных играх, см. Huygens (1657/1920, с. 56); перевод см. Бернулли (2006, с. 17):

> *… я хотел бы верить, что при более внимательном рассмотрении читатель вскоре поймет, что здесь дело идет не о простой игре ума, что в нее* [в работу] *заложено начало весьма интересному и глубокому умозрительному построению*[10].

Возвращаясь к более ранним временам, мы заметим, что игры предоставляли воображаемые примеры предначертания или необходимости. Десять тысяч бросков *коан* (что бы это ни означало) подряд при игре в кости невозможны, указал **Аристотель** (*О небе* 292a30), и поэтому “трудно представить себе, что скорости каждой звезды [случайно] в точности соответствуют размеру ее круга” (там же, 289b22). Видимо: неизменное взаимное расположение звезд не может быть случайным.

Аналогичное утверждение, не связанное, однако, с естествознанием, оставил **Цицерон** (Franklin 2001, с. 164). И вот **Кеплер** (1604/1977, с. 337) о появлении новой звезды:

> *Я не могу согласиться с теми, кто полностью отрицает какую бы то ни было связь между звездой и соединением* [Юпитера и Марса] *и утверждает, что слепой случай предопределил точное совпадение новой звезды по году, месяцу, дню, и расположению с датой и расположением этого Великого Соединения. Ибо, к примеру, хорошо изготовленная игральная кость имеет шесть граней, выпадения которых равновозможны, но если каждый из нескольких игроков выбрасывает 4 или 5 костей и у одного из них выпадает 6 очков на каждой кости, то не будет неразумным заподозрить какой-то обман. Действительно, трудно приписать подобный бросок случаю, потому что для его повторения может потребоваться сто тысяч попыток.*

> *Я не хочу приписывать это удивительное совпадение по времени и в пространстве слепому случаю, и особенно потому, что появление новой звезды само по себе, даже безотносительно времени и пространства, является не обычным событием, как при броске игральной кости, а великим чудом* […].

Кеплер, конечно же, ошибался: появление новых звезд не имеет никакого отношения к событиям в Солнечной системе. Далее, вероятность пятикратного выпадения шести очков равна $1/6^5$ = 0.000129. “Может потребоваться” столько-то бросков – это неясно, но во всяком случае вряд ли Кеплер что-то вычислял здесь, и уж конечно он не знал о распределении **Пуассона**.

Подобные рассуждения существенно зависят от подразделения событий на примечательные и обычные, о чем свидетельствует хотя бы известная задача **Даламбера – Лапласа** (Шейнин 2005, с. 28). Одно особое затруднение состоит здесь в том, что обычные события иногда не замечаются (Кеплер 1619/1999, с. 324):

> *Если какое-то предсказание не сбывается тысячу раз, оно всё же забывается, но вот если оно один раз сбудется, то считается достойным запоминания и всеми признается.*

См. также п. 2.2 и **Лаплас** (1814/1999, с. 856, правый столбец).

Косвенную ссылку на азартные игры Кеплер (Caspar & von Dyck 1930, т. 1, с. 139) привел в письме 1600 г.: “Следует (по правилу ложного положения) применить […] по существу нематематический метод азартных игр”. Издатели, к сожалению, не сохранили латинских терминов самого автора.

Азартные игры быть может с самого начала поддерживали распространенную интуитивную идею об оптимальных вероятностных свойствах средних исходов. Среднее возможное число очков при броске кости или астрагала служило мерилом разумной удачи или ожидания. Так, **Кардано** (Ore 1953, § 32, с. 240 – 241) заметил, что бросок четырех астрагалов, при котором одно очко выпадает более, чем на одном из них, “называется *собакой*, потому что общее количество очков уже не сможет превысить среднего числа”. Граням астрагалов обычно приписывали 1, 3, 4 и 6 очков, так что при таком броске среднее равнялось 14. Странно, однако, что Кардано не указал, что ввиду сильной асимметрии астрагала вероятности выпадения его различных граней различны.

Он весьма часто ссылался на средний исход, особенно при броске трех костей, и Ore (1953, с. 145) справедливо утверждал, что одним из основных доводов Кардано было “рассуждение о среднем исходе”; что он иногда при этом ошибался, для нас не имеет значения.

Галилей (1718/1962, с. 192 – 195), перевод см. Шейнин (2007а, с. 21 – 24), утверждал, что игроки полагали, что 10 или 11 очков при броске трех костей “более благоприятны”, чем 9 или 12. Если считать, что они интуитивно сравнивали условные вероятности событий А = (10 или 11 очков) и В = (9 или 12 очков), то окажется, что

$P_A = P$[A/A или B] = 27/52, $P_B = P$[B/A или B] = 25/52

и ΔP = 2/52 = 0.0385. Такую разность можно было установить по наблюдениям, но игроки могли бы просто считать этот вывод правдоподобным, поскольку событие A ближе “расположено” к среднему числу очков, 10.5.

Весьма интересно мнение **Лейбница** (1765/1961, т. 2, кн. 4, гл. 16, с. 515):

> *Я неоднократно указывал, что нужен новый вид логики, занимающийся степенями вероятностей.* […] *Хорошо было бы тому, кто имеет желание исследовать это, продолжить изучение азартных игр. И вообще мне хотелось бы, чтобы какой-нибудь математик вознамерился написать обширную работу обо всех видах игр с их точным описанием и убедительными доводами. Это было бы очень полезно для совершенствования искусства изобретения, потому что человеческий дух проявляется в играх лучше, чем в серьезных предметах.*

См. также его письмо **Якобу Бернулли** 1703 г. (Gini 1946, с. 404).

6. Биология и медицина

6.1. Биология. Роль случайности в биологии начала систематически изучаться только после **Дарвина**, хоть сам он (1859, гл. 5, с. 131) не признавал ее явно:

> *Я иногда говорил, что вариации будто* […] *были вызваны случайностью. Это, конечно же, совершенно неверное выражение, но оно позволяет простым образом признать наше незнание причины каждой данной вариации.*

До Дарвина биологи и ученые вообще всё же признавали, что случайность являлась причиной многих биологических фактов, хотя она еще не признавалась движущей силой эволюции. Уже **Аристотель** (п. 2.2) приписал случаю появление того или иного пола у потомства животных и человека и в этой связи высказался о диалектике необходимого и случайного. И изучение соотношения мужских и женских рождений сыграло важнейшую роль в развитии теории вероятностей. Вот, кстати, к сожалению никак не обоснованное утверждение (Wolfenden 1942, с. 181) о древнем Китае: “Понятие вероятности впервые, видимо, упомянул Sun-Tze в Китае около 200 лет до н. э. в связи с вероятностью новорожденному быть мальчиком или девочкой”.

Гарвей (1651/1952, пример 59, с. 462) по меньшей мере один раз четко указал, что внутривидовые вариации случайны:

> *Мне никогда не казалось, что форма яйца имеет какое-нибудь отношение к порождению цыпленка, и я всегда считал ее просто случайной. И к такому выводу я прихожу тем более, что вижу, насколько различна форма яйца у разных кур.*

Для нас важна вторая половина этой выдержки. Но несравненно важнее другое утверждение Гарвея (там же, пример 1, с. 338):

> *Существа, которые зарождаются самопроизвольно, называются автоматами*, […] *потому что они порождаются случаем, самопроизвольным действием природы*.

Важнейший (пусть, как впоследствии выяснилось, несуществующий) биологический процесс долгое время, видимо, до **Ламарка** (1815, с. 91), считался порождением случая!

Кеплер (1610/1941, § 59, с. 204), хоть и не был ботаником, видимо, высказал общее мнение о вариациях растений:

> *При обычных вариациях отдельных растений данного вида имеются, конечно же, плоды и цветы с семью, девятью и одиннадцатью лепестками или листьями, но нет таких видов растений, у которых эти числа были бы постоянными.*

Гюйгенс (1698/1944, с. 702) утверждал, что Создателю "понравилось […] установить некоторое различие форм между нашими животными и растениями и заморскими организмами". Ни о какой случайности здесь речи не было! Но вот **Лаплас** (1796/1886, кн. 5, гл. 6, с. 480; перевод 1982, с. 313 – 314), который, как известно, *обходился без гипотезы о Боге*, соглашался со склонностью не только к вариациям, но к сильнейшим изменениям в животном мире[11]:

> *Но столько вымерших видов животных, строение которых г-н Кювье смог с редкой проницательностью распознать в многочисленных ископаемых костях, которые он описал, не указывают ли они на имеющуюся у природы тенденцию изменять даже самые неизменные на вид вещи*?

6.2. Медицина.

6.2.1. Гиппократ описал многие, как бы мы сказали, истории болезни, и каждая из них как правило заканчивалась комментариями типа (1952a, кн. 3, п. 1, с. 54 – 55) "Вероятно, что этот пациент выздоровел по причине […]. Вероятно, что смерть следует приписать […]".

В соответствии с общим характером древней науки качественные вероятностные умозаключения и качественная корреляция таким образом были обычны для него. Вот другие примеры (1952b, § 45, с. 90; 1952a, кн. 3, п. 3, § 15, с. 59):

> *В общем, все случаи перелома кости менее опасны, чем* […]
> *Представляется*, […] *что наступление лета должно было благоприятно сказаться на этих пациентах* […] *И тем не менее* […]

И вот его общий совет (там же, § 16):

Я полагаю, что большая доля искусства [врачевания] *состоит в том, чтобы должным образом судить о написанном. Ибо тот, кто знает и верно использует это, вряд ли* [!], *как мне кажется, совершит какую-либо значительную ошибку.*

Он поясняет, что, учитывая климат и другие внешние условия, врач может предсказать “порядок критических дней” у пациента и определить “когда и как” ему следует принимать лекарства. Это, видимо, означало, что врач должен устанавливать вероятный ход заболевания и соответственно проводить лечение.

Гиппократ (1952c, § 69, с. 116; § 71, с. 117) четко указал, что следует принимать во внимание конституцию и общее состояние пациента:

Оголенные кости отделяются быстрее или медленнее в соответствии со способом лечения, кое-что также зависит от того, было ли сжатие более или менее сильным и от более быстрого или более медленного почернения и отмирания нервов и тела. Точно определить время, когда каждый из этих случаев заканчивается [смертью?] *невозможно.*

Конституция людей сильно отличается друг от друга по легкости или трудности, с которыми […]

Случайность он не упомянул, но она присутствует неявно. И вот другие примеры качественной корреляции (Гиппократ 1952d , § 2, №№ 44 и 49):

Люди, очень полные от природы, склонны умирать раньше, чем худощавые.

Те, кто приучен выносить обычную работу, пусть они слабы или стары, переносят ее лучше, чем сильные и молодые, но не привычные к ней.

Уточнить свои афоризмы Гиппократ, конечно же, не смог бы: вряд ли он систематически записывал и обрабатывал получаемые им сведения.

6.2.2. Аристотель. Его труды содержали интересные высказывания типа (*Проблемы* 859b5, 860a5, 862b5, 892a0)

Почему болезни, вызванные желчью, происходят летом, […] *а острые заболевания по той же причине – скорее зимой?*

Вообще говоря, изменения, которые наступают, когда теплое сухое лето следует […] *за сырой весной, вредно действуют на тело.*

Почему смерть особо вероятна в течение ста дней после каждого солнцестояния?

Аристотель обсуждает метеорологические явления, которые по его мнению сопровождают солнцестояния и повышают смертность. Но вот о различиях реакции людей на внешние условия он ничего не сказал. И, наконец: “Почему у блондинов и белых лошадей глаза обычно серые?”

6.2.3. Гален посвятил главу своей *Гигиены* (1951, гл. 11 из кн. 5-й) различиям в целесообразном образе жизни и правильном лечении для разных пациентов. И вот его вероятностное рассуждение из других глав той же книги (кн. 3, гл. 10, с. 132; кн. 1, гл. 4, с.11; кн. 5, гл. 4, с. 202):

> *Человек с совершенной конституцией, ведущий свободный образ жизни, но никогда не допускающий излишеств*, […] *вряд ли окажется в весьма патологическом состоянии.*
>
> Тело *имеет два источника ухудшения, один – внутренний и самопроизвольный, второй – внешний и случайный.*
>
> *Из тех вещей, которые влияют на него извне*, [некоторые] *случаются время от времени, беспорядочны и не неизбежны.*
>
> *У здоровых людей* […] *тело не изменяется даже от исключительных причин, но у пожилых даже малейшая причина приводит к величайшим последствиям.*

Таким образом Гален различал случайность и самопроизвольность и понимал случайность в духе **Пуанкаре** (п. 2.2). В то же время он (1952, кн. 3, § 3, с. 200; § 8, с. 206; 1971) верил в божественное происхождение человека, а в одном месте (1971, кн. 14, гл. 4, с. 465), как и **Аристотель** (п. 1), приписал случай софистам.

Природу Гален (1952, кн. 1, § 14, с. 177) не очень определенно полагал способной к изменениям:

> *Природа – созидательный мастер* […] *и содержание вещей неизменно стремится к единству, и также к изменениям, потому что ее собственные части воздействуют друг на друга.*

Он (1946, § 19, с. 122 – 123), однако, вряд ли считал эти изменения случайными:

> *Если вселенная не была порождена, то она не подвержена опасности разложения и недоступна случайным событиям и расстройствам.* […] *Кто верит,* […] *что мир был порожден*, […] *приходит к богохульству.*

Таким образом, случай имеет место в биологии, но в природе в целом – нет, что представляется противоречивым.

Гален (1951, название гл. 6 в кн. 1 и с. 20 – 21 этой главы) разделял идею среднего как моральной категории (п. 2.2):

> *Хорошая конституция – средняя из крайностей.*
>
> *Лучше всего было бы видеть, что все части тела являются точным средним из всех крайностей. Это было бы симметрией, наиболее подходящей для всех занятий.*

Возможно, что это не совсем верно, но по крайней мере видимо Гален первым после астрономов ввел среднее из крайних значений в естествознание. Он (там же, кн. 1, гл. 5, с. 13), кажется, повторил свое утверждение, добавив, что случайные уклонения от среднего состояния должны быть небольшими:

Здоровье – это вид гармонии. […] *Любая гармония достигается и проявляется двояко, – во-первых, переходом к совершенству*, […] *и, во-вторых, в небольших уклонениях от этого абсолютного совершенства*.

Одно из своих сочинений (1946) Гален посвятил обсуждению сравнительных достоинств догматизма и эмпиризма в медицине и вот его общее заключение (§ 31, с. 153): "Эмпиризм достаточен, чтобы выявить всё, необходимое при лечении". Это, положим, неверно, но подобные взгляды настойчиво проповедывались даже в XIX в. (Шейнин 1982, п. 4). Там же он (§ 15, с. 112 и 113) четко указал на различие в реакции пациентов на одно и то же лечение:

Опыт показал, что то, что привело к схожим результатам в трех случаях, может вызвать противоположное в трех других. Вещь [лекарство, способ лечения] *быть может выглядит точно так же, как и раньше, но всё-таки относится к тем, которые либо двусторонни, либо происходят часто, либо* […] *только изредка*.

Что может воспрепятствовать испытуемому лекарству влиять определенным образом на две [на три] *сотни человек и оказывать обратный эффект в двадцати других случаях, так что из первых шести осмотренных пациентов, на которых лекарство повлияло, трое будут относиться к тремстам, а трое – к двадцати. Притом вы не можете знать, какие трое относятся к тремстам, и какие к двадцати* […]. *Вы обязательно должны обождать, пока не осмотрите седьмого и восьмого, или, короче, многих подряд*.

Представляется, что Гален не доверился бы количественной оценке подобных (воображаемых) опытов, но классическую задачу медицинской статистики он всё-таки сформулировал[12]. И уже здесь намечается философская сторона статистики (W. Kruskal 1968, с. 1082):

Статистика издавна соседствовала с философией науки в государстве теории познания, но она обычно скромнее по охвату и более практична. В строгом смысле слова, статистика – часть философии науки, хотя на самом деле эти две области обычно изучаются по отдельности[13].

7. Астрология

С современной точки зрения астрология – псевдонаука. В прошлые времена были, однако, астрологи, в том числе ученые первого ранга, которые пытались обнаружить связи между небом и

Землей и искренне верили в их существование. Их заблуждение вовсе не было очевидным, потому что такие связи (но не астрологического характера) действительно известны.

Кеплер основывал астрологию на новых методологических принципах (Caspar 1958, с. 209):

> *Он хотел отличать халдейское суеверие звездочетов от физики, т. е. от чистой науки, опирающейся на опыт, который по его убеждению подтвердил определенную связь между явлениями на небе и событиями на Земле.*

И он же (Кеплер 1619/1939, с. 22*):

> *Что он уже тогда* [с 1594 г.] *занимался астрологией, произошло не только потому, что он в качестве математика провинции* […] *должен был составлять ежегодные альманахи* […] *или даже потому, что хотел тем самым обеспечить себе желательный побочный заработок без веры в собственные слова. Он достаточно часто доказывал делом, что ради истины мог пойти на моральные и материальные жертвы, и свои убеждения никогда не предавал* [даже] *за чрезвычайные выгоды. И даже если сумасбродная доченька астрология должна была подчас добывать средства матери-астрономии, он всё же позволял доченьке утверждать всё только таким образом, что мог это представлять себе в соответствии со своими убеждениями.*
>
> *В то время вера во влияние небесных явлений на земные события была настолько всеобщей и разделялась столь многими людьми, которых он глубоко уважал, что она* [вера] *и их должна была заразить.* […] *Но высказывания, содержащиеся в его письмах, доказывают, что он и в этой области уже с самого начала был настроен критически. Воздействие неба и на явления погоды, и на души людей было для него опытным фактом.*

В молодости Кеплер хотел стать богословом (письмо 1595 г., см. Caspar & von Dyck 1930, т. 1, с. 24):

> *Я хотел стать богословом; долгое время находился в смятении, теперь, однако, смотрите, как моими усилиями Бог прославлен и в астрономии.*

Можно, впрочем, сомневаться в том, что он стал бы хорошим богословом; позже он сам (1609/1992, с. 66) заявил:

> *На мнения набожных об этих естественных вещах я отвечу одним-единственным словом: в богословии больше всего ценится вес авторитетов, но философия основана на разуме.*

Этим заявлением Кеплер закончил свою защиту, как бы мы сказали, новой астрономии от богословов: со с. 60 он приводил утверждения священного писания (Книга Иисуса Навина 10:12 – 13, Псалом 18) о том, что Солнце вращается вокруг земли и объяснял их ошибочность тем, что Библия говорит с людьми так, чтобы всё астрономическое было понятно.

Видно, на чьей стороне симпатии Кеплера и во всяком случае делом его жизни оказалась философия, а точнее – *благоразумнейшая* астрономия и ее доченька, сумасбродная астрология (Кеплер 1610/1941, § 7, с. 161):

Эта астрология – быть может сумасбродная доченька, […] *но, Боже правый, что случилось бы с матушкой, благоразумнейшей астрономией, не будь у нее этой сумасбродной дочки.* […] *И, кроме того, математики так мало и так редко вознаграждаются за свои труды, что матушка наверняка голодала бы, не имей доченька никаких заработков*[14].

Кеплер (1619/1997, кн. 4, гл. 6, с. 349 и 350) считал себя основателем научного направления: “Ученые люди прислали мне письма, чтобы засвидетельствовать, что теперь, наконец, я обучаю астрологов более чистой философии”.

Основным в астрологии Кеплера было как бы корреляционное воздействие неба на Землю, а не соответствующая функциональная зависимость. Впрочем, таковым же было мнение **Тихо Браге**, см. его предисловие к книге 1591 г. одного из его студентов (Christianson 1968, с. 316 – 318), в котором он замечает, что “люди менее подвержены влиянию неба, чем животные”. В другом источнике (Hellman 1970, с. 410)[15] утверждается, что Тихо

Критиковал астрологов, которые выводили ложные заключения, исходившие из суеверий и ошибок, а не из самой астрологии, требующей и точного знания путей звезд [планет, Луны и Солнца] *и опыта, приобретенного знаками в физическом мире.*

Весьма возможно, что аналогичного мнения придерживались многие ученые, начиная с **Птолемея** и **Бируни** [IV, Прим. 11], см. также соответствующие высказывания **Фомы** в п. 2.4. И тем не менее Кеплеру (1610) пришлось защищать свою точку зрения, которая предусматривала воздействие неба и на явления природы, см. ниже. И вот как он (1619/1997, кн. 4, гл. 7, с. 377 – 378)[16] объяснил влияние неба на человека:

Моими светилами были […] *не утренний Меркурий*, […] *a* ***Коперник*** *и Тихо Браге, без журналов наблюдения которого всё, что я* […] *ясно осветил, осталось бы погруженным в темноту.* […]

Единственное действие расположения светил в момент моего рождения состояло в том, что они очистили огонек врожденных дарований и умственных способностей и усилили жажду суждений, неустанной работы и познания. Короче, они не воодушевили мой разум или какие-нибудь упомянутые здесь качества, а только пробудили их.

Неудивительно, что (1610, название § 55; § 36, с. 179; § 57, с. 200; § 81, с. 220)

Астрологи не могут предсказывать будущие случайности.

То, что устанавливают астрологи, верно большей частью, но не всегда. Верно в единичном, но не в целом, которое распадается на единичное.

Небо и земля не касаются друг друга так вещественно и хватко, как колесики [зубчатки] *в часах.*

События […] [таким образом] *уже не* [результаты] *небесных влияний, а естественных действий, подверженных им.*

Обычный человек ожидал, что астролог предскажет важные события в его жизни, однако, не имея такой возможности и не желая разочаровывать своих читателей, Кеплер (там же, § 133, с. 253) решил прекратить составление астрологических альманахов:

Астрологи не обладают никаким особым языком и должны заимствовать слова простых людей, а простой человек хочет понимать их только так, как он привык, ничего не знает об общих абстракциях и видит лишь конкретное, часто представляет себе [астрологический] *календарь в таком смысле, о котором автор никогда и не помышлял.* […] *Я в конце концов решил прекратить составлять календари.*

(Ввиду денежных затруднений Кеплеру всё же пришлось возобновить эту деятельность.) И вот его заключение (§ 74, с. 217):

Астролог, который видит только небо и […] *ничего не знает о промежуточных причинах, может предсказать конечный результат только предположительно* [probabiliter, что вряд ли удачно], *а не точно, т. е. почти никак.*

Кеплер (там же, названия §§ 112 и 114; § 15, с. 165; § 70, с. 214) пришел к мысли сравнивать астрологию с медициной, – с другой наукой, также основанной на вероятностях (см. наш п. 6.2):

В лучшем смысле астрология вместе со своим опытом так же верна, как Medicina Botanica, *и в обеих следует воздерживаться от суеверий.*

Чтобы достичь благой цели, не только астрологам, но и врачам иногда приходится выбирать кривые дорожки.

Он упомянул *кривые дорожки* врачей: противозаконное препарирование (выкрадываемых) трупов и рекомендация (вопреки требованиям христианского вероучения) применять противозачаточные средства для предохранения от венерических заболеваний. Про астрологов Кеплер ничего прямо не сказал, но, видимо, имел в виду нарушения богословских обычаев и установлений, см. ниже.

Продолжаем цитирование из указанного источника.

Не все медицинские выводы […] *так верны, как предсказания затмений и, соответственно, в астрологии из опыта могут проистекать такие выводы, которые так же верны, как когда врач говорит пациенту, который утратил было память и разум, но вскоре выздоровел, что он теперь понимает какой смертью тот умрет* [?].

Если бы врач так же прилежно записывал происхождение и кризисы [болезней] *своих пациентов, как я записывал погоду эти 16 лет* […]. *Он должен был бы, однако, осторожно применять свой опыт и не обманывать пациентов ложными сообщениями.*

И вот возможные вторжения в богословие (1610/1941, § 115, с. 238; 1619/1997, кн. 4, гл. 7, с. 380):

Некто […] *упрашивал меня, сказал, что я должен сообщить ему, жив или нет его друг на чужбине.* […] *И скажи я да или нет, я оказался бы колдуном и нарушителем божественной заповеди* [какой именно?].

Если упавший с крыши кирпич падает на прохожего, […] *если* […] *или, с другой стороны, если кто-то получит наследство, на которое не рассчитывал*, […] *если* […] *расположение светил в момент* [его] *рождения содержит указания на такие события, о которых обязан заботиться ангел-хранитель*, […] *то из этих расположений должны следовать препятствующие или, напротив, способствующие воздействия. И пусть богословы решают, не содержит ли это* [утверждение] *нечестивого мнения.*

Сравним оба этих высказываний с соответствующим мнением **Якоба Бернулли** (1713/1986, с. 29 и 23). В первом случае он готов был разумно ограничиваться подсчетом вероятностей обоих возможных исходов, а во втором заявил:

Каким образом […] *эта достоверность будущего может быть согласована со случайностью или свободой вторичных причин – об этом пусть спорят другие.*

В *Bibliographia Kepleriana* нет никаких следов деятельности Кеплера в области метеорологии, которая, правда, отражена в его письмах (Brocard 1880)[17], но в любом случае метеорология еще не опиралась в то время на числовые данные, и ничего похожего на количественную корреляцию у Кеплера здесь не могло быть. Тем не менее, он (1601) пытался предсказывать погоду на следующий год. В частности, Кеплер (1619/1997, кн. 4, гл. 7, с. 360 и 368) полагал, что установил связь между *аспектами* (примечательными взаимными положениями Солнца, Луны и планет)[18] и метеорологическими явлениями на Земле:

Я заметил, […] *что когда состояние воздуха нарушено, очень часто планеты находятся либо в соединении* [с Солнцем; имеют с ним равные долготы], *либо в соответствии с обычным учением* *астрологов образуют аспекты.* С другой стороны, *я заметил, что чаще всего воздух спокоен, когда аспектов либо нет совсем, либо же они быстро заканчиваются.*

Возможно также, что при аспектах в жарком поясе идет больше дождей, чем в дни, когда аспектов нет.

Кеплер верил в божественную заботу о человечестве и поэтому полагал (1610, § 4), что внебрачные дети, чье рождение равным образом соответствовало воле Бога, были наделены разумом не менее остальных и имели такое же право на жизнь, – несомненно, чтобы способствовать заселению земли (Бытие 1:28).

Вообще же, если вспомнить разумное мнение Кеплера о *промежуточных причинах* (см. выше) и учесть, что он пытался установить главные события в своей стране[19], то можно будет предположить, что в своей астрологической деятельности он напоминает будущих основателей политической арифметики, **Петти** и **Граунта**. У Кеплера, правда, полностью отсутствовали статистические данные, но их и не могло быть ни в то время, ни в той раздробленной феодальной Германии.

8. Астрономия

8.1. Кеплер. Первое вероятностное астрономическое рассуждение, видимо, высказал **Аристотель** (п. 5) и интересно, что, начиная по крайней мере с Кеплера (п. 5 и ниже), аналогичные доводы о невозможности управления системы мира случайностью произносили многие ученые[20]. Кеплер (1606/2006, с. 163) решительно отвергал сам случай:

Но что такое случайность? Всего лишь идол, и притом самый отвратительный из идолов; ничто, кроме как оскорбление полновластного и всемогущего Бога, равно как и совершеннейшего мира, который вышел из Его рук. Вместо души случай обладает опрометчивыми побуждениями, а вместо тела – безграничным хаосом. И кощунственно приписывать ему божественную вечность и всемогущество и божественное сотворение мира.

В письме того же 1606 г. он (Caspar & von Dyck т. 1, с. 261) пояснил происхождение своей точки зрения:

Теперь, когда я узнал, что общего у меня с философами относительно понятий судьба, предназначение, случай, и рассматривал поразительное совпадение Великого Соединения с появлением новой звезды [см. также наш п. 5], *я начал читать сочинение* ***Августина*** *о граде божьем.*

Августин (1952) не высказал ничего интересного о случае, и представляется, что Кеплер скорее отправлялся от древних ученых вообще (и, конечно, руководствовался своими собственными открытиями).

8.1.1. Эксцентриситеты. Кеплеру пришлось всё-таки предоставить какую-то роль случайным причинам, и в первую очередь ввиду эксцентриситетов планетных орбит. Под этим термином, даже после установления своего первого закона движения планет, он (1609/1929, с. 64*; 1619/1939, с. 17*, комментарии Каспара) понимал эксцентрическое положение Солнца относительно центра круговых орбит.

С самого начала эксцентриситеты причинили Кеплеру много хлопот. Пытаясь прояснить систему мира, он вписал пять правильных многогранников между сферами шести известных в то время планет, но вот эксцентриситеты, притом различные по величине, сильно тревожили его (1596/1921, гл. 18, с. 111): “Причины эксцентриситетов и их различий еще не установлены” и в гл. 17, с. 108, он формулирует задачу “для желающих”: “вывести причины […] эксцентриситетов, исходя из соответствующих многогранников. Ибо именно таковыми эти уклонения Бог не наугад, и не безосновательно придал отдельным планетам”.

Во втором издании 1621 г. того же сочинения Кеплер добавил *Примечания* почти к каждой главе, и мы находим в них (Прим. 3 и 7 к гл. 18; Прим. 3 к гл. 17, с. 117, 118 и 109):

Мы еще не знали причин эксцентриситетов, не знали, почему у отдельных планет они имеют такие-то значения […].

Я […] *исследовал величины эксцентриситетов, я обнаружил их причину в Гармонии мира* […].

Я искал, и смотри-ка, я установил главные причины. Следуют ссылки на кн. 5 *Гармонии мира.*

Что же произошло между 1596-м и 1621-м годами? В своем основном сочинении Кеплер (1609/1992, гл. 38, с. 404) указал:

Примеры, взятые из природы, и сродство небесных и земных вещей […] *громко свидетельствуют, что в простом теле более общие действия проще, и что переменные величины (как, например, в движении планет на переменном расстоянии от Солнца или эксцентриситет) происходят от стечения внешних причин*.

Так, поясняет Кеплер, ввиду внешних препятствий реки не могут стекать к центру Земли. “Этому противодействуют течения, застои, волны и завихрения и всё разнообразие [явлений], происходящее от описанных внешних и случайных причин”.

В гл. 39 (с. 415) Кеплер аналогичным образом заявил, что планеты, находясь на громадных расстояниях от Солнца, просто не смогли следовать по приписанным им круговым орбитам. Но затем (гл. 45, с. 455) он опровергнул сам себя:

В этой главе [39] *я приписал причину эксцентриситетов некоторой силе, находящейся в теле планеты. Следовательно, причина этого отклонения от эксцентрической окружности должна была быть также приписана тому же телу планеты. Но, как говорится, у торопливой кошки котята слепыми родятся, и то же случилось со мной. Потому что в гл. 39 я весьма энергично обсуждал, почему нельзя придать достаточно вероятности* *причине для невозможности орбите планеты быть точной окружностью, и я непременно должен был приписать какую-то нелепость силе, заключающейся в теле планеты.* […] *Ослепши от своего желания, я не обратил внимания ни на каждую часть, ни на все части гл. 39, а уперся на первой пришедшей в голову мысли* […] *и таким образом запутался в новом лабиринте, из которого должен буду выкарабкиваться в этой гл. 45 и в следующих вплоть до гл. 50.* Важно, однако, что Кеплер повторно возвращался к принципу внешних влияний. Так, в замечании на тексте письма от Местлина 1616 г. он (Caspar & von Dyck 1930, т. 2, с. 66) указал:

Я доказываю, что неравномерность движения соответствует природе планетных сфер, т. е. является физической. И кроме того я доказываю, что в подлунном мире и в механических движениях имеются примеры подобной регулярной неравномерности небесных движений, т. е. опять же, что такие различия являются физическими.

И несколько позже (1618 – 1621, 1620/1952, кн. 4, ч. 3, п. 1, с. 932):

Будь небесные движения обусловлены разумом, как полагали древние, вывод о точных круговых путях планет внушал бы доверие. […] *Но небесные движения вызваны* […] *природой* […] *и это самым обоснованным образом доказывается наблюдением астрономов, которые* […] *обнаруживают* [что орбиты эллиптичны]. *И эллипс свидетельствует о естественной телесной силе и об истечении и величине ее формы.* […].

В дополнение к разуму для движений была тогда нужда в естественных и анималистических качествах; эти качества следовали своим собственным наклонностям […] [и] *совершали многое по физической необходимости. И неудивительно, если эти качества, перемешанные друг с другом, не смогли полностью достичь совершенства. Сами древние признают, что пути планет эксцентричны, что представляется намного более сильным уродством, чем эллипс.*

Помимо общей ссылки на древних можно упомянуть **Эпикура** (п. 2.3) с его аналогичными мыслями о внешних влияниях.

Кеплер привел подобное же рассуждение в кн. 5-й своей *Гармонии мира* (1619/1997). Вот название гл. 9-й: “Эксцентриситеты отдельных планет произошли для установления гармонии между их движениями”. В ней же (с. 451) мы читаем:

Сам Мастер того, что является небом, сочетал гармонические соотношения, которые произошли от правильных плоских фигур, с пятью правильными телами и скроил из обоих классов единственный и самый совершенный прототип неба. […] *Эксцентриситетам отдельных планет*, [необходимым] *для соотношения движений тел друг с другом, были приданы их значения.*

Здесь, и явно в Теореме 5 этой главы, Кеплер сослался на свой второй закон: меры эксцентриситетов (и здесь этот термин мог относиться только к эллиптическим орбитам) предустановлены, чтобы регулировать движения планет. Именно это он (с. 451) имел в виду, когда утверждал, что "Всеобъемлющая гармония всех шести планет не могла возникнуть по случаю".

Непонятно, почему он не сослался на свой второй закон в *Эпитоме* (1618 – 1621). Но в любом случае представляется, что Кеплер так и не отбросил мысль о предустановленных круговых орбитах и об эллипсах, возникших ввиду сравнительно небольших возмущений, вызванных "естественными и анималистическими качествами". Более того, значения эксцентриситетов эллиптических орбит также предустановлены, но как бы установлением второго порядка. Если же отбросить эти *качества*, то окажется, что, несмотря на свое отрицание случайности, Кеплер фактически приписал эллиптические уклонения от окружностей случайным влияниям.

Трудно сказать, насколько **Кант** (1755/1912, 1. Hauptstück, с. 269; 8. Hauptstück, с. 337) и **Лаплас** (1796/1884, Прим. 7, с. 504; перевод 1982, с. 328) последовали за Кеплером, но по меньшей мере они также придерживались аналогичного мнения:

Было бы слишком счастливой случайностью, будь все планеты совершенно точно в середине между двумя сторонами.

Почему их пути не вполне круговые? […] *Разве не ясно, что та причина, которая установила орбиты небесных тел,* […] *не смогла полностью добиться этого? Разве здесь не видны обычные природные методы, которые каждый раз отклонялись вмешательством различных побочных действий от полностью предопределенных мер?*

Если бы солнечная система образовалась с совершенной правильностью, орбиты тел, которые ее составляют, были бы окружностями, плоскости которых, а также плоскости экваторов и колец, совпадали бы с плоскостью солнечного экватора. Но можно понять, что бесконечное разнообразие, которое должно было существовать в температуре и плотности различных частей этих больших масс, произвело эксцентриситеты их орбит и отклонения их движений от плоскости солнечного экватора.

Естественные и животные качества Кеплера трезво названы *разнообразием* и т. д.[21]

Рассуждения Кеплера, Канта и Лапласа напоминают позднейшее утверждение **Пуанкаре** (1912/1999, с. 9):

Ни в одной области точные законы не определяли всего, они лишь очерчивали пределы, в которых дозволялось пребывать случаю.

Подобного мнения придерживался **Леви Бен Гершон** (1288 – 1344), который считал детерминированность естественных наук лишь приближенной и вероятной (Rabinovitch 1973, с. 77, со ссылкой на его сочинение).

8.1.2. Конец света. Вторая важная тема в сочинениях **Кеплера** – это его размышления “Об астрономическом начале и астрономическом конце света” (1596 и 1621, название гл. 23 в обоих изданиях). В первом издании, исходя из неверной формы еще не известного третьего закона движения планет, в том числе из формулы

$$T_i/T_j = (r_i/r_j)^2,$$

связывающей периоды обращения двух планет с радиусами их (круговых) орбит, Кеплер (гл. 23, с. 144) отвергает всякую возможность одновременного возвращения всех планет к своим положениям в момент создания мира, т. е., в соответствии с древними представлениями, отвергает возможность конца света.

Во втором издании *Мистерии*, исходя уже из правильной формы этого закона, Кеплер (Прим. 5 к гл. 23, с. 145) заявил:

> *Теперь, однако, мы уже разрушили это основание, поскольку отношения орбит происходят не только от пяти тел. И спрашивается, что же остается верным в этом предложении. Произойдет ли полное возвращение всех движений? Я говорю, что нет, хоть основа для доказательства этого и опрокинута.*

Он (с. 146) пояснил свою мысль фактически в том же порядке, что и **Орем** (1966, *De prop. prop*., гл. 3, Предложение 10, с. 247; *Ad pauca*, ч. 2, Предложение 17, с. 422), но без ссылки на него:

> *Вероятно* (verisimile), *что два заданных неизвестных отношения* [два числа] *несоизмеримы, потому что, если дано много неизвестных отношений, то наиболее вероятно, что какое-либо из них не будет соизмеримо ни с каким другим.*
>
> *Вероятно, что в каждый момент небесные тела так относятся друг к другу* [в пространстве], *как никогда раньше и как никогда не будут относиться в будущем.*

Доводы Орема и Кеплера интересны, поскольку они первыми применили вероятностные рассуждения к абстрактным математическим понятиям. Они, конечно же, не знали, что динамическая система сколь угодно близко возвращается к своему прежнему положению.

8.2. Галилей. Полностью отрицая возможность нерегулярного движения небесного тела, Галилей (1623/1960, § 11, с. 197), как представляется, одновременно отрицал случайность:

> *Те линии называются регулярными, которые, неизменно описываемые установленным образом, допускают определение и обоснование их качеств и свойств.* […] *Но нерегулярные линии –*

это те, которые вовсе не обладают определенностью, являются неопределенными и случайными (casual), *а потому неопределимыми.* […] *Сказать, что "Такие события происходят по причине нерегулярной линии", всё равно, что сказать "Не знаю, почему они происходят". Введение таких линий нисколько не лучше симпатий, антипатий, сокровенных свойств, влияний и других терминов, которые употребляются некоторыми философами в качестве прикрытия вместо ясного ответа, – я не знаю.*

Если эта тирада была направлена против **Кеплера**, то она дополнительно объясняет, почему Галилей не поверил в эллиптические орбиты планет, – не только потому, что считал круговые орбиты единственно возможными (это хорошо известно), но и ввиду отрицания случайности (тем более мистической).

И всё-таки это отрицание не помешало Галилею ни рассуждать об обработке косвенных наблюдений (Хальд 1990, с. 149 – 160), ни отделить вращение солнечных пятен вместе с диском Солнца от их случайного передвижения относительно него (1613) и таким образом довольно точно определить период обращения Солнца (один лунный месяц; современное значение – 24.5 – 26.5 дней).

9. Философия нового времени; случай и его законы

9.1. Случай. Многие философы нового времени по примеру древних сводили случай к пересечению цепей детерминированных событий. Так **Гоббс** (1665/1839, т. 1, ч. 2, гл. 10, § 5, с. 130; 1646/1840, с. 259 или 1938, с. 40 – 41) утверждал, что

> *Вообще, все случайности имеют свои необходимые причины* […], *но называются так по отношению к другим событиям, от которых они не зависят. Дождь, например,* […] *происходит по необходимым причинам,* […] *но мы полагаем его случайным, потому что еще не знаем их*[22].
>
> *Случайным люди* […] *считают* […] *то, у чего нет никакой понятной нам причины.* […] *Если путник попадает под дождь, путешествие имеет причину, и дождь тоже имеет причину, достаточную, чтобы он произошел. Но путешествие не вызвало дождя, и дождь не привел к путешествию, и потому мы говорим, что они случайны друг относительно друга.*

Примерно так же полагали **Спиноза** (1663/2005, ч. 1, гл. 3 Приложения, с. 143; 1677/1999, ч. 1, Предложение 29, с. 63 и Прим. 1 к Предложению 33, с. 71); **Вольтер** (прим. 1759/1994; 1771/1879, с. 441); **Гельвеций** (1772, гл. 5, с. 11, гл. 21, с. 63 – 64; 1773/1818, с. 33); **Гольбах** (1770, гл. 12 из ч. 1, с. 311 – 319; 1772/1956, § 43, с. 272); **Юм** (1740/1874, с. 424 и 428; 1777/1902, гл. 6, с. 56 – 59).

Точку зрения **Пуанкаре** (п. 2.2) о случайности при неустойчивом равновесии высказали многие ученые и до него, по крайней мере по отношению к истории, к примеру, Гельвеций (1773/1818, с. 32; **Паскаль** (посмертное издание/2000, № 392, с. 675), Гольбах (1770, гл. 12 из ч. 1, с. 214) и, в какой-то степени, Вольтер (прим. 1759), из которых мы процитируем только Паскаля: "Будь нос Клеопатры короче, всё лицо Земли изменилось бы". Гольбах, однако, считал, что всё необходимо, включая болезни и войны, см. выше. Его высказывания были таким образом противоречивы.

Философы применяли вероятностные рассуждения, чтобы объяснить происхождение мира и/или животного мира, или, напротив, чтобы опровергнуть подобное мнение. Все их высказывания были по необходимости качественными, и теория вероятностей возникла вне связи с ними. Впрочем, краткое сообщение о них оправдано хотя бы произнесенными попутными соображениями.

Выступавшие против случайного происхождения мира обычно приводили пример невозможности случайного составления осмысленного текста (**Boyle** 1772/1966, с. 43; **Дидро** 1746/1966, § 21, с. 135; Гельвеций 1772, гл. 21, с. 64)[23]. Те, кто опровергал случайное происхождение жизни, либо считали свою точку зрения очевидной (**Barrow** 1830, с. 99; **Nieuwentit** 1718 – 1719), также **Гален**, см. п. 6.2.3, либо полагали, что подобный процесс был бы еще менее вероятен, чем случайное происхождение мира (**Kant** 1755/1910, Vorrede, с. 230; **Мопертюи** (Шейнин 1980, с. 334 – 336); Вольтер 1767; 1987, с. 428).

С другой стороны, Гельвеций (1772, гл. 3, с. 8) возможно утверждал иное: “Природа своими сочетаниями порождает Солнца”. Декарт, хоть и с оговоркой (1637/1982, с. 42), – “намного правдоподобнее, что Бог с самого начала создал мир таким, каким он должен был быть”, – всё-таки пытался объяснить происхождение мира случайностью (там же, с. 34; 1664/1986, гл. 8/15, с. 48; двойная нумерация глав):

Каковы бы ни были неравенства и беспорядок, которые, как мы только можем предположить, Бог допустил в начале между частями материи, впоследствии, в соответствии с законами, наложенными Им на природу, почти все они слились в одно целое и возымели незначительное движение.

Я решил […] *говорить о том, что произойдет с этим* [миром], *если Бог сотворит сейчас в воображаемых пространствах достаточно материи, чтобы создать какую-то его часть и по-разному беспорядочно перетрясет различные части этой материи, чтобы получить столь перепутанный хаос, какой только могут вообразить себе поэты, и что если вслед за этим допустить лишь обычное участие природы в соответствии с установленными Им законами.* […]
…. *Я показал, как наибольшая часть материи этого хаоса должна будет в соответствии с указанными законами возыметь склонность расположиться определенным образом* […], *как, однако, некоторые из этих частей должны были бы образовать Землю и некоторые планеты* […].

Весьма интересно, что некоторые ученые (Дидро 1754/1966, § 51, с. 49; Гольбах 1770, ч. 2, с. 138 – 139)[24] были готовы признать “неравномерную” случайность (не *слепой случай*):

Ввиду этой скрытой чувствительности и различий в очертаниях, для какой-либо органической молекулы существует лишь одно наиболее удобное положение, которое она безостановочно отыскивает с автоматической тревогой.

Очень ли мы удивимся, если при броске 100 000 игральных костей выпадет столько же шестерок? […] *Если все они подделаны, то мы перестанем поражаться.* […] *Молекулы тела можно сравнить с поддельными костями*, […] *они существенно различны* […], *они подделаны, так сказать, бесконечным множеством различных методов.*

Неявно это же признал Вольтер (1767/1987, с. 429), а **Лейбниц** признавал случайность (1710/1965, § 14, с. 413 – 414), которая "происходит от преобладающей причины, склоняющей, но не принуждающей", ср. аналогичные высказывания **Фомы** и **Кеплера** о влиянии небесных тел на человека (пп. 2.4 и 7). Лейбниц (там же, § 302, с. 296) также указал, что случайность не обязательно действует одинаково "в обе стороны", и это – весьма косвенное признание неравномерной случайности.

Позволительно ли сказать, что Дидро (см. выше) полагал, что все различные положения молекулы, кроме одного, маловероятны?

9.2. Случайность и необходимость. Диалектика. Кант (1781/1911, с. 508) сформулировал первое утверждение общего порядка на этот счет: "Случайное в единичном тем не менее подчинено правилу в общем"[24]. Задолго до него **Николай Бернулли** и **Муавр** рассуждали о необходимости и случайности в связи со статистикой мужских (m) и женских (f) рождений, а точнее о смысле соотношения $m:f$ (Шейнин 1973а, с. 303).

Гегель (1812/1971, т. 2, с. 191 и 198) развил мысль Канта:

Это единство возможности и действительности есть случайность. […] [Случайное] *есть непосредственная действительность; оно не имеет основания* […]. *Но случайное – это действительное как нечто лишь возможное* […]. *Оно имеет основание* […].

Здесь имеет место единство необходимости и случайности; это единство следует назвать абсолютной действительностью.

Трудновоспринимаемый текст Гегеля оставался незамеченным по меньшей мере до конца XIX в. **Энгельс** (1925/1958, с. 231 – 235) одобрительно отозвался о нем и призвал естествоиспытателей изучать и необходимое, и случайное.

9.3. Попытка формализовать понятие случайности и беспорядка. Такую, немыслимую для того времени попытку совершил **Ламберт** (1772 – 1775). Сославшись на **Х. Вольфа**, который разрабатывал всеобщую теорию познания, и его ученика **А. Г. Баумгартена**, он приложил математику к "метафизическим" объектам.

В десятичном разложении $\sqrt{12}$ Ламберт (ч. 1, § 7) заметил "порядок связи" (точнее, "порядок закономерности"), что означало, что каждая цифра “необходимо занимает свое место”. Однако, “равным образом верно, что нет никакого порядка сходства (местного порядка) и что цифры следуют одна за другой как бы случайно, и […] что исчисление вероятностей здесь полностью приложимо”.

Затем, Ламберт (§ 11) ввел меру беспорядка в перестановках, – сумму произведений значений каждого элемента на его расстояние от “надлежащего” места. Так, для перестановки 4, 3, 1, 2 беспорядок оказывался равным 4x3 + 3x1 + 1x2 + 2x2 = 21.

Переходя к многомерному случаю, Ламберт (§ 13) оценивает беспорядок книг в библиотеке. Он различает книги по наукам, затем по древности, формату и т. д. Придавая этим характеристикам веса *a, b, c*, Ламберт (§ 15) вычисляет меру “порядка” собрания книг. Пусть расположение m книг соответствует всем поставленным условиям, а p, q, r книг ($m + p + q + r = n$) соответствуют первому и второму; первому и третьему; и только третьему условию. Тогда порядок оказывается равным

$$\frac{m(a+b+c)+p(a+b)+q(a+c)+ra}{n(a+b+c)}.$$

В § 16 мы находим любопытное замечание:

Но если мы подобным образом обратимся к большинству установлений химии, то там обнаружится порядок весьма низкой степени, а если дело идет о сочинениях нулевого порядка, то следует обратиться к алхимикам.

Мысль понятна, но вот характеристики *порядка* у Ламберта здесь явно не те, которые следовало бы принять.

Первую часть мемуара он заканчивает вычислением оптимального места элемента в данной последовательности. Пусть, в соответствии с тремя противоречивыми правилами, обладающими весами A, B и C соответственно, он отстоит от своего надлежащего места на x, $m - x$ и $n - x$ соответственно. Тогда “степень недостатка порядка” y этого элемента равна

$$y = Ax + B(m - x) + C(n - x)$$

и Ламберт отыскивает наименьшее y для всех трех возможных соотношений между $A + B$ и C. Так появилась элементарная многокритериальная задача исследования операций.

Во второй части мемуара Ламберт пытался сформулировать правила для расположения элементов данной одно- и двумерной последовательности, но встал при этом на точку зрения художника. Его правила не имели никакого отношения к случайности, да и вообще в этой части мемуара он лишь мимоходом обращался к вероятностным рассуждениям.

9.4. Теория вероятностей и математическая статистика. Для Якоба Бернулли непосредственным источником вдохновения послужила знаменитая книга **Арно** и **Николь** (1662), в которой можно отыскать его исходные предпосылки и даже некоторые примеры. Ему, однако, принадлежит идея количественного выражения индуктивных рассуждений. В отличие от **Карнапа** (1951), мы полагаем (впрочем, вовсе не первыми), что сочетание априорной, теоретической, и апостериорной, статистической, вероятностей послужило основанием длительного развития теории вероятностей, быть может до середины XIX в.

Известно, что **Лейбниц**, по крайней мере вначале, еще до публикации *Искусства предположений*, не соглашался с мыслями **Якоба Бернулли**; выдержки из их тогдашней переписки в переводе на немецкий см. Gini (1946). Это выглядит странно, потому что именно Лейбниц был сторонником вероятностной логики (п. 5). Он, видимо, считал более важным взвешивать субъективные мнения и вероятности, а в своих письмах Бернулли он подчеркивал преобладающую значимость тщательного учета обстоятельств.

Примечания

1. Мы ссылаемся на собрание сочинений **Аристотеля** (384 – 322 до н. э.) под редакцией Д. Росса (1908 – 1930, 11 томов, и 1954, т. 12-й). В позднейшем собрании его сочинений (тт. 1 – 2, Принстон, 1984) указано, что принадлежность Аристотелю трактатов *Проблемы* и *Магна моралия* сомнительно. В этих двух томах нет упоминаемого нами сочинения *Парва натуралия*, которое состоит из 11 частей (*New Enc. Brit*., 15-е изд., т. 14, 1997, с. 69), но все они включены туда по одиночке. На русском языке опубликованы *Сочинения* Аристотеля, тт. 1 – 4, 1975 – 1983, которых мы не видели.

2. По **Шиллеру** (*Прогулка*) “Мудрец […] в ужасающем чуде случаев ищет закона и явлений хаос к полюсу хочет привесть”.

3. Интересный пример, относящийся к военному искусству, содержится в древнекитайской книге IV в. до н. э. (Буров и др. 1972, с. 203):

> *У кого* [из военачальников] *шансов перед битвой много – побеждает; у кого шансов мало – не побеждает, тем более* [тем менее] *же тот, у кого шансов нет вовсе.*

Иначе: редкое событие практически невозможно. Там же (с. 214) из источника, возможно V в. до н. э, имеется аналогичное рассуждение, вряд ли статистически обоснованное:

> *Ян Чжу сказал: Сто лет – это высший предел продолжительности жизни. Из тысячи людей даже одному не удается достичь столетнего возраста.*

4. Аналогичные утверждения содержатся в древнекитайской философии в конфуцианском каноне (IV – I вв. до н. э.), см. *Ли Цзи* (*Книгу установлений*), гл. 52 – 53 и 59 (Буров и др. 1973, с. 119 – 140).

5. Мы будем неоднократно ссылаться на это сочинение, не указывая его соответствующих трактатов.

6. И поучительно подразделение наук по **Дидро** (1765/1966, с. 208):

> *Мы подразделяем* [различные науки] *на три класса по отношению к их целям: необходимые, как метафизика, математика, добрая часть логики, естественное богословие, мораль; второстепенные, о созданном разуме и теле* [?], *и произвольные, под которыми понимают науки, зависящие от свободной воли. В этот последний класс можно включить грамматику, часть логики, которая зависит от слов, знаков нашей мысли, часть морали или юриспруденцию, основанную на нравах и обычаях.*

На с. 212 Дидро дополнительно отнес к третьему классу архитектуру, живопись и музыку.

7. Подобные гуманные высказывания противоречат более чем странному сравнению его с Гитлером в общем-то вполне достойной книге (Bernal 1957, с. 148):

> *Сочинения Аристотеля, хоть и были трудны для понимания, не требовали (или казалось, что не требовали) для восприятия ничего, кроме здравого смысла. Как и Гитлер,* ***Аристотель*** *никогда не говорил ничего, во что читатели не верили заранее.*

8. В связи с косвенными указаниями, на которые фактически сослался **Лейбниц**, мы заметим, что Cliff (1972) и J. B. Kruskal (1972), возможно в духе Лейбница, попытались статистически установить значимость обычных качественных характеристик поведения человека.

9. Точнее, вмешательство считалось неизбежным только, если игры (или жеребьевки) проводились по установленным предписаниям, иначе же полагали, что их результаты случайны. Вот, впрочем, пример истолкования предсказания, связанный с наивным статистическим соображением, из *Тринадцатикнижия* **Конфуция** (Буров и др., 1972, с. 108): “Гадать [должны] трое, а следовать [необходимо] словам двух из них [, ответы которых совпадают]”.

По поводу сложности правил азартных игр можно сослаться на игры индийцев (Schoolcraft 1845; Лонгфелло, *Песнь о Гайавате*, гл. 16), не говоря уже о многих *европейских* играх (**Якоб Бернулли** 1713/2006, часть 3-я), а при броске астрагалов учитывалось не только общее число очков, но и способ его составления.

10. Вот другие подходящие примеры. **Муавр** (De Moivre 1718/1738 и 1756, Посвящение Лорду Карпентеру): Это учение (его книга) “Настолько далеко от поощрения игры, что скорее служит предостережением против них”. **Кардано** (Ore 1953), хоть и не сказал ничего подобного, но перечислил обстоятельства (места, времени, выбора партнеров), при которых позволительно играть.

Сильно высказался против игр De Morgan (1845, с. 406):

> *Общество* [игроков] *в конце концов непременно разорится, ибо их сделки* […] *не увеличивают стоимости ничего того, с чем они имеют дело,* […] *и мерзость их занятий состоит в том, что любое последовательное увеличение капитала игрока непременно происходит от неравной игры.* […] *Если кто-то ставит больше, чем может благоразумно потратить, играя или с другим человеком, или с фирмой, которая занимается азартными играми, то на одной стороне – простофиля, на другой – мошенник.*

В том же духе и много раньше высказался **Бюффон** (1777, §§ 12 – 13/2007, с. 106 – 108).

11. Дидро (1754/1966, § 58, с. 57) заявил, что только вера препятствует ему заподозрить, что зародыши, состоящие из "элементов" животных, прошли "через бесконечное множество устройств и развития".

12. См. также мнение **Лейбница** о симптомах и показаниях в п. 3.2. **Ибн Сина** (1960, ч. 1, п. 2, § 52 и ч. 2, п. 1, § 24), третий великий врач в истории медицины, не предложил новых идей, но во всяком случае подтвердил мнение **Галена** и о вероятностных рассуждениях, и о значимости симптомов. О нем см. также Crombie (1952).

13. Поучительна статья Woolhouse (1873), который описал раннюю историю Лондонского (позднее, Королевского) статистического общества, учрежденного в 1834 г. Он (с. 37) привел выдержку из официального документа Общества [Аноним 1839]:

> *Статистическое общество будет считать первым и важнейшим правилом своего поведения тщательное исключение всех мнений из* […] *своих публикаций, и строго ограничивать свое внимание фактами.*

Официальная эмблема Общества (с. 39), сноп пшеницы, напоминает статистикам, что они должны довольствоваться, так сказать, "вязкой […] снопов пшеницы для последующей молотьбы другими". Автор продолжает: "Эти нелепые ограничения по необходимости пренебрегались в многочисленных статьях".

Вот еще две выдержки оттуда же: "статистики не обсуждают причин и не рассуждают о вероятных последствиях" (с. 1), так чтобы все выводы "допускали математическое обоснование" (с. 3). Пшеничный сноп и до сих пор является эмблемой этого общества, в публикациях которого можно, однако, встретить новое понимание статистики (Lancaster 1970, с. 411):

> *Статистика распространяется на все те отрасли математических наук, которые прилагаются к исследованию и пониманию количественных наблюдений, и особенно тех, которые подвержены действию случайности.*

14. О взаимоотношениях астрономии и астрологии у **Кеплера** можно судить и по его предисловию к *Рудольфовым таблицам*

(1627), посвященному истории астрономии, которую он (с. 361) поэтому назвал дочерью матери-астрологии!

15. Этот же автор (там же) замечает, что ученик **Тихо**

> *Привел 399 кратких правил предсказания погоды по виду неба, Солнца, Луны и звезд* [планет] *или по поведению животных.* […] *Погода ежедневно регистрировалась на острове Вен* [местонахождении обсерватории Тихо] *в 1582 – 1597 гг.*

Мнение Кеплера о связи метеорологических событий с небесными явлениями мы обсуждаем ниже.

А сам Кеплер (1627/1972, с. 368) назвал Тихо своим предшественником: “Тихо самым точным образом различал общее влияние звезд от самих событий, касающихся отдельных лиц”.

16. Там же **Кеплер** кроме того указал:

> *От того, что Юпитер возвысился до середины неба* [до кульминации], *произошло то, что мне больше нравится геометрия, выраженная в физических вещах, а не отвлеченно, а поскольку Юпитер выказывал сухость Сатурна, – больше нравится натурфилософия, а не геометрия.*

См. также письмо Кеплера 1599 г. (Caspar & von Dyck 1930, т. 1, с. 105).

17. Этот редкий источник, неточно упомянутый в *Bibliographia Kepleriana*, содержит переводы соответствующих выдержек из писем **Кеплера** и комментарии о метеорологической деятельности J. Werner и **Тихо Браге**. Мы видели только одну выдержку (с. 281 – 313).

18. Подразделение небесных явлений на примечательные и обычные настолько же, видимо, затруднительно, как и аналогичное подразделение событий при вычислении вероятностей особых из них, см. также § 5. **Кеплер** (1601/1979, § 40, с. 97) также уместно указал, что аспекты существуют лишь для земного наблюдателя.

19. Так, он (1601, тезис 73) указал, что в следующем году произойдут какие-то политические события, которые затронут несколько названных им европейских стран.

20. См., например, **Кант** (1763/1984, Шестое соображение, с. 117 – 118):

> *Нет ничего более вредного и в то же время неразумного в мыслях о божественном создателе вселенной, чем быть готовым приписывать великое и плодотворное правило приличия, пригодности и совпадения чистому случаю.*

Об аналогичных заявлениях многих других философов см. п. 9.1. **Гюйгенс** (1698/1968, с. 20) вспомнил по этому поводу **Демокрита** и последователей **Декарта**: они может и взялись бы сносно объяснить явления на небе и на Земле случайностью, “дайте им только их атомы и движения”, но происхождение растений и животных они не смогли бы таким образом обосновать.

21. Ньютон доказал, что планеты должны двигаться по эллиптическим орбитам, эксцентриситеты которых зависят от скоростей движения, и нулю они равны лишь при некотором значении скорости, см., например, Блажко (1947, с. 67 – 68). **Кеплер** ошибался, что неудивительно, но вот как мог ошибаться **Кант**, – и тем более **Лаплас** (хотя бы даже в научно-популярном контексте)!

22. Примечательно, что **Якоб Бернулли** (1713/1986, с. 26) заявил, что “случайность главным образом зависит от нашего знания”. Примерно так же считал **Лаплас** (1776/1891, § 25, с. 145):

> *Случай сам по себе не имеет* […] *никакой реальности; это не больше, чем термин, удобный для обозначения нашего незнания таким образом, чтобы различные стороны одного явления согласовывались друг с другом и в конечном счете с природой.*

См. также другой его мемуар (1781/1893, § 2, с. 385); в своем *Опыте философии …* 1814 г. он, однако, видимо не повторил этого утверждения и не предложил взамен никакого иного.

Довод, аналогичный сведению случая к пересечению цепей детерминированных событий, т. е. аналогичный приведенному Юмом (и многими древними философами), встречается в древнеиндийской философии (Belvalkar & Ranade 1927, т. 2, с. 458):

> *Ворона не знала, что ее насест сломает ветвь пальмы, а ветвь не знала, что будет сломана насестом; всё произошло по чистой случайности.*

23. Аналогичный довод привели **Арно** и **Николь** (1662/1965, с. 385): безрассудно рисковать даже ничтожной суммой против королевства, обещая сразу же случайно составить 20 строк классического текста. В частном сообщении N. L. Rabinovitch (Лондон) сообщил нам, что еврейский мыслитель X в. Bahya ibn Pakuda оставил похожее рассуждение. Устаревший довод аристотелева типа привел **Спиноза** в письме 1674 г.

24. Кант (1763/1912, Четвертое соображение, с. 111) привел аналогичное утверждение, относящееся к статистике населения:

> *Как бы в каждом случае ни было случайно решение жениться, в одной и той же стране отношение числа женитьб к числу жителей в больших числах довольно постоянно.*

Библиография

Баммель Г. К., ред. (1935), *Демокрит в его фрагментах и свидетельствах древности.* Б. м.

Бируни А. Р. [973 – 1048 или позднее 1050] (1963), *Индия. Избр. Произв.*, т. 2. Ташкент.

Блажко С. Н. (1947), *Курс общей астрономии.* М. – Л.

Буров В. Г., Вяткин Р. В., Титаренко М. Л., редакторы (1972 – 1973), *Древнекитайская философия*, тт. 1 – 2. М.

Ибн Сина [980 – 1037] (1960), *Канон медицины*, т. 4. Ташкент.

Лукреций, Lucretius [– I в.] (1946 – 1947), О природе вещей, тт. 1 – 2. Б. м. Также (1952), De rerum natura. В книге *Great Books* (1952, vol. 12, pp. 1 – 97).

Платон, Platon [428 или 427 – 348 или 347 до н. э.] (1993), *Phaidros. Werke*, Bd. III-4. Göttingen.

--- (1904), *Федр*. М. *Phaidon. Werke*, Bd. I-4. Göttingen, 2004.

Цицерон, Cicero M. T. [106 – 43 до н. э.] (1991), *Über die Wahrsagung*. München – Zürich.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1973a), Finite random sums. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 9, pp. 275 – 305.

--- (1973b), Mathematical treatment of astronomical observations. Там же, т. 11, с. 97 – 126.

--- (1980), On the history of the statistical method in biology. Там же, т. 22, с. 323 – 371.

--- (1982), On the history of medical statistics. Там же, т. 26, с. 241 – 286.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007a), *Вторая хрестоматия по теории вероятностей и статистике.* Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007b), Третья *хрестоматия по теории вероятностей и статистике.* Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007c), *Статьи по истории теории вероятностей и статистике.* Берлин. Также www.sheynin.de Содержит, в частности, перевод нашей статьи 1982 г.

Anonymous (1839), Introduction. *J. Stat. Soc. London*, vol. 1, pp. 1 – 5.

Arnauld A., Nicole P., Арно А., Николь П. (1662), *L'art de penser. La logique de Port-Royal*. Paris, 1992. *Логика или искусство мыслить*. М., 1991.

Augustinus [354 – 430] (1952), *The City of God*. В книге *Great Books* (1952, vol. 18, pp. 129 – 618).

Bailey C. B. (1926), *Epicurus, the Extant Remains.* Oxford.

--- (1928), *The Greek Atomists and Epicurus.* Oxford.

Barrow I. [1630 – 1677] (1830), *Explanation of the Creed. Theological Works*, vol. 6. Oxford. Первая квалифицированная публикация этих трудов на основе рукописей: тт. 1 – 9, 1859 (Д. Т. Уайтсайд, статья об авторе в *Dict. Scient. Biogr.*).

Belvalkar S. K., Ranade R. D. (1927), *History of Indian Philosophy*, vol. 2. Poona.

Bernal J., Бернал Дж. (1954), *Science in History.* London, 1957. *Наука в истории общества*. М., 1956.

Bernoulli J., Бернулли Я. [1654 – 1705] (1713, латин.), *Искусство предположений*. Русский перевод частей 1 – 3: Бернулли (2006): *Искусство предположений, ч. 1 – 3*. Берлин. Также www.sheynin.de. Перевод части 4-й с комментариями в книге Бернулли Я. (1986), *О законе больших чисел*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., с. 23 – 59.

Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités.* Paris.

Borel É., Борель Э. (1914), *Le hasard.* Paris. *Случай.* М. – Пг., 1923.

Boyle R. [1627 – 1691] (1772), Some considerations touching the usefulness of experimental natural philosophy, Essay 4. *Works*, vol. 2. Bristol, 1999, pp. 36 – 49. Перепечатка издания 1772 г.

Brahe T. [1546 – 1601] (1591), Предисловие к книге своего ученика 1591 г. Перепечатка (англ.): Christianson (1968, pp. 316 – 318).

Brocard J. B. H. (1880), *Essai sur la météorologie de Kepler*, tt. 1 – 2. Grenoble. Содержит выдержки из *Bull. de la Soc. de statistique des sciences naturelles du départament de l'Isère.*

Buffon G. L. L., Бюффон Ж. Л. Л. [1707 – 1788] (1777), Essai d'arithmétique morale. *Ouvr. Philos*. Paris, 1954, pp. 456 – 488. Частичный перевод: Опыт моральной арифметики. В книге Шейнин (2007b, с. 93 – 125).

Bühler G. (1886), *Laws of Manu.* Delhi, 1967. Составлено в периоде между – II и II вв. (*Enc. Brit*., vol. 14, 1965, c. 812).

Byrne E. F. (1968), *Probability and Opinion.* The Hague.

Cantor M. (1900), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 2. New York, 1965.

Cardano G. [1501 – 1576] (1953), Book on games of chance. В книге Ore (1953, pp. 181 – 241).

Carnap R. (1951), *Logical Foundations of Probability.* Chicago.

Caspar M. (1958), *Kepler.* Stuttgart.

Caspar M., von Dyck W. (1930), *J. Kepler in seinen Briefen*, Bde 1 – 2. München – Berlin.

Christianson J. (1968), Tycho Brage's cosmology from the *Astrologia* of 1591. *Isis*, vol. 59, pp. 312 – 318.

Cioffari V. (1935), *Fortune and Fate from Democritus to St. Thomas Aquinas.* New York.

Cliff N. (1972), Adverbs multiply adjectives. В книге Tanur (1972, pp. 176 – 184).

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

Crombie A. C. (1952), Avicenna's influence on the medieval scientific tradition. В книге *Avicenna: Scientist and Philosopher.* London, pp. 84 – 107.

David F. N. (1955), Dicing and gaming (a note on the history of probability). *Biometrika*, vol. 42, pp. 1 – 15. Перепечатка: Pearson & Kendall (1970, pp. 1 – 17).

--- (1962), *Games, Gods and Gambling*. London.

Darwin C., Дарвин Ч. (1859), *Origin of Species.* Cambridge, Mass., 1964. [Manchester, 1995]. *Происхождение видов.* М., 1952.

De Moivre A. (1718), *Doctrine of Chances*. London, 1738, 1756. Перепечатка последнего издания: Нью-Йорк, 1967.

De Morgan A. (1845), Theory of probabilities. *Enc. Metrolopitana*, vol. 2. London, pp. 393 – 490.

Descartes R., Декарт Р. [1596 – 1650] (1637), Discours de la méthode. *Œuvres*, t. 6. Paris, 1982, pp. 1 – 78. *Рассуждение о методе.* М., 1953.

--- (1664), Le monde ou traité de la lumière. *Œuvres*, t. 11. Paris, 1986, pp. VIII – XXIV + 1 – 118. Трактат о свете. *Избр. Произв.* Б. м., 1950, с. 171 – 255.

Diderot D. [1713 – 1784] (1746), Pensées philosophiques. *Oeuvr. Compl.*, t. 1. Nendeln, Liechtenstein, 1966, pp. 124 – 155. Перепечатка издания 1875 г.

--- (1754), De l'interpretation de la nature. *Oeuvr. Compl.*, t. 2. Nendeln, Liechtenstein, 1966, pp. 1 – 62.

--- (1765), Induction. *Oeuvr. Compl.*, t. 15. Nendeln, Liechtenstein, 1966, pp. 206 – 216.

Engels F., Энгельс Ф. (1925; написана в основном в 1873 – 1882 гг.), *Dialektik der Natur.* Berlin, 1958. *Диалектика природы.* М., 1955.

Franklin J. (2001), *The Science of Conjecture.* Baltimore – London.

Gadol Joan (1969), *L. B. Alberti, Universal Man of the Early Rennaissance.* Chicago.

Galen C. [129 – 201 (?)] (1946), *On Medical Experience*. London.

--- (1951), *Hygiene.* Springfield, Illlinois.

--- *On Natural faculties*. В книге *Great Books* (1952, vol. 10, pp. 167 – 215).

--- (1971), *О назначении частей человеческого тела*. М.

Galilei G., Галилей Г. [1564 – 1642] (1613, итал.), History and demonstrations concerning sunspots and their phenomena. В книге автора *Discoveries and Opinions*. Garden City, N. Y., 1957, pp. 88 – 144.

--- (1623), The Assayer. В книге Galilei G., Grassi H., Guiducci M., Kepler J. (1960), *Controversy on the Comets of 1618.* Philadelphia, pp. 151 – 336.

--- (опубл. 1718, итал.), Рассуждения об игре в кости. Перевод с англ. перевода, опубликованного в книге David (1962, pp. 192 – 195). В книге Шейнин (2007а, с. 21 – 24).

Gini C. (1946), Gedanken zum Theorem von Bernoulli. *Schweiz. Z. f. Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg, pp. 401 – 415.

Great Books (1952), *Great Books of the Western World.* Chicago, vols 1 – 54.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

Harvey W. [1578 – 1657] (1651, латин.), Anatomical exercises on the generation of animals. В книге *Great Books* (1952, vol. 28, pp. 329 – 496).

Hegel G. W. F., Гегель Г. В. Ф. (1812), *Wissenschaft der Logik.* Berlin, 2002. *Наука логики*, тт. 1 – 2. М., 1970 – 1971.

Hellman C. D. (1970), Brahe. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 2, pp. 401 – 416.

Helvetius C. A., Гельвеций К. А. [1715 – 1771 (?)](1772), Le vrai sens du système de la nature. London.

--- (1773), *De l'homme. Oeuvr. Compl.*, tt. 1 – 2. Paris, 1989. *О человеке. Соч.*, т. 2. М., 1974, с. 7 – 568.

Hippocrates [460 – 377 до н. э.] (1952a), Of the epidemics. В книге *Great Books* (1952, vol. 10, pp. 44 – 63).

--- (1952b), On fractures. Там же, с. 74 – 91.

--- (1952c), On the articulations. Там же, с. 91 – 121.

--- (1952d), Aphorisms. Там же, с. 131 – 144.

Hobbes T., Гоббс Т. [1588 – 1679] (1646), *Of Liberty and Necessity. English Works*, vol. 4. London, 1840, pp. 229 – 278. Также отдельная брошюра Kiel, 1938. О свободе и необходимости. *Избр. Произв.*, т. 1. М., 1965, с. 517 – 560.

--- (1665), *Elements of philosophy. Engl. Works*, vol. 1. London, 1839. *Основы философии*, ч. 1.Там же, с. 49 – 214.

d'Holbach P. H. T., Гольбах П. А. [1723 – 1789] (1770), *Système de la nature. Oeuvr. Philos.*, t. 2. Paris, 1999, pp. 163 – 643. *Система природы. Избр. Произв.*, т. 1. М., 1963.

--- (1772), *Le bon sens. Oeuvr. Philos.*, t. 3. Paris, 2001, pp. 221 – 340. *Здравый смысл.* В книге *Письма к Евгении; Здравый смысл.* М., 1956, с. 243 – 433.

Hume D., Юм Д. [1711 – 1776] (1740), *Treatise on Human Nature*, vol. 1. London, 1874. Трактат о человеческой природе, ч. 3 из кн. 1. *Соч.* М., 1966.

--- (1777), Enquiry concerning the human understanding. Oxford, 1902.

Huygens C., Гюйгенс Х. [1629 – 1695] (1657), De calcul dans les jeux de hasard. *Oeuvr. Compl.*, t. 20. La Haye, 1920, pp. 49 – 91. Этот трактат Я. Бернулли включил в ч. 1 своего *Искусства предположений.*

--- (1698), *Cosmotheoros. Oeuvr. Compl.*, t. 21. La Haye, 1944, pp. 653 – 842. *The Celestial Worlds Discovered* (1698). London, 1968. *Книга мирозрения*, 1717 и 1724.

Judicium (1870), Judicium matris Kepleri. В книге Kepler J. *Opera Omnia*, t. 8, pt. 1. Frankfurt a. M., pp. 361 – 562.

Junkersfeld Julienne (1945), *The Aristotelian – Thomistic Concept of Chance*. Notre Dame, Indiana.

Kant I., Кант И. [1724 – 1804] (1755), *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. Ges. Schriften*, Abt. 1, Bd. 1. Berlin, 1910, pp. 215 – 368. *Всеобщая естественная история и теория неба. Соч.*, т. 1. М., 1963, с. 117 – 262.

--- (1763), *Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Dasein Gottes*. Там же, т. 2. Берлин, 1912, с. 63 – 163. Единственно возможное основание для доказательства бытия бога. Там же (1963), с. 393 – 508.

--- (1781), *Kritik der reinen Vernunft*. Там же, т. 3. Берлин, 1911. Весь том. *Критика чистого разума. Соч.*, т. 3. М., 1964.

Kendall M. G. (1956), The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, vol. 43, pp. 1 – 14. Перепечатка: Pearson & Kendall (1970, pp. 19 – 34).

Kendall M. G. & Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.

Kepler J. [1571 – 1630] (1596, 1621), *Mysterium Cosmographicum. Ges. Werke*, Bd. 1. Berlin – München, 1938, pp. 3 – 80, изд. 1-е, и Bd. 8. München – Berlin, 1963, pp. 9 – 128, изд. 2-е. Нем. перевод (оба издания): *Weltgeheimnis*. Augsburg, 1923. [München – Berlin, 1936.]

--- (1601, латин.), On the certain foundation of astrology. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, vol. 123, 1979, pp. 85 – 116.

--- (1604, латин.), Thorough description of an extraordinary new star. *Vistas in Astronomy*, vol. 20, 1977, pp. 333 – 339.

--- (1606, латин.), *Über den Neuen Stern im Fuß des Schlangenträger*. Würzburg, 2006.

--- (1609, латин.), *New Astronomy.* Cambridge, 1992.

--- (1610, нем., с латин. вставками), *Tertius interveniens. Ges. Werke*, Bd. 4. München, 1941, pp. 149 – 258.

--- (1618 – 1621, латин.), *Epitome of Copernican Astronomy*, books 4 – 5 (1620 – 1621). В книге *Great Books* (1952, vol. 16, pp. 845 – 1004).

--- (1619, латин.), *Weltharmonik.* München – Berlin, 1939. *Harmony of the World.* Philadelphia, 1997.

--- (1627), *Tabulae Rudolphinae.* Англ. перевод предисловия: *Quarterly J. Roy. Astron. Soc.*, vol. 13, 1972, pp. 360 – 373.

Kruskal J. B. (1972), The meaning of words. В книге Tanur (1972, pp. 185 – 194).

Kruskal W. (1968), Statistics – the field. В книге Kruskal W., Tanur Judith M., редакторы, *Intern. Enc. of Statistics*, vol. 2. New York – London, pp. 1071 – 1093.

Lamarck J. B. [1744 – 1829] (1815), *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres*, t. 1. Paris.

Lambert J. H. [1728 – 1777] (1772 – 1775), Essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. et Belles Lettres Berlin*, pp. 327 – 342; 347 – 368.

Lancaster H. O. (1970), Problems in the bibliography of statistics. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. A133, pp. 409 – 441.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1776), Recherches sur l'intégration des équations différentielles. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 69 – 197.

--- (1781), Sur les probabilités. *Oeuvr. Compl.*, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.

--- (1796), *Exposition du système du monde. Oeuvr. Compl.*, t. 6. Paris, 1884, с издания 1835 г. *Изложение системы мира.* Л., 1982.

--- (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей.* В книге *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1999, с. 834 – 863.

Leibniz G. W., Лейбниц Г. В. [1646 – 1716] (1710), Theodicee. Essai de Theodicée. *Phil. Schriften*, Bd. 6 (1885). Hildesheim, 1965, pp. 1 – 471. Отдельное название на с. 400 – 436: Remarque sur les Livre de l'origine du mal […]. Теодицея. Харьков, 1887 – 1892 (оттиски из *Веры и разума*).

--- (1765), *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand.* Frankfurt a. M., 1961. *Новые опыты о человеческом разуме.* М.– Л., 1936.

Leonardo da Vinci [1452 – 1519] (1939), *Scritti letterari, Literary Works*, vol. 1. London.

McLearn I., Morant G. M., Pearson K. (1928), On the importance of the type silhoutte etc. *Biometrika*, vol. 20B, pp. 389 – 400.

Nagel E. (1939), *Principles of the theory of probability. Intern. Enc. of Unified Science*, vol. 1, No. 6. Весь выпуск. Chicago.

Niewentit B. [1654 – 1718] (1718 – 1719), *The Religious Philosopher*, vols 1 – 2. London.

Ore O. (1953), *Cardano, the Gambling Scholar.* Princeton.

Oresme N. [1323 – 1382] (1966), *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientis*. Madison.

Pascal B. [1623 – 1662] (1963), *Pensées. Oeuvr. Compl.*, t. 2. Paris, 2000, pp. 543 – 1046. *Мысли.* М., 1899.

Pearson K. (1924), *Life, Letters and Labours of F. Galton*, vol. 2. Cambridge.

Pearson K. & Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London.

Poincaré H., Пуанкаре А. (1896), *Calcul des probabilités.* Paris, 1912. *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.

Pollock F. & Maitland F. W. (1898), *History of English Law before the Time of Edward I*, vols 1 – 2. Cambridge. [Cambridge, 1952.]

Rabinovitch N. L. (1973), *Probability and Scientific Inference in Ancient and Medieval Jewish Literature*. Toronto.

Russel B. (1962), *History of Western Philosophy*. London.

Sambursky S. (1956), On the possible and probable in ancient Greece. *Osiris*, vol. 12, pp. 35 – 48. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 1 – 14).

Schoolcraft H. R. (1845), *Oneota*. New York – London.

Smith T. V., редактор (1956), *Philosophers Speak for Themselves*, vol. 1. Chicago.

Spinoza B., Спиноза Б. [1632 – 1677] (1663), *Principien der cartesischen Philosophie. Sämtl. Werke*, Bd. 4. Hamburg, 2005.

--- (письмо № 56, 1674), *Sämtl. Werke*, Bd. 6. Hamburg, 1977, с. 228.

--- (посм. 1677), *Die Ethik mit geometrischer Methode begründet. Sämtl. Werke*, Bd. 2. Hamburg, 1999. *Этика, доказанная в геометрическом порядке. Избр. Произв.* М., 1957, с. 359 – 618.

Tanur Judith M., редактор (1972), *Statistics: a Guide to the Unknown.* San Francisco.

Thomas Aquinas [1225 или 1226 – 1274] (1952), *Summa theologica*. В книге *Great Books* (1952, vols 19 – 20).

Tylor E. B. (1879), Ordeals and oaths. *Proc. Roy. Soc. Instn Gr. Britain*, vol. 8, pp. 152 – 166.

Voltaire [1694 – 1778] (прим. 1759), Chaîne des événements. *Oeuvr. Compl., Complete Works*, vol. 35. Oxford, 1994, pp. 522 – 528.

--- (1767), Homélies prononcées à Londres en 1765. Première homelie. *Oeuvr. Compl.*, t. 62. Oxford, 1987, pp. 427 – 447.

--- (1771), Lettres de Memmius a Cicéron. Lettre troisième. *Oeuvr. Compl.*, t. 28. Paris, 1879, pp. 440 – 463. Соответствующий том нового издания видимо еще не вышел в свет.

Wallace W. A. (1970), Aquinas. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 1, pp. 196 – 200.

Wilks S. S., Уилкс С. (1962), *Mathematical Statistics*. New York. *Математическая статистика*. М., 1967.

Wolfenden H. H. (1942), *Fundamental Principles of Mathematical Statistics.* Toronto.

Woolhouse W. S. B. (1873), On the philosophy of statistics. *J. Inst. Actuaries and Assurance Mag.*, vol. 17, pp. 37 – 56.

II

Ранняя история теории вероятностей

Archive for History of Exact Sciences, vol. 3, 1977, pp. 201 – 259

1. Введение

Элементы теории вероятностей возникли в период 1654 – 1713 гг., и наша статья в основном посвящена этому отрезку времени[1], т. е. переписке **Паскаля** и **Ферма** (п. 3) и **Гюйгенсу** (п. 4), однако, продолжая нашу прежнюю статью [I], мы в п. 2 описываем историю азартных игр, юриспруденции, страхования имущества и жизни, равно как и политическую арифметику. Наконец, в п. 5 мы сообщаем о результатах **Ньютона** и о его влиянии на статистику (и частично выходим из своих хронологических рамок).

Мы не рассматриваем лотереи; интересные задачи, связанные с ними, появились позже, и о соответствующих мемуарах **Эйлера** см. Шейнин (2007с, с. 284 – 286). Заметим, впрочем, что о знаменитой генуэзской лотерее написал уже **Николай Бернулли** (п. 2.2), а из ее позднейших комментаторов назовем Бирмана (1957).

Мы не смогли учесть всех впоследствии появившихся исследований Хальда (1990); это потребовало бы полной переработки текста и было бы затруднено еще и потому, что его книга предъявляет более высокие требования к читателям, а описываемые результаты разбросаны; к примеру, трудно собрать всё, сделанное Гюйгенсом.

Мы полностью или частично перевели некоторые сочинения, упомянутые ниже, см. аннотации к книгам Шейнин (2006; 2007a; 2007b) в библиографии. И, ссылаясь, например, на **Монмора** (1708/1713, с. xiii), т. е. на второе издание 1713 г. его книги 1708 г., мы могли добавить: перевод: Шейнин (2006, с. 56).

2. Возникновение вероятностных понятий в науке и обществе

2.1. Азартные игры. Уже в древности они способствовали распространению интуитивной идеи о вероятностных свойствах средних величин и предоставляли примеры для обоснования невозможности редких событий [I, п. 5].

Изучая их, **Паскаль** и **Ферма**, а позднее **Гюйгенс** и затем другие ученые, в том числе **Монмор** (1708)[2] и **Муавр** (1712), создали элементы теории вероятностей. Более того, пытаясь выяснить возможности возникающих построений (а также проверяя свои собственные способности), ученые обратили внимание на различные задачи, см. п. 4.2.2. Наконец, **Лейбниц** [I, п. 5] даже предположил, что эти игры могут быть использованы для усовершенствования “искусства изобретения”.

Всё это нетрудно понять: азартные игры и быть может только они могли в то время служить моделями для естественных и четко сформулированных вероятностных задач, к тому же они весьма интересовали общество. Гюйгенс (п. 4.1) предвидел, что теория вероятностей выйдет за пределы азартных игр и сам (правда, только в своей переписке, см. п. 4.2.3) применил ее при изучении смертности. И всё же заметим, что у **Якоба Бернулли** (1713) азартные игры, хоть и занимали большую долю его сочинения, не имели серьезного значения. После Муавра их роль, возможно, уменьшилась, но и сейчас они методически весьма полезны.

Описывая раннюю историю игр, Кендалл (1956/1970, с. 26) заметил, что “к концу XV в. были заложены основы учения о случае и явно введены понятия совершенной игральной кости и равных частостей появления события”. Трудно согласиться с первой половиной его заключения: требовались еще понятия вероятности и ожидания. Почему же, спрашивает Кендалл, теория вероятностей не возникла в то время? Перечисляя несколько возможных причин[3], он (с. 30) заключает, что склонен искать объяснение задержки “в религиозных и моральных учениях и препятствиях”. Можно сказать определеннее: в препятствиях к осмысливанию понятий случайности и вероятности. Даже в XVII в. философы, кажется, не отошли полностью от древних воззрений на них.

Далее, можно ли представить себе, что, например, трактат, подобный сочинению Гюйгенса 1657 г., появился на столетие раньше? Мы полагаем, что нет (но не из-за указанных препятствий). Именно с XVII в. началось новое время и в обществе, и в науке, научные сообщества стали влиятельными и усилилась научная переписка (вспомним Паскаля и Ферма!). Именно эти причины и способствовали появлению теории вероятностей, см. пп. 3 и 4.

Одной старинной задачей, восходящей по меньшей мере к 1380 г. (Оре 1960, с. 414), был раздел ставки между двумя игроками, которые решили прекратить игру после счета a:b, хотя и договорились вначале, что ставки достанутся тому, кто выиграет n партий ($n > a, b$). Ее рассматривали **Кардано, Тарталья** и Певероне[4] (1509 – 1559), и в 1558 г. последний (Кендалл 1956/1970, с. 27) правильно решил ее в одном частном случае, – или в двух, если не считать допущенного им просчета[5]. Мы вернемся к азартным играм в п. 3.

2.2. Юриспруденция. Начиная примерно со второй половины XVII в. значение гражданских дел, как нам представляется, сильно возросло, и судопроизводство вообще, а возможно и сама юриспруденция начали всё более явно применять вероятностные идеи. **Лейбниц** [I, п. 3.2] сообщил, что в этой науке существовала элементарная шкала вероятностных доказательств, а **Декарт** (1644/1978, ч. 4, § 205, с. 323) ввел

> *Моральную достоверность, достаточную для регулирования наших нравов, т. е. такую же высокую, как у вещей, по поводу которых мы в своей жизни совсем не привыкли сомневаться, хоть и знаем, что, строго говоря, они могут быть и ошибочны*[6].

Рассуждения о моральной достоверности встречаются в сочинении **Арно** и **Николь** (1662/1992, ч. 4, гл. 15)[7]. В частности, авторы применили ее в воображаемом примере с подкупленным нотариусом, который позднее повторил Якоб Бернулли (1713, ч. 4, гл. 3). Одна из глав рукописи Лейбница (1668 – 1669 ?) была посвящена вероятностным доказательствам и моральной достоверности. По меньшей мере в одном случае он (1960, с. 169) указал в 1693 г., что существуют

> *Три вида уверенности доказательств, – логическая уверенность, физическая уверенность или лишь логическая вероятность, и физическая вероятность. Пример* […] *третьей: южный ветер дождлив, что в большинстве случаев верно, хотя нередко и не сбывается.*

Лейбниц (1669 – 1670 (?), с. 453) также полагал, что “наука – это уверенное знание […], мнение – вероятное знание”, а на с. 457 добавил: “Уверенность – ясность истины”. Он (Couturat 1901, с. 238 – 244) подошел к мысли о желательности создания вероятностной логики от своих занятий юриспруденцией и богословием, подкрепленных изучением переписки Паскаля и Ферма, работ Гюйгенса, **Хюдде** и **де Витта**.

Монмор (1708/1713, с. xiii; Шейнин 2006, с. 56) имел в виду применить вероятность к политическим, экономическим или моральным темам:

> *Что мне препятствует, так это трудность, представившаяся при выборе предположений, которые смогли бы руководить мной и помогать мне в моих исследованиях.*

Одну подходящую гипотезу ввел **Даниил Бернулли** в 1738 г. в связи с моральным ожиданием.

Николай Бернулли (1709) посвятил свою диссертацию приложению теории вероятностей к юриспруденции. Она содержала:

1. Вычисление среднего ожидания жизни для различных возрастов на основе таблицы **Граунта** (п. 2.4.3) с рекомендацией применять его для подсчета стоимости пожизненных рент и оценки вероятности смерти безвестно отсутствующего[8].
2. Вычисление ожидаемых потерь в морском страховании.
3. Вычисление ожидаемого выигрыша в генуэзской лотерее.
4. Оценку истинности свидетельских показаний.

Особо заметим, что Николай Бернулли (1709/1975, с. 296 – 297; Тодхантер 1865, § 340, с. 195) определил ожидание срока жизни последнего оставшегося в живых из группы в n человек, которая, по предположению, вымирает за заданный промежуток времени. Предположив реализацию непрерывного равномерного распределения, он по существу вычислил ожидание соответствующей порядковой статистики. И это вычисление, см. Хальд (1990, с. 113 – 115), и введение указанного распределения таким образом впервые появились в опубликованной работе. Впрочем, можно было бы сразу сказать, что точка, соответствующая ожиданию последней порядковой статистики, находится на расстоянии $n/(n + 1)$ от начала исходного промежутка времени. Ср. соответствующее неверное мнение **Гюйгенса** в конце п. 4.2.3. Хальд указал, что задачу Николая (которая ныне называется задачей на размещения) содержалась в *Искусстве предположений* **Якоба Бернулли**. Точной ссылки он не привел, но вот она: Задача № 8 в ч. 3 (распределение фигурных карт в общей колоде).

Неясно, повлиял ли Николай Бернулли на юриспруденцию, но в любом случае его диссертация безусловно стала известной **Кондорсе, Лапласу** и **Пуассону**[9]. Вот, впрочем, утверждение Kohli (1975, с. 541):

> *Духовным отцом этого труда был несомненно Якоб. Николай перенес к себе целые разделы и из Дневника Якоба* [который вообще не предназначался к публикации] *и из его Искусства предположений. В других местах он подхватил и переработал лишь постановки вопросов и наметки Якоба.*

Коли затем цитирует Предисловие диссертации Николая:

> [Якоб] *побудил меня* […] *избрать приложение искусства предположений в юриспруденции.* […] *Я вижу, что таким образом могут быть решены многие исключительно важные вопросы, которые суды рассматривают почти ежедневно, особенно относящиеся к пожизненным рентам и объявлению безвестно отсутствующих умершими.*

2.3. Страхование имущества и жизни

2.3.1. Страхование имущества существовало уже в древности (Райхер 1947, с. 40, обратный перевод):

> *Две тысячи лет до н. э.*[…] *участники торговых караванов на Ближнем Востоке заключали соглашения о распределении убытков, понесенных от грабежей, воровства и потерь во время пути. И, в соответствии с Талмудом, подобные соглашения заключались в Палестине и Сирии.*

Такие соглашения, продолжает автор, заключались и между купцами, которые занимались морской торговлей вдоль побережья Персидского залива, в Финикии и Греции, а законы афинского политического деятеля Солона (между 640 и 635 – ок. 559 до н. э.) упоминали соглашения о распределении убытков в морской торговле, – и от грабежей пиратов, добавляет Райхер. В этих соглашениях не было вероятностных понятий, и они не предусматривали никакой системы предварительных платежей. Последние, видимо, возникли в европейских феодальных гильдиях, а в Японии – с XII в. (Noguchi 1925).

Морское страхование оказалось первой формой страхования имущества (Chaufton 1884, с. 349), и какая-то его система появилась в XIV в., а в XV в. были приняты важные установления о нем (там же, с. 350). Его формы, однако, не способствовали вероятностным рассуждениям. Одной из них было страхование в виде пари (Émerigon 1783, с. 4 и 6): “Отвратительно, что в этом случае желали гибели судна. […] В большинстве торговых центров страхование в виде пари было запрещено”. Подобная форма страхования видна в текстах Дигесты, т. е. в основной части византийской кодификации права, 533 (Chaufton 1884, с. 349): там “мы находим следующее условие*: Я обуславливаюсь, что ты даешь мне 100, если такой-то корабль не вернется из Азии* […]”.

Эта форма страхования “возобновлялась в различные периоды с неприятным упорством” (там же), и в XVI в. (с. 351) морское страхование “быстро выродилось в самую азартную игру”.

Другой формой страхования оказалась *бодмерея*, – вполне добропорядочная, но также примитивная, а именно ссуда под залог судна, возвращаемая при условии его благополучного возвращения**[10]**. Процентная ставка была значительно выше, чем для ссуд вообще (Хендрикс 1852 – 1853, с. 127 – 131; Райхер 1947, с. 68 – 70)**[11]**.

Chaufton (1884, с. 349) всё же утверждает, к сожалению бездоказательно, что

> *В Средние века впервые поняли, что риск является реальностью, который можно полностью отделить от всего сопутствующего ему, чтобы установить его надлежащее значение.*

Риск, конечно же, понимался; Хендрикс (с. 141 – 142) ссылается по этому поводу на речь Лорда Бэкона, отца Фрэнсиса Бэкона, 1558 г.: “Разве разумный купец не отдает часть при каждом рискованном предприятии, чтобы застраховать остальное?” Он же цитирует первый английский законодательный акт № 12 о страховании 1601 г.**[12]**:

> *С незапамятных времен купцы и нашего королевства, и других наций при всяком крупном рискованном предприятии* […] *отдавали какую-то сумму денег другим,* […] *чтобы застраховать у них свое имущество, товары, корабли и поставленное на риск.* […] *Этот вид сделок обычно называется полисом страхования.*

Основной текст этого акта был посвящен спорам о заключенных полисах.

2.3.2. Страхование жизни

> *Полис на человеческую жизнь определяется как любой документ, который либо обеспечивает уплату денег в случае смерти или любого* [обусловленного] *случая, связанного с человеческой жизнью, либо обосновывает уплату* [страховой] *премии на срок, зависящий от человеческой жизни* (*Enc. Brit.*, т. 13, 1965, с. 1091 из статьи Страхование жизни).

Другая упомянутая форма – это пожизненная рента для одного человека или группы людей, в частности для тонтины (см. ниже)**[13]** или для супругов, рента которым выплачивалась до конца жизни последнего из них. Тот же автор продолжает (с. 1094): “Уплата определенных сумм в случае смерти взамен некоторых периодических взносов имела место в римских коллегиях (союзах ремесленников)”. Это, возможно, не противоречит мнению другого автора (Chaufton 1884, с. 348): “Полное доказательство того, что римляне не знали страхования, состоит в том, что о подобных договорах нет ни единого слова в сочинениях их правоведов”. В любом случае, представляется, что впоследствии система периодических взносов вышла из употребления. Так (Райхер 1947, с. 61), в XIII в. датские гильдии предоставляли страхование с последующим распределением убытков (например, от кораблекрушения или уплаты выкупа за освобождение из плена).

В Средневековье (там же) гильдии таким образом покрывали страхованием весьма разнообразные случаи, включая “непосредственно относящиеся к личности” своих членов; в 1284 г. (с. 62) одна из английских гильдий уплачивала страховку своим членам при неизлечимой болезни и слепоте.

По поводу страхования от несчастных случаев и болезней Guy (1885, с. 74) сообщает, не разъясняя, правда, систему платежей:

> *Мы* [в Англии] *начали заниматься этим примерно в середине XVI в. (1560 г.), тогда как в Италии этот цивилизованный вид страхования практиковался уже в конце XII в.*

Страхование жизни постепенно вышло за пределы гильдий[14]. Вот сообщение анонимного французского автора XVI в. (Хендрикс, с. 228):

> *Паломники, направляющиеся к святым гробницам в Иерусалиме или в иные дальние путешествия, могут застраховаться для выплаты выкупа* [из плена]. *Другой вид страхования имеется у других наций на случай смерти в пути.* […] *Все эти договоренности запрещены.*

Запрещались, видимо, ввиду азартного характера страхования[15]. Так, ссылаясь на многочисленные источники, Émerigon (1783, с. 198), указывает:

> *Эти виды не являются страхованием в собственном смысле, они – истинные пари.* […] *Эти пари* […] *запрещены в Голландии и во многих других странах* […] *и уже давно – во Франции.*

И амстердамский ордонанс (указ) 1598 г. (Хендрикс, с. 229) “прямо [запретил] страхование жизни любого человека, равно как и пари по поводу любых путешествий”. Аналогичные запреты (там же) содержались в роттердамских ордонансах 1604 и 1635 гг., в Морском ордонансе Луи XIV (1681 г.) и в ряде нидерландских ордонансов 1570 – 1635 гг., а генуэзский законодательный акт 1588 г. (Кендалл 1956/1970, с. 32) запретил страхование жизни “без разрешения Сената”.

Некоторые сведения, приведенные выше, наводят на мысль, что страхование жизни вполне могло возникнуть под влиянием морского страхования (п. 2.3.1)[16]. Многочисленные запреты препятствовали страхованию жизни во второй ее форме, но представляется, что пожизненные ренты (за исключением групповой в форме тонтин) никогда не запрещались[17], и существовали они даже в древнем Риме (Хендрикс, с. 224):

> *По крайней мере примерно во время разделения Империи* [она окончательно разделилась в 395 г.] *римские юристы сочли необходимым составить таблицу стоимости пожизненных рент для выполнения требований* […] *закона, который не разрешал завещателям оставлять более 3/4 имущества кому-либо кроме своих законных наследников.* […] *Один из наиболее выдающихся комментаторов юстинианского кодекса,* […] ***Ульпиан** (170 – 228), составил таблицу оценок современной стоимости* […] *пожизненных рент.*

Его таблица была основана на ожиданиях срока жизни (Табл. 2.1), которую он (Хендрикс, с. 224 – 225) быть может вычислил

> *Справляясь с результатами подобных договоров о пожизненных рентах или по данным о смертности в различных возрастах. Наиболее вероятно, что был возможен первый метод, но и второй был вполне возможен как основа для приближенных вычислений, потому что имеются многочисленные сведения о своего рода регистрации смертей у древних.*

Табл. 2.1. Ожидаемый срок жизни по Ульпиану
(Хендрикс, с. 225)

0-20	30	41-42	18	47-48	12
20-25	28	42-43	17	48-49	11
25-30	25	43-44	16	49-50	10
30-35	22	44-45	15	50-55	9
35-40	20	45-46	14	55-60	7
40-41	19	46-47	13	60- ...	5

Наименование столбцов.
1, 3, 5. Возраст. 2, 4, 6. Ожидаемый срок жизни.

Впрочем, Гринвуд (1940; 1941 – 1943/1970, с. 67) утверждает, что Ульпиан вовсе не основывался на статистических данных, а Seal (1954) не считает таблицу Ульпиана существенной. Но в любом случае (и даже учитывая, что ожидаемый срок жизни по Ульпиану мог и не совпадать с его нынешним пониманием) его таблица явилась высшим методологическим достижением статистики населения вплоть до XVII в., см. также п. 2.4.1. К сожалению, ввиду общих условий развития общества и науки про нее забыли.

В более поздние времена пожизненные ренты известны по крайней мере с XIV в.[18] На основе голландских источников 1670 – 1671 гг. Хендрикс (с. 112) заключил, что в то время и задолго до того стоимость ренты там обычно не зависела от возраста рантье, – видимо, из-за высокой смертности и в младенчестве, и в пожилых возрастах. **Хюдде**[19] (**Гюйгенс** 1888 – 1950, т. 7, с. 95 – 96) составил статистику лиц, с указанием продолжительности их жизни, “на которых правительство Объединенных провинций продало ренту в 1586 – 1590 гг.” Очень большую группу этих лиц составляли дети в возрасте от двух до семи лет. И всё же стоимость ренты в Голландии в 1672 – 1673 гг. зависела от возраста рантье (Commelin 1693, с. 1205)[20]. Другой вопрос, способствовало ли это статистическим исследованиям смертности, см. также п. 2.3.3.

Что же касается тонтин, то они воспринимались отрицательно и не были распространены (Хендрикс, с. 116):

У нас в Англии существует такое сильное предубеждение против тонтин, возможно основанное на разумном предположении о том, что они слишком эгоистичны и рискованны, так что их не следует поощрять.

То же чувствовалось во Франции (**Fourier** 1826/1890, с. 617 и 619):

Министр внутренних дел […] *пожелал, чтобы Академия наук назначила* […] *комиссию для исследования положений, которые регулировали бы интересы* [выгоды] *участников* [предположенной тонтины].

Тонтины способствуют двум пагубным склонностям: ожиданию от случая того, что должно быть плодом полезного для всех трудолюбия или обычного последствия существующих порядков, и желанию повысить личное благосостояние, оторвавшись от остального общества.

И вот дополнительное обстоятельство и вывод (с. 625 – 626 и 630). Правительство обратилось к Академии

с запросом о проекте учреждения кассы, называемой по имени Лафаржа[21]. […] *Академия представила отрицательное мнение. Мы нашли в наших архивах Отчет комиссии, назначенной для исследования этого вопроса и ее заключение 1790 г. Оно было подписано* ***Лапласом*** *(докладчик),* ***Вандермондом, Кулоном, Лагранжем*** *и* ***Кондорсе****.*

Академия может только отказаться от одобрения подобного неподобающего (irrégulier) учреждения, противоречащего точке зрения правительства и даже пожеланиям авторов проекта. Академия одобрила Отчет [1790 г.?, потому что (с. 629)] *вложение в тонтину намного менее благоприятно, чем обычный договор о пожизненной ренте.*

И все же тонтины существовали в XVII в.; во Франции – в 1689 и 1696 гг. (Хендрикс, 1863, с. 206 и 209) и Голландии в 1671 г. (**Struyck** 1739 или позже/1912, с. 226). Взнос во французские тонтины зависел от возраста рантье, указал Стрюйк (1752 или позже/1912, с. 405). Это условие заставляло учитывать какие-либо соображения о законе смертности, и в свою очередь тонтины доставляли статистические данные о смертности[22]. Хендрикс (с.

116) предположил, что собранные таким образом данные были использованы при составлении некоторых таблиц смертности.

Общества, предоставлявшие страхование жизни во второй форме, появились в XVIII в. Более ранние, по мнению Кантора (1898, с. 100), таковыми не были:

> *Фирму, возникшую в 1699 г. в Англии под названием Society of Assurance* [Общество страхования] *для вдов и сирот* […], *нельзя считать обществом страхования жизни в современном смысле.*

Другой автор (*Enc. Brit.*, vol. 13, 1881, с. 180), правда, утверждает, что первым таким обществом было Amicable Society (1706)**[23]**, но указал, что до XVIII в. страхование жизни во второй форме в основном покрывало случаи временного характера и притом лишь на короткие сроки. Он добавил:

> *Страховые премии были очень высокими, но это было частично необходимо, потому что, во-первых, не было достаточно данных для оценки риска, и, во-вторых, сделок по страхованию, видимо, было недостаточно, чтобы обеспечить какое-то подобие устойчивого среднего в предъявлении страховых требований.*

Эти две причины, надо полагать, частично поясняют, почему страхование жизни во второй форме не было достаточно развито**[24]**, т. е. указывают, что деятельность таких обществ в то время мало способствовала развитию вероятностных идей и понятий. Иное заявил Мрочек (1934, с. 50):

> *Ни акционерные общества, ни банки, ни биржи не нуждались в теории вероятностей. Спрос на нее появился у перечисленных учреждений лишь в XIX в., когда методы открытого грабежа сменились методами научного выигрыша.*

Действительно, имеется достаточно свидетельств подобного рода, относящихся к XVIII и XIX вв.**[25]**

2.3.3. Памятная записка де Витта (1671). Для обеих форм страхования жизни исходные статистические данные и методы вычисления вполне могли считаться коммерческой или даже государственной тайной. Это по крайней мере очевидно в случае *Записки* видного математика и государственного деятеля де Витта**[26]**. В этой *Записке*, адресованной членам правительства Республики объединенных провинций**[27]**, он попытался обосновать возможность повысить стоимость пожизненных рент, продаваемых государством. Приняв определенные предпосылки, равно как и скидку в 4% в год, – точнее, в ($\sqrt{1.04}$ – 1) 100% в полугодие, – для перехода к современной стоимости ренты, он (Хендрикс, с. 234) “математически […] доказал, что […] пожизненные ренты должны продаваться из расчета ее выплаты в течение 16 лет”.

Табл. 2.2. Таблица де Витта (1671, с. 16 – 20). Вычисление стоимости пожизненной ренты. Номинальная годичная рента 20x10^6 стюйверов

Шансы	Получить сумму	Полугодие	Шансы	Получить сумму	Полугодие
1	9,805,807	1	2/3	455,999,472	119
1	19,421,192	2	1/2	456,950,076	120
1	432,490,825	99	1/2	471,881,080	139
2/3	433,897,951	100	1/3	472,523,275	140
			1/3	479,820,563	153

За полугодия 1-99.... 28.15
110-119.... 8.91; 8.91 · 2/3 = 5.9
120-139.... 9.30; 9.30 · 1/2 = 4.6
140-153.... 6.67; 6.67 · 1/3 = 2.2

Полная сумма.................. 40.9
Сумма шансов 128
Средняя выплата 0.320

Последние три строки добавлены Хендриксом.

Де Витт продолжил таблицу до полугодия 200, а результаты вычислений он не округлял.

Наше примечание: числа 28.15 и 5.9 де Витт привел на своей с. 19 (с. 345 1975 г.), а числа 4.6 и 2.2 – на с. 20 (с. 346), все числа без округления.

Счет возрастов де Витт начал с трех лет. И вот его основные предположения (Хендрикс, с. 234):

Вероятность умереть в течение года или полугодия […] *для возрастов 53 – 63 года включительно не более, чем в 3/2 раза выше* [той же] *вероятности для* […] *энергичного периода жизни* [с трех до 53 лет. Для возрастов в 63 – 73 года эту вероятность] *нельзя оценить более, чем вдвое выше* […] *и более чем втрое выше* […] *для последующих семи лет.*

Эти вероятности (шансы) внесены в Табл. 2.2; суммы, получаемые рантье, учитывают скидку (см. выше) которая означает, что, к примеру,

$$19\ 421\ 192 = 10^7\sqrt{1.04} = 10^7(\sqrt{1.04})^2.$$

В приложении к основному тексту де Витт (1671, с. 23 – 24), см. также Хендрикс (с. 117 – 118), добавляет:

Я весьма тщательно извлек из записей Ваших светлостей несколько тысяч случаев, относящихся к лицам, на чью жизнь были куплены пожизненные ренты.

И, исследовав "намного более сотни различных классов, каждый из которых включал примерно сто лиц", он установил, что

В каждом из этих классов молодые рантье неизменно получали […] *более 16 флоринов за каждый флорин годичной ренты.* […] *И таким образом с удивлением обнаруживаешь, что фактически, если покупатель нескольких пожизненных рент разделит свой капитал* […] *на несколько молодых жизней – на десять, двадцать или более – он может быть уверен в получении без риска эквивалента, более чем в 16 раз превышающего купленную им ренту.*

О подобной же практике много позже сообщил Кондорсе (1785, с. 226). Хендрикс (с. 117) заметил, что проверить утверждение де Витта невозможно, но что во всяком случае

Пробные наблюдения и сбор указаний о смертности в различных возрастах и слоях общества были теми принципами, которые проницательные де Витт и ***Хюдде*** [официально заявивший о своем одобрении принципов вычисления де Витта] *признавали в качестве единственного истинного основания своих исследований.*

Утверждение де Витта о покупке нескольких рент относится к предыстории закона больших чисел (в форме **Пуассона**). **Якоб Бернулли** (1713, ч. 4, гл. 4) указал, что качественная форма этого закона была общеизвестна даже в жизни; впрочем, см. п. 2.4.4. Можно действительно пожалеть, что соответствующие вычисления де Витта пропали. Было бы, в частности, интересно узнать, как он распределял рантье в классы.

Изложение *Записки* (Eneström 1896/1897, с. 66)

Весьма неясно, и обычно ее плохо понимают [приведен пример]. *Де Витт говорит о риске смерти, но не указывает явно, что риск всегда относится к трехлетнему ребенку. Напротив, он выражается так, что можно поверить, что риск смерти в период между x и x + 1 полными годами относится к человеку, возраст которого действительно равен x лет. Более того, он принял два различных предположения о числе смертей в течение полугодия* […]. *В своем изложении* […] *он предположил, что эти числа пропорциональны 1, 3/2, 2 и 3, но, применяя свой метод, он без единого пояснительного слова ввел гипотезу* [в соответствии с которой эти числа пропорциональны 1, 2/3, 1/2, и 1/3][28].

Для обоснования своего утверждения Энестрём составил две таблицы смертности на основании первого и второго предположений и заключил, что, выведя по своей начальной гипотезе слишком значительный средний срок жизни, де Витт перешел ко второму предположению. Вывод Энестрёма о фактически примененной второй гипотезе можно подтвердить весьма просто: в примечаниях к Табл. 2.2 сам де Витт указал числа 1, 2/3, 1/2 и 1/3.

В 1671 г. в письме Хюдде де Витт (Хендрикс, с. 109) четко сформулировал задачу о вычислении стоимости пожизненных рент на несколько жизней[29]. Пусть, рассуждал он, 8 человек прожили x_1, x_2, … x_7, x_8 лет, $x_1 < x_2 < … < x_7 < x_8$ (фактически он рассматривал числовой пример). Сочетания типа (x_i, x_j) при $i, j = 1, 2, …, 7, 8$ и $i < j$ представят все возможные варианты продолжительности жизни двух человек, так что в одном случае из $C_8^2 = 28$ последний остающийся в живых проживет до возраста x_2, в двух случаях – до возраста x_3, и т. д. и таким образом эта задача может быть решена, и аналогично можно исследовать случай ренты на троих и т. д. Пример де Витта был только методологическим, но он определил распределение одной из порядковых статистик (максимального члена выборки)[30].

Переписка де Витта с Хюдде позволяет понять, почему его *Записка* длительное время оставалась секретной. Вот начало его письма 2 авг. 1671 г. (Хендрикс, с. 101 и 102):

> *Я надлежащим образом уяснил себе оценку стоимости пожизненных рент на одну жизнь, вычисленную* [кем?] *на основе жизни и смерти 96 лиц.*
>
> *Я предоставляю на Ваше усмотрение* […] *решить, не окажется ли полезным для всеобщего блага, чтобы эта оценка оставалась совершенно секретной* […] *на пользу государственным финансам.*

Ученые всё-таки узнали про существование записки и по меньшей мере один из них (**Лейбниц**) видел ее[31]. 20 апреля 1704 г. **Якоб Бернулли** (Gini 1946, с. 406) написал ему:

> *Из твоего описания я заключаю, что* […] *исследование Иоганна* [*Яна*] *де Витта содержит вещи, которые особо послужили бы моей цели. Поэтому я прошу тебя одолжить мне как можно побыстрей твой экземпляр его книги* [*Записки*], *ибо я ведь тщетно пытался раздобыть ее в Амстердаме.*

В другом письме 28 февраля 1705 г. он (там же) повторил свою просьбу. Бернулли, конечно же, имел в виду как-то использовать результаты де Витта в своем не оконченном *Искусстве предположений*, но умер, так и не повидав их (и не окончив книги).

После трагической гибели де Витта его работу продолжил Хюдде (Hebrard 2004).

2.4. Политическая арифметика и статистика населения

2.4.1. До нового времени. Статистические данные, включая сведения о населении, собирались уже в древности; мы используем материал Федоровича[32] (1894, с. 7 – 21). В Китае, примерно в 2238 г. до н. э., была сделана попытка описать территорию страны и оценить ее население. Возможно, что в Египте, начиная с XXXV в. до н. э., проводились переписи и составлялись сведения о движении населения и о земельных угодиях. Первая достоверно известная перепись произошла там в XVI в. до н. э., учитывалась лишь каста воинов. Подсчет населения в Израиле описан в Ветхом Завете. Легендарный спартанский законодатель Ликург (IX – VIII вв. до н. э.) распределил землю между своими гражданами, что было бы невозможно без их подсчета. В Афинах велись записи рождений и смертей, и переписи имели место при Солоне (VII – VI вв. до н. э.) и Перикле (V в. до н. э.). Особо регистрировали рождение свободнорожденных и достижение ими 18-ти и 20-ти лет, что облегчалось жертвоприношениями богам по случаю рождений и смертей. В Риме велись списки граждан, способных носить оружие, и римлян, обладавших полными гражданскими правами, т. е. мужчин, достигших 20-ти и 30-ти лет соответственно, а **Ульпиан** составил таблицу ожидаемых сроков жизни (п. 2.3.2). **Аристотель** подробно описал греческие государства и города в своей *Политике*. И вот заключение (Федорович 1894, с. 15, обратный перевод):

> *Вряд ли можно согласиться с теми, кто полагает, что статистика* [государствоведение] *как наука была совершенно неизвестна древним и что ее создали только* ***Конринг*** *и* ***Ахенваль***.

Он (с. 17) ссылается на самого Конринга (см. п. 2.4.7), который назвал соавторами государствоведения Аристотеля, **Страбона** и **Птолемея**. Это не противоречит мнению Кендалла (1960/1970, с. 45):

> *Статистика, как мы ее понимаем, возникла лишь в* XVII *в., и притом не в* <u>*статистике*</u> [не в государствоведении], *но в политической арифметике. Феодальные государства средневековья просто не были заинтересованы в статистике в нашем смысле.*

Он продолжал (с. 46): даже в XV в. в Италии, при всех ее достижениях в бухгалтерском деле и математике, “подсчеты были сплошными и всё еще в основном являлись записью состояния, а не основой оценок или предсказаний для расширяющейся экономики”.

Статистические данные, собранные, например, в Риме или Афинах (см. также п. 2.3.2), могли бы привести к созданию элементов политической арифметики. Этого не произошло ввиду общих условий развития тогдашних цивилизаций, которые не нуждались в статистике населения.

2.4.2. Уильям Петти (1623 – 1687) ввел термин *политическая арифметика*. Описывая государства и отдельные города в своей *Политической арифметике,* он (1690/1899, т. 2, с. 244) отказался от применения “сравнительных и превосходных степеней” и решил выражать свои мысли “в терминах чисел, веса или меры”, применять “только доводы здравого смысла” и рассматривать “лишь такие причины, которые имеют видимые основания в природе”**[33]**.

Он (1927, т. 1, с. 171 – 172) даже предложил составлять “Всеобщий перечень людей, полей и торговли Англии” и, в частности, собирать сведения о “рождениях, женитьбах, погребениях, […] домах […], а также о людях по возрасту, полу, ремеслу, званиям и положению”. Гринвуд (1941 – 1943/1970, с. 61) заметил, что подобный *Перечень* “включал бы больше сведений, чем собирает наше General Register Office”.

Строго говоря, ни Петти, ни, как представляется, его последователи так и не оставили определения политической арифметики, но в соответствии с духом его сочинений можно сказать, что ее целью было социально-экономическое изучение государств и отдельных городов или районов при помощи (изрядно ненадежных) статистических данных о населении, промышленности, сельском хозяйстве, торговле и т. д. Так, Петти (1691/1899, т. 1, с. 108) оценил богатство Англии по стоимости

Домов, судов, скота, золота и серебра в монетах, земли, и стоимости населения. […] *Население, приносящее лишь 15 миллионов дохода, стоит 250 миллионов* [в 16.7 раз больше] *и тогда то, которое приносит 25, стоит 416* 2/3.

Можно возразить против приравнивания населения богатству, но во всяком случае его вычисления соответствовали принципу статистики, – науки, которая пришла на смену политической арифметике, – в том, что труд каждого оценивался одним и тем же образом.

По меньшей мере до середины XIX в. наиболее важной отраслью политической арифметики оставалась статистика населения, а в ней самой, с нашей точки зрения, – проблемы смертности ввиду их связи со страхованием жизни и институтом пожизненных рент (пп. 2.3.2 – 2.3.3). Основатели политической арифметики (см. также п. 2.4.3), конечно же, еще не смогли подметить значимость страхования жизни ни для общества, ни для математики (теории вероятностей)[34].

Биографию Петти (и **Граунта**) и описание их трудов можно найти у Гринвуда (1941 – 1943), но мы добавим кое-что еще. Среди рукописей Петти (1927) к политической арифметике относились по меньшей мере 30. Одна из остальных (т. 2, с. 10 – 15, выдержка со с. 15), см. также его письмо 1687 г. (Петти 1928, с. 318 – 322), была посвящена алгебре, которая

Пришла из арабских стран с маврами в Испанию, а оттуда сюда, и У. П. [Уильям Петти] *применил ее вне чисто математической области, а именно к политике под названием политической арифметики посредством сведения многих терминов к числу, весу и мере, чтобы их можно было рассматривать математически.*

Алгебра, как утверждал Петти (с. 10), – это “вид логики”; в ней (с. 14)

Алгоритм – это инструмент, множество аксиом – материал. Опыт и хорошая голова – мастерство. Выявление *труднопостигаемых истин – работа, а вывод бесконечно многих истинных следствий из нескольких истин без перепутывания при этом метода подсчета – превосходство.*

Это подчинение алгебры логике и мысли о весьма общих вопросах выявляет Петти как философа науки, родственного его младшему современнику – **Лейбницу**. Действительно, среди этих вопросов (Петти 1927, т. 2, с. 39 – 42) можно найти и такие (с. 39 – 40):

Что является общей мерой времени, пространства, веса и движения. Какое число основных звуков или букв […] *составит речь или язык? Как назначать имена и как складывать и вычитать ощущения и оценивать вес и силу слов; всё это является логикой и рассуждением*[35].

Можно только сказать, что "всё это" вовсе не является логикой. Второй раздел *Вопросов* (с. 40) озаглавлен: "Какие установления для женитьбы оказались бы наилучшими для производства потомства?" И здесь, и в других рукописях, имея в виду размножение рода человеческого, Петти ратует за улучшение биологических условий его существования. Ту же тему он (1928) затрагивает в своей переписке 1685 г. Так (с. 148 и 154),

Из почета Бога и для пользы человечеству мир должен быть полностью и быстро заселен, а возражения против этого можно отложить на тысячу лет [!]. *Чем больше населения в любой стране, тем ценнее каждый житель.*

Пока мы не увидим, что Земля заселена (притом возможно, что 3/4 не заселено), можно сомневаться, что вся она, равно как и звезды были созданы для человека. И если не знать, для чего еще она была предназначена, можно ошибочно заключить, что она произошла случайно, а не по замыслу бесконечной мудрости[36].

Размножение человечества оставалось важной темой в XVIII в. (Зюссмильх)[37]. На с. 155 Петти не забыл добавить, что

Английскому королю принадлежит больше ненаселенной земли […], *чем большинству других князей. Поэтому, когда вся земля будет заселена, его доля окажется большей, чем сейчас.*

Упомянем еще два источника, хоть они и не связаны с политической арифметикой. Один из них (Петти 1927, т. 2, с. 8 – 9) очевидно представлялся автору программой для обучения молодых людей. Он упомянул алгебру (и нескольких ученых от **Виета** до **Валлиса**), геометрию, шахматы, азартные игры и даже охоту и рыбную ловлю. Второй источник (Петти 1662/1899, т. 1, с. 64) – это рассуждение о лотереях, о которых впоследствии крайне отрицательно высказались **Кондорсе** (1788, с. 388) и **Лаплас** (речь 1819, перевод: Шейнин 2007а, с. 141 – 143): лотерея – это "по сути налог на несчастливых самонадеянных дураков".

2.4.3. Джон Граунт (1620 – 1674) был соавтором политической арифметики. Долгое время его *Наблюдения* (1662) приписывались **Петти**, однако Халл, редактор сочинений Петти (1899), заметил в т. 1, на с. LII, что

> *Петти быть может предложил тему исследования* […], *вероятно помогал тут и там, комментируя медицинские и иные вопросы* […], *предоставил* [некоторые] *числовые данные* […] *и возможно подправил или даже написал Заключение*[38].

Граунт сумел использовать отрывочные статистические данные своего времени для общих количественных оценок населения Лондона и Англии и влияния различных заболеваний на смертность, см. также п. 2.4.5. В частности (гл. 8), он заметил, что в Лондоне на 13 женщин приходилось 14 мужчин (что, однако, не соответствовало его же данным в той же главе о количестве погребений тех и других с 1628 по 1662 гг.). Он, далее, указал, что, поскольку мужчины чаще умирают насильственной смертью и путешествуют, а часть из них остается холостыми “как члены [религиозных ?] колледжей и подмастерья старше 18 лет, […] то каждая женщина может иметь мужа без допущения многоженства”.

В гл. 11 Граунт оценивал население Лондона, и вот один из его методов (с. 68 – 69/2005, с. 74 – 75):

> *Я предположил, что в квадрате 100 на 100 ярдов может проживать около 54 семей.* [Число таких квадратов] *внутри городских стен составляет 220. Но поскольку там ежегодно умирает около 3200 человек, а всего в Лондоне – 13 тысяч, то оказывается, что внутри стен проживает четверть всех жителей и что, следовательно, в Лондоне и возле него 47 520 семей.*

Знаменитая таблица продолжительности жизни Граунта (Табл. 2.3), составленная по бюллетеням о смертности, находится в той же гл. 11 (с. 69/с. 75 – 76).

Табл. 2.3. Таблица продолжительности жизни
(Граунт 1662/2005, с. 75 – 76)

Из 100 в первые шесть лет умирает	36
В течении следующего десятилетия	24
Во второе десятилетие	15
В третье десятилетие	9
В четвертое	6
В следующее	4
В следующее	3
В следующее	2
В следующее	1
Из указанной сотни живорожденных в живых после окончания шести лет остается	64
В конце шестнадцати лет	40

В двадцать шесть	25
В тридцать шесть	16
В сорок шесть	10
В пятьдесят шесть	6
В шестьдесят шесть	3
В семьдесят шесть	1
В восемьдесят шесть	0

Сведения о возрасте умирающих почти отсутствовали, но статистическое чутье Граунта и его находчивость позволили ему (или быть может ему и Петти) придти к разумным выводам о смертности от различных болезней, включая детские. Пояснения Граунта (там же) известны, и к ним особенно подходит мнение Willcox, редактора позднейшего издания *Наблюдений* (Граунт 1662/ 1939, с. x и xiii):

> *Для обученного читателя Граунт сочиняет статистическую музыку; Петти похож на ребенка, забавляющегося новой музыкальной игрушкой, на которой он иногда испускает гармонические созвучия*[39].
>
> *Граунт остается в памяти главным образом потому, что он обнаружил* […] *равномерность и предсказуемость многих биологических явлений, рассматриваемых в массе.* […] *И таким образом он, скорее, чем кто-либо другой, оказался основателем статистики.*

Равномерность и предсказуемость означают здесь, что окончательные результаты исследования (как, например, таблицу Граунта) можно будет применять довольно долго, и Граунт так неявно и считал (см. ниже). Willcox (там же, с. xi) предположил, что саму таблицу составил Петти, который притом

> *Между прочим и характерным образом* [пренебрег] *теорией* [Граунта] *о том, что 7% доживает до 70 лет* […][40] *и без обоснования принял взамен, что 1% доживает до 76 лет, и менее 1% – до 86 лет.*

Как мы поняли, Willcox также решил, что Петти вычислил постоянный шанс умереть в течение 10 лет из уравнения

$$64(1-p)^7 = 1, \tag{2.1}$$

в котором 64 и 1 – это количества остающихся в живых (из 100) в возрастах 6 и 76 лет соответственно. Подходящий корень этого уравнения – $p = 0.4479$, тогда как составление таблицы Граунта объяснило бы значение $1 - p \approx 5/8 \neq 1 - 0.4479$. Птуха (1938, с. 71) принял именно такое значение для $(1 - p)$, но получил его произвольным образом как (64 – 1)/100.

Гринвуд (1941 – 1943/1970, с. 79) заметил, что смертность в старших возрастах у Граунта “в громадной степени выше”, чем по таблице Галлея (п. 2.4.5). Это так, но почему Гринвуд утверждает, что “выстрел [Граунта] не попал в яблочко”? Граунт во всяком случае изобрел таблицу продолжительности жизни, а точной она просто не могла быть.

Он сам (с. 70/с. 77) указал, что таблица позволяет установить число мужчин, способных носить оружие. Другие возможные приложения своего исследования он перечислил на с. 78 – 79/с. 86 – 87) в Заключении:

Истинная политика определяет, как сохранять граждан в мире и достатке […]. *Основа или элементы этой честной и безвредной политики это понимание земли и работников территории, которой следует управлять в соответствии со всеми ей присущими и случайными различиями.* […]
И не менее необходимо знать, сколько имеется жителей каждого пола, состояния, возраста, религии, ремесла, ранга или положения, ибо тем самым торговля и управление могут быть сделаны более определенными и регулярными. […]
Необходимо ли знание всего этого для многих, или подходяще ли оно для кого-нибудь, помимо монарха и его главных министров, я оставляю для рассмотрения [другим].

Последняя фраза означает, что статистика в те времена была существенно менее важна, чем в наши дни. И вот оценки сочинения Граунта. Первая содержится в письме **Гюйгенса** 1662 г. (т. 4, с. 149), остальные – сравнительно недавние (Птуха 1938, с. 67; Glass 1963, с. 13 – 14):

Трактат Гранта [!] *весьма достоин изучения и мне очень нравится. Он здраво и четко рассуждает, и я восхищаюсь тем, как он смог вывести все свои заключения из этих простых наблюдений, которые до него казались не нужными ни для чего.*

Три главные заслуги Граунта перед статистической наукой таковы: Он первым установил по статистическим материалам эмпирические законы, свойственные атипическим [?] *массовым явлениям; он указал, как можно и должно практически применять статистические данные после их критического исследования; он составил первую таблицу смертности* [продолжительности жизни].

Понятие таблицы продолжительности жизни было выдающимся новшеством, и Галлей нашел его готовым к применению. […] *Работа Граунта создала предмет статистики населения.* [Она] *внесла вклад в статистику вообще.*

2.4.4. Лейбниц. В собственно теории вероятностей Лейбниц занимался азартными играми, но не совсем удачно; он даже ошибся при подсчете вероятности бросков двух костей (Тодхантер 1865, с. 48)[41]. Далее, он [I, конец п. 5] считал желательным разрабатывать вероятностную логику и переписывался с **Якобом Бернулли**, обсуждая (снова неудачно) принципиальную возможность приложения статистических вероятностей.

Кратко опишем последнюю тему (Лейбниц 1686/1960, с. 288; письмо Якобу Бернулли 3 декабря 1703 г., Gini 1946, с. 405):

Их [случайных вещей] *полное доказательство превосходит всякое конечное понимание.*

Что зависит от бесконечного множества обстоятельств, не может быть определено конечным числом испытаний.

Подобные рассуждения можно найти у **Арно** и **Николя** (1662, 1992, гл. 15 части 4, с. 317 и 318):

Было бы несовершенством рассуждения представить себе, что наш конечный разум может сколь угодно [хорошо] *понять всё могущество Бога, которое бесконечно.*

Конечный разум не может по своей природе понять бесконечное.

Но во всяком случае наука вообще и математическая статистика в частности как раз и имеют дело с переходом от конечного известного к более обширному, но правда, тоже конечному. И, в чем Лейбниц был прав, статистика в принципе не может окончательно подтвердить гипотезу. Наконец, заметим, что в соответствии со своими общими философскими взглядами Лейбниц, видимо, доверял дедукции больше, чем индукции. Впрочем, см. ниже обсуждение его предложений, относившихся к медицине.

Лишь в письме 1714 г. Лейбниц (1887, с. 570) признал апостериорное оценивание вероятностей, к которому следует обращаться “при недостаточности априорных оснований”, но почему-то добавил: “Покойный месье Бернулли разрабатывал эту тему по моим увещеваниям”. Вот, действительно, вопрос Бернулли из его письма Лейбницу 3 октября 1703 г. (Gini 1946, с. 404): “Я очень хотел бы узнать, высокочтимый мастер, кто сказал тебе, что я занялся учением об оценке вероятностей”.

Политическая арифметика попала в поле зрения Лейбница. Его соответствующие рукописи были впервые опубликованы лишь в 1866 г., и их редактор О. Клопп (Лейбниц 1866, с. xxxviii) указал, что первые три из них “были написаны в восьмидесятые годы [XVII в.]” и что его *Опыт* (1680 – 1683) был откликом на *Политическую арифметику* Петти, про которую Лейбниц написал также “отдельные замечания и небольшие заметки”**[42]**. Одно такое замечание Клопп отыскал на отдельном листе и процитировал (с. xxxvii):

Все науки следует свести к фигурам и формулам, потому что многие вещи, которые нельзя выразить фигурами […], *по крайней мере подчиняются формулам, которые заменяют фигуры и облегчают воображение.*

И вот выдержки из рукописей (1680a/1986, с. 341; 1680b/1986, с. 377 – 378):

> *Я называю государственными таблицами краткую письменную сводку сути всех новостей, относящихся к правительству* […], *составленную таким образом, чтобы князь мог легко там найти всё для исследования при любом случае* […].
>
> *Особенно полезно было бы сравнение различных государств или мест, находящихся под единым управлением, и различных периодов одного и того же государства друг относительно друга*[43].

Там же (1680b/1986, с. 377, 378) Лейбниц упомянул “специальные” и “общие” регистрации (последние, возможно, и были *государственными таблицами*). Он (с. 380) указал на необходимость следовать примеру богословов и юристов, которые имеют, соответственно, Harmonias confessionum и Differentias variorum jurium. И Лейбниц (1682) составил (лишь начерно) список из 56 вопросов, который, видимо, характеризовал (часть?) программы деятельности специального учреждения[44]. Вот некоторые из них:

1. Число жителей.

4. Сколько женщин способны к деторождению.

21. Сравнение смертности и рождаемости.

26. Какова средняя плодородность хорошей пашни в течение примерно семи лет.

47. Точное описание всех ремесел и профессий[45].

Лейбниц (1680c/1986) уделял особое внимание медицине. По его мнению (с. 371) “в общем, юристов слишком много, а врачей нехватает”, учитывая, кроме того, всеобщую “слепоту”, при которой (с. 372) “большинство относится к здоровью так же, как к благочестию, никак не заботясь ни о том, ни о другом, пока ими не овладеет позднее раскаяние”.

В соответствии со своей общей точкой зрения, он (с. 372) рекомендует “составлять сводки уже имеющихся у нас наук, открытий, опытов и полезных мыслей, что позволит ограничить действие многих болезней”. Мало того (с. 375), следует записывать медицинские наблюдения:

> *Если каждый практикующий врач присоединит хоть один верный афоризм к гиппократовым или иным уже известным, мы продвинемся далеко вперед. Но под афоризмом я понимаю не каждый тезис, а те предложения, которые не проясняются разумом и не понятны сами по себе, но выявляются опытным путем, из старательных наблюдений.*

В целом эта рукопись (1680c) соответствовала мыслям политических арифметиков о необходимости улучшать условия жизни и тем самым способствовать заселению Земли (п. 2.4.2).

Лейбниц (с. 373) также рекомендовал учредить *Санитарную коллегию*, притом не только для надзора за продовольственными магазинами, пекарнями и пр. (с. 373 – 374):

> *Акты и архивы Санитарной коллегии могут и должны содержать, среди прочего, то, что происходит время от времени в делах здравоохранения и родственных областях, и особенно как здесь и в соседних местах меняется погода.* […] *Как меняется вес воздуха и магнитное склонение и наклонение и как всё это можно определить при помощи новых приборов,– термометра, гигроскопа, анемометра, барометра и некоторых компасов. Далее, как в тех или иных местах удаются фрукты и овощи, каковы цены на продовольствие и, главное, какие болезни и несчастные случаи человека и скота преобладают.*

Вряд ли подобная коллегия когда-либо существовала!

И вот политико-арифметическое сочинение Лейбница (1680 – 1683/1986, перевод: Шейнин 2007b), в котором он (с. 456/2007, с. 22) ввел вероятность (apparence), совпадающую со “степенью вероятности”, и “среднюю вероятность” (с. 456/2007, с. 23), под которой он понимал ожидание. На с. 458/с. 23 и 24 он предположил, что “Обычный предел человеческой жизни составляет 80 лет, если пренебречь малым числом тех, кто переступает за него”. Он (с. 459 – 462/с. 24 – 26) далее подсчитал “среднюю продолжительность человеческой жизни” и для новорожденных, и для лиц любого возраста, необходимую, как он замечает, для оценки стоимости пожизненных рент. Впрочем, в одном случае он упомянул “среднюю или предполагаемую продолжительность”. Затем он (с. 459/с. 24) предположил, что “81 новорожденных вымирают равномерно, т. е. по одному в течение 81 года”.

Приняв еще одно предположение (с. 464/с. 27), что “плодовитость человека остается неизменной и притом настолько совпадающей со смертностью, что число живущих остается почти без изменения ”, так что “людское множество, если и изменяется заметно, то лишь ввиду особых и необычных несчастных случаев”, Лейбниц (с. 465/с. 28) добавил: “если умирает 100 десятилетних, то умрет столько же 20- и 30-летних и вообще столько же одного возраста, сколько другого”, ибо стариков хоть и меньше, но они более склонны умирать. На с. 466/с. 29 мы находим еще одно заключение: “Ежегодно умирает примерно сороковая часть населения”, что “соответствует опыту [на который нет никаких ссылок], хоть и установлено априорно”. И вот начальные строки сочинения (с. 456/с. 22):

> *Это исследование можно существенно использовать в политике для суждения о мощи государства и о численности населения по количеству смертей*[46] [и] *для оценки средней продолжительности жизни, необходимой для определения справедливой стоимости пожизненных рент, что весьма полезно для государства. Это установил покойный г-н* […] ***де Витт*** […].

Рассмотренное сочинение Лейбница весьма неудачно. Предположение о постоянстве “людского множества” явно не соответствовало действительности, а одинаковая смертность в различных возрастах во всяком случае не была обоснована. Но самое неприятное утверждение автор привел в конце: “Ясно, что может рождаться в 9 или 10 раз больше детей, чем на самом деле”.

В то же время Лейбниц (рукопись 1680 – 1683) определял вероятный (praesumtivi), – а фактически средний, – срок жизни последнего из группы нескольких человек. Он предположил дискретный равномерный закон смертности с наибольшим сроком жизни 80 лет и с наступлением смертей в моменты 1, 2, 3, 4 года, 5, …, 79 лет. Комбинаторным методом он получил, например, для одного, двух и трех человек

$$(1 \cdot 79 + 0)/2,\ (2 \cdot 79 + 1)/3,\ (3 \cdot 79 + 2)/4.$$

Если отбросить вторые слагаемые в числителях, то эти дроби совпадут с ожиданиями соответствующих порядковых статистик для непрерывного равномерного распределения.

2.4.5. Эдмонд Галлей (1656 – 1742) опубликовал мемуар (1694), оказавший серьезное влияние на развитие статистики населения[47]. Исходя из неполных и неточных сведений о смертности в различных возрастных группах, он составил таблицу продолжительности жизни для закрытого населения, см. Табл. 2.4.

Табл. 2.4. Продолжительность жизни (Галлей 1694/2005, с. 114)

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490
36	481	43	417	50	346	57	272	64	202
37	472	44	407	51	335	58	262	65	192
38	463	45	397	52	324	59	252	66	182
39	454	46	387	53	313	60	242	67	172
40	445	47	377	54	302	61	232	68	162
41	436	48	367	55	292	62	222	69	152
42	427	49	357	56	282	63	212	70	142
71	131	78	58						
72	120	79	49						
73	109	80	42						
74	98	82	28						
75	88	83	23						
76	78	84	20						
77	68								

1	2	1	2
7	5547	56	2194
14	4584	63	1694
21	4270	70	1204
28	3964	77	692
35	3604	84	253
42	3178	100	107
49	2709	Всего 34000	

Не удовлетворившись своими исходными данными ввиду незакономерных изменений в них, Галлей (с. 5/2005, с. 112) заявил, что неправильности в них “скорее следует приписать случаю” и что они “выправятся при гораздо большем числе лет [наблюдения]”. Более того, используя дополнительные данные о рождаемости, он ввел в свои материалы поправки, что представляется неудачным: уравнивание в статистике населения в основном направлено на выявление и исключение систематических влияний[48]. Впрочем, его замечание, как и одно высказывание **де Витта** (п. 2.3.3), относится к предыстории закона больших чисел.

Галлей указал ряд возможных приложений своей таблицы, в частности для вычисления вероятностей, относящихся к срокам жизни двух человек. Вот одна из его задач: вычислить вероятность, что два человека в возрасте 18 и 35 лет останутся в живых через 8 лет; что оба умрут; что умрет только один (два случая). При вычислении он фактически применил теорему умножения для независимых событий. Так, отвечая на свой первый вопрос, он получил (см. Табл. 2.4)

$$P = \frac{50 \cdot 73}{610 \cdot 490} \qquad (2.2)$$

(50 = 610 – 560, 73 = 490 – 417).

Видимо подражая древним математикам, Галлей повторил свое рассуждение на геометрическом языке (даже в трехмерном пространстве), приняв все числа в дроби (2.2) и в аналогичных выражениях за длины сторон некоторых прямоугольников. Числа в дроби (2.2) были шансами; из вероятностей 50/610 и 73/490 он не исходил. Геометрическую вероятность Галлей также не ввел, потому что стороны его прямоугольников выражались целыми числами.

Галлей указал, что решение подобных задач позволяет вычислять стоимость пожизненных рент на двух или трех человек различных возрастов[49], “долю мужчин, способных носить оружие”, “различные степени смертности, или, скорее, жизнеспособности в каждом возрасте” (с. 6 – 7/с. 115) и вероятную продолжительность жизни (сам термин у Галлея отсутствовал). Сложив указанные в своей таблице числа остающихся в живых в каждом возрасте, он подсчитал количество населения (34 000) для принятого числа новорожденных (1000). Таким образом, зная действительное число новорожденных, можно было бы просто умножить его на 34 и получить действительное количество населения. Это соображение оказало сильное влияние на статистику (Böckh 1893, с. 1 – 2)[50].

Мало того, обратившись к мемуару Галлея, **Муавр** (1725/1756, с. 262/2005, с. 124)[51] посчитал, что “на протяжении длительных интервалов времени степени убывания жизни находятся в арифметической прогрессии”. Правильнее: эти степени просто оказались неизменными, но Муавр добавил, что в арифметической прогрессии находятся числа доживающих до последовательных возрастов. Так равномерное распределение окончательно закрепилось в теории вероятностей[52]. Со временем были, конечно, приняты другие предпосылки, но в руках настоящих мастеров, каким был Муавр, и этот простейший закон позволил решить важные вероятностные задачи.

2.4.6. Каспар Нойман (1648 – 1715) собрал те данные, которые использовал Галлей и относились к г. Бреслау. Там (Guhrauer 1863, с. 206, Прим. 1), начиная с 1542 г., "имена крещенных, женящихся и умиравших вносились в книгу церкви Марии Магдалины, а с 1569 г. – в книгу церкви Елизаветы"[53].

В 1670 г., после трех лет в Йенском университете (там же, с. 10), Нойману была присуждена степень магистра философии. Проповедник с 1673 г. (с. 12), он с 1689 г. переписывался с **Лейбницем** (с. 13) и в 1706 г. по рекомендации последнего был избран в Королевское общество наук в Берлине. Нойман (там же, с. 204)

> *Был, как кажется, первым в Германии, кто собрал, а затем использовал для общих выводов относительные числа годичных рождений и смертей в своей окрестности.*

Основное сочинение Ноймана видимо утеряно (см. ниже). Вот сообщение о нем (там же, с. 207):

> *Когда* […] *готовился первый том журнала Miscellanea Berolinensia, Лейбниц призвал Ноймана прислать мемуар. Работу De methodo periodica in Obss. meteorologicis adhibenda он прислал* […] *только в 1713 г. (Второй том вышел намного позднее его смерти, в 1723 г.) Во всяком случае, Нойман* […] *достойно представил Силезию в Берлинском Королевском обществе задолго до ее присоединения к прусскому государству.*

Х. Вольф, ученик и друг Ноймана (с. 208), "при всякой возможности давал знать, как он […] благодарен Нойману, хотя и не хвалил метода своего учителя". Guhrauer приложил 11 писем из переписки Лейбница с Нойманом[54]. В одном из них (без даты, с. 265), Нойман заметил, что "много лет постигал (begriffen) метеорологические наблюдения", а в 1707 г. он (с. 267) обсуждал влияние Луны на погоду и добавил: "Уже иудеи, как я предполагаю, верили, что изменения [фаз] Луны как-то связаны с воздухом".

В другом письме того же года (с. 269) он утверждал, что "метеорологические наблюдения нуждаются в определенной теории […]. Что до сих пор было написано по этому поводу, или что опубликовало в своих последних *Актах* Парижское общество […], слишком мало". В последнем письме 1713 г. (с. 272 – 273) Нойман упомянул свое сочинение по метеорологии: "Небольшое рассуждение о периодическом методе" […], см. выше, которое он послал Лейбницу, но было, видимо, утеряно.

F. Cohn опубликовал этюд о Ноймане (Graetzer 1883)[55]. Он (с. 27) не обосновал приписанное им своему герою попытку

> *Статистически проверить, действительно ли можно доказать связь между рождениями и смертями человека и определенными каббалистическими числами или расположениями планет.*

Возможно Cohn имел в виду письмо Ноймана Лейбницу 1689 г. (Guhrauer 1863, с. 263 – 264), которое содержит следующий абзац:

> *Решаюсь, наконец, переслать копию ранее написанных Размышлений о жизни и смерти родившихся и умерших в Бреслау, хотя нынешние данные вплоть до конца текущего 89-го года еще нельзя было добавить. Пока еще нельзя сказать, какая, собственно, польза от этого выйдет*[56]. *Но если Бог продлит* [мою] *жизнь настолько, что можно будет собрать вычисления нынешних лет, или кто-то соберет подобные наблюдения в другом городе,* […] *можно будет написать хорошие замечания о Божественном провидении о нашей жизни и смерти, сохранности и размножении и подобные им, а также тем основательнее опровергнуть многочисленные суеверия.*

Elsner (1974, с. 138) утверждает, что указанные *Размышления* и другое сочинение Ноймана, *Размышления о божественном провидении о нашей жизни и смерти* (обе – на немецком языке), были действительно опубликованы. Выходных данных он, однако, не привел, а установить их нам не удалось.

В свою очередь, в 1692 г. Лейбниц (1970, с. 279) в письме Жюстеллю засвидетельствовал, что

> *Месье Нойман* [Neuman вместо правильного Neumann] *сформулировал хорошие замечания о смертях и крещениях в городе* [Бреслау], *которые он переслал мне. В числе прочего он указал, что сказки о климактерических годах вовсе не подтверждаются.*

Возможно, что Нойман отверг эти *сказки* после исследования статистических данных, основанного на здравом смысле, но во всяком случае для своего времени его труд был примечательным.

На языке оригинала (латинском) опубликовано письмо **Галлея** 1692 г. Нойману о смертности (Галлей 1932, с. 88 – 89), а письмо Ноймана Галлею 1694 г. хранящееся в Королевском обществе (там же, с. 35), опубликовал Graetzer (1883, с. 42).

2.4.7. Государствоведение и статистика. Государствоведение (иначе: университетская статистика), которое мы упоминали в п. 2.4.1, ведет начало от **Конринга** (1606 – 1681) и его ученика **Ахенваля** (1719 – 1772). Целью государствоведения было описание климата, географического положения, политической структуры и экономики данного государства и грубая оценка его населения, а о предсказаниях оно мало заботилось и отличалось от политической арифметики не только по своим целям, но и своими методами, а именно предпочтением словесных описаний (Шейнин 2001, с. 89 – 92). Статистика в нашем смысле поэтому ведет свое начало от политической арифметики.

Методологическое описание “статистики” в понимании государствоведов (**Schlözer** 1804, с. 86) стало ее фактическим государствоведческим определением: “история – это движущаяся статистика, а статистика – застывшая история”.

Оглядываясь на **Лейбница** (п. 2.4.4), можно заметить, что его сочинения были частично государствоведческими, а частично – политико-арифметическими. В те времена действительно требовались обе указанные дисциплины, однако широчайший спектр государствоведения оказался причиной его распада, который, правда, произошел лишь в конце XIX в.

Но вот не вполне верное описание (Lazarsfeld 1961/1977, с. 219) работы Лейбница: он был младшим коллегой Конринга, а политическая арифметика – “почти единственной темой современной ему науки, о которой он сам ничего не писал”. Впрочем, мы приведем любопытное сравнение **Петти** и Конринга того же автора (с. 221 и 223):

Англичанин, гражданин Империи, рассматривал причинные соотношения между количественными переменными. Немец, подданный одного из трехсот небольших княжеств, […] *пытался систематически вывести наилучший список показателей для характеристики государства.*

Международное право [в Германии] *начиналось в нескольких милях от собственного дома или места работы. Неудивительно, что научный авторитет достигался систематическим перечислением существующего, а не новыми открытиями.*

3. Паскаль и Ферма

Этот раздел в основном посвящен переписке между Паскалем и Ферма, которую начал, видимо, Паскаль. Его внимание к азартным играм привлек де Мере, светский человек, хорошо знакомый с ними, хоть и не игрок по натуре (Ore 1960, с. 409; Dale 1998). Из их переписки сохранилось 8 писем (Fermat 1894, с. 288 – 314 и 450 – 452; Pascal 1998, с. 145 – 166/перевод: Шейнин 2006, с. 8 – 27). Два письма 1660 г. не имеют прямого отношения к нашей теме, остальные шесть были написаны в 1654 г., а азартные игры обсуждались в четырех из них. Мы описываем и их, и, мельком, еще одно письмо того же года (Ферма – Паскаль 29 авг. 1654 г.).

3.1. Ферма – Паскаль, письмо без даты (июнь [?] 1654г.).

Игрок А обязался выбросить некоторое число очков в восьми бросках игральной кости. Какое отступное должен будет уплатить ему его партнер В при единичной ставке, если он откажется от одного из своих бросков?

“В соответствии с моим принципом”, сообщает Ферма, видимо отвечая на утерянное письмо Паскаля, А должен получить 1/6 ставки; если же он откажется еще от одного броска, то дополнительно 1/6 остатка, т. е. 1/6 от 5/6 и т. д. Но если, к примеру, первые 3 броска окажутся неудачными, то за отказ от какого-нибудь из оставшихся ему опять-таки следует 1/6 полной ставки.

Вероятность выбросить k очков, $k = 1, 2, \ldots, 5, 6$, в точности один раз при восьми бросках ниже, чем при семи. И вообще, если p (= 1/6) – вероятность выпадения любого числа очков при одном броске и $q = 1 - p$, то для n бросков,

$$P_n = C_n^1 (n/6)(5/6)^{n-1},\ P_8 < P_7.$$

По этой причине и имея в виду контекст письма Ферма, мы понимаем условие задачи как "выбросить … не менее одного раза". Тогда

$$P_2 = p + p(1-p) = 2p - p^2, \qquad (3.1)$$
$$P_3 = p + p(1-p) + p\ \{1 - [p + p(1-p)]\} = 3p - 3p^2 + p^3.$$

Более интересна общая формула включения и исключения, известная уже Монмору (Хальд 1990, с. 209) и Муавру (там же, с. 336 – 337 и 415):

$$P[\sum_{i=1}^{n} A_i] = \sum_i P[A_i] - \sum_{i<j} P[A_i A_j] + \sum_{i<j<k} P[A_i A_j A_k] - \ldots$$

Она, конечно же, является вероятностным следствием теоремы о множествах, произвольно расположенных друг относительно друга.

Суть *принципа* Ферма, видимо, состояла в подсчете ожидаемых потерь или выгод. Выражений типа (3.1) ни у него, ни у Паскаля не было и ни вероятность, ни ожидание они формально не вводили.

3.2. Паскаль – Ферма, 29 июля 1654. Письмо начинается с обсуждения раздела ставки после момента (3; 2:1), обозначение см. в Прим. 4. Игрок А выигрывает первую партию (и забирает ставку) с вероятностью 1/2. Поэтому, рассуждает Паскаль, половина ставки уже принадлежит ему, в противном же случае счет уравнивается и он должен получить еще 1/2 от 1/2, а всего 3/4 ставки.

Можно истолковать подобные задачи в терминах случайного блуждания точки или условных вероятностей. Событие "А выиграл третью партию" в примере Паскаля обозначим буквой F_1, противоположное событие – буквой F_2, и его выигрыш игры в целом – через F. Тогда

$$P(F_1) = P(F_2) = 1/2,\ P(F/F_1) = 1,\ P(F/F_2) = 1/2,$$

$$P(F) = P(F/F_1)P(F_1) + P(F/F_2)P(F_2) = 3/4.$$

Письмо Паскаля содержит правило раздела ставки в случаях (n; a:0) при $a = 1, 2, \ldots, n - 1$ и замечание об игре в кости. Указанные частные случаи можно обобщить, ибо игры (n; a:b) при $a > b$ равносильны по своим результатам играм [($n - b$); ($a - b$):0].

3.2.1. Биномиальные коэффициенты. Паскаль начинает со случая (5; 1:0) и указывает, что "стоимость" первой партии (т. е. ожидание выгоды А от нее за вычетом половины общей ставки) равна

$$\frac{(1/2)C_8^4}{(1/2)C_8^4 + C_8^5 + C_8^7 + C_8^8} = \frac{35}{128}. \qquad (3.2)$$

Действительно, наибольшее число оставшихся партий равно восьми, так что та же стоимость первой партии без указанного вычета равна

$$\frac{C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4}{2^8} - \frac{1}{2} = \frac{(1/2)C_8^4}{2^8} = \frac{35}{256}.$$

Здесь 1/2 – это априорная вероятность выигрыша всей игры игроком А.

Для случая (n; 1:0) стоимость первой партии оказалась бы равной

$$P_1 = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-2}}. \qquad (3.3)$$

Без пояснений Паскаль привел таблицу значений каждой партии для игр (n; 1:0) и $n = 1, 2, \ldots, 5, 6$. В частности, стоимость второй партии была равна

$$P_2 = \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-3}}. \qquad (3.4)$$

Формул (3.3) и (3.4) у Паскаля не было, но он заметил, что

$$P_1 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)}$$

и что $P_2 = P_1$.

Паскаль таким образом суммировал биномиальные коэффициенты, но ни в одном из своих писем не упомянул своего *Арифметического треугольника*. Сочинение о нем было опубликовано посмертно (1665), см. п. 3.6, но Ферма сослался на сочинения Паскаля “по арифметическому треугольнику и его применению” [в том числе и для раздела ставки] в своем письме 29 авг. 1654 г. Паскаль, видимо, послал ему эту работу еще до ее опубликования.

Паскаль не сказал, что сумму биномиальных коэффициентов можно использовать вне зависимости от счета в игре, но фактически он так и поступал (п. 3.6).

3.2.2. Малые разности вероятностей. Комментируя игру в кости, Паскаль указал на ошибку де Мере, который полагал, что вероятность выбросить 6 очков при четырех бросках одной кости (P_1) должна равняться вероятности выбросить 12 очков при 24 бросках двух костей (P_2). Фактически

$$P_1 = 1 - (5/6)^4 \approx 0.5177, \; P_2 = 1 - (35/36)^{24} \approx 0.4913. \qquad (3.5a, b)$$

Оре (1960, с. 411 – 412) и **Ван дер Варден** (1976) указали, что де Мере вычислил эти вероятности, но что, поскольку полученные результаты не соответствовали старинному правилу, весьма неточному при небольших числах, он заключил, что числа противоречивы[57]. Впрочем, возможно, что малую разность ΔP игроки (или ставящие на тот или иной результат игры, см. ниже) могли установить эмпирически, ср. [I, п. 5].

Имея в виду, что морское страхование (п. 2.3.1) и страхование жизни (п. 2.3.2) были частично связаны с заключением пари, и что богатые предприниматели покупали пожизненные ренты на несколько *молодых жизней* одновременно (п. 2.3.3), почему бы не допустить, что пари заключались и о результатах многих игр сразу? Вероятности их различных исходов должны были бы быть заранее оценены, но это могло бы быть сделано при небольших *рекогносцировочных* ставках. И действительно, **Монмор** (1708/1713, с. 169) и **Муавр** (1718/1756, Задача 70 и несколько других) упоминают игроков и “зрителей”. Кем же они были, эти зрители, и зачем вообще было вспоминать о них? Опоздавшие и оставшиеся без места за игорными столами или сравнительно бедные люди, не смевшие играть? Вряд ли авторы стали бы их упоминать; видимо, они-то и ставили на результаты игр.

Возможный факт эмпирического установления малой разности вероятностей мы находим и у Муавра (1718/1756, с. iii; перевод: Шейнин 2006, с. 83), который сообщил также, что вероятность успеха в одной партии описываемой игры была равна 1/32:

Банкомёт утверждал, что у [игроков] *нет причин для жалоб, так как он предлагал сам ставить на то, что любой исход произойдет при 22 бросках и действительно так и ставил, когда игроки требовали этого*.

Вероятность выигрыша банкомёта равнялась

$$P_{22} = 1 - (31/32)^{22} = 0.5004,$$

тогда как при 21 броске (на которые банкомёт не соглашался)

$$P_{21} = 1 - (31/32)^{21} = 0.4844.$$

Следует, наконец, сослаться на Кендалла (1956/1970, с. 29): “Вплоть до середины XVII в. все относительные шансы в играх устанавливались либо интуитивно, либо путем проб и ошибок”.

3.3. Паскаль – Ферма, 24 авг. 1654. Паскаль обсуждает метод Ферма, “который исходит из соединений”. Сославшись на Роберваля, он утверждает, что этот метод нельзя применять при трех игроках; Роберваль, правда, возражал против его применения даже при двух игроках, но Паскаль заметил, что это мнение было ошибочным.

По описанию Паскаля метод Ферма состоял в подсчете числа случаев, благоприятных для каждого игрока и разделении ставки в отношении (в отношениях) чисел тех и других. Так, для игры [n; (n – 2):(n – 3)] число остававшихся партий могло равняться двум, трем или четырем. Не будет ли ошибкой, спрашивал Роберваль, подсчитывать числа случаев для четырех партий? Паскаль отвечал, что если игра заканчивается в 2 партии, то еще 2 можно приписать фиктивно, и мог бы добавить, что сам так и делал (п. 3.2.1). Для четырех партий 16 случаев таковы: aaaa (все партии выигрывает А), aaab (три партии выигрывает А и одну – В), …, bbbb. Буква a входит не менее двух раз в 11 случаях, а буква b – не менее трех раз в пяти, и потому ставку следует разделить в отношении 11:5. Заметим ошибку Паскаля (которая, правда, в данном случае не повлияла на вычисления): если двое играют 4 партии, то число всевозможных случаев равно не 4^2, как он посчитал, а 2^4.

Если играют трое, то, как указал Паскаль, тот же метод приводит к выигрышу двоих, и он поэтому рекомендовал вернуться к его собственному *общему методу*. Такого термина он, впрочем, ранее не употреблял. Без доказательства он добавил, что в игре [n; (n – 1):(n – 2):(n – 2] ставку следует разделить в отношениях 17:5:5. Действительно, для двух (не трех) партий окажется, что А выиграет с вероятностью 5/9, счет же выровняется с вероятностью 2/9. Поэтому его доля будет равна 5/9 плюс 1/3 от 2/9, т. е. 17/27, остальные же игроки должны получить поровну.

3.4. Ферма – Паскаль, 25 сент. 1654. Ферма обосновал свой комбинаторный метод. Во-первых, в случае двух игроков следует дополнительно учитывать порядок выигрыша партий. Далее, вероятности выигрыша каждого игрока можно подсчитывать для каждого возможного числа партий и затем суммировать их. Так, в примере Паскаля [n; (n – 1):(n – 2):(n – 2)] игрок А выигрывает с вероятностями 1/3, 2/9 и 2/27 при числе партий 1, 2 и 3 соответственно, и полная вероятность его выигрыша равна 17/27.

Мимоходом Ферма заметил, что общее число случаев для n партий (n = 2 или 3) равно 3^n и вряд ли он не знал, что и для m игроков оно окажется равным m^n. Для трех игроков отдельные случаи можно перенумеровать, если использовать выражения типа

$$(a + b + c)^n, \qquad (3.6)$$

где n – наибольшее число остававшихся партий. Так, снова для примера Паскаля, n = 3 и комбинация abb появится трижды, – abb, bab и bba, – но только две из них (кроме последней) благоприятны для А. Обозначим число партий, выигранных игроками А, В и С через X, Y и Z соответственно, тогда $X + Y + Z = n$, а выражения типа (3.6) напоминают производящие функции

$$(1/3^n)(a + b + c)^n$$

для распределения тройки X, Y, Z; 1/3 – вероятность выигрыша каждой партии каждым игроком.

3.5. Дополнительная задача (Паскаль). В письме 1656 г. **Гюйгенсу** Каркави (Гюйгенс, т. 1, с. 492 – 494) описывает задачу Паскаля, которую тот предложил Ферма. Игрок А обязуется выбросить 11 очков при броске трех костей, а игрок В – 14 очков. Играть они должны до тех пор, пока один из них не опередит другого на 12 партий; каково соотношение их шансов?

Эту задачу можно считать первой на разорение игрока и на серию событий. Ферма правильно решил ее, указав, что искомое соотношение примерно равно 1156:1. Действительно, при каждом броске оно равно 27/15 = 9/5 и для 12 партий $(9/5)^{12} \approx 1157$. То же соотношение нашел Паскаль (который не стал сокращать дробь 27/15). Вскоре эту же задачу решил и Гюйгенс (там же, с. 505 – 507).

3.6. Арифметический треугольник Паскаля (1665/1998; перевод: Шейнин 2007а, с. 25 – 55). Мы начнем с двух выдержек (1998, с. 302 – 303 и 307/2007, с. 39 – 40 и 42):

> *Чтобы понять правило раздела ставки, следует прежде всего иметь в виду, что деньги, поставленные игроками, им уже не принадлежат, они уже перестали быть их собственностью, взамен же они получают право на то, что преподнесет им случай в соответствии с заранее установленными правилами.* […][58] *Установление того, что должно им принадлежать* [при разделе ставки] *следует таким образом согласовать с тем, чего они имели право ожидать от фортуны, чтобы каждому из них стало совершенно безразлично, либо получить то, что ему будет назначено, либо продолжать авантюру игры.*
>
> *Следует учитывать лишь недостающие одному и другому партии, а не те, которые они выиграли.*

Паскаль упоминает три способа раздела ставки. Первый из них – непосредственный подсчет ожиданий, затем применение арифметического треугольника и метод комбинаций. Быть может важнее было бы четко указать: подсчет либо ожиданий, либо шансов (вероятностей). В отличие от своих писем (п. 3.2.1), Паскаль здесь действительно применяет арифметический треугольник для суммирования биномиальных коэффициентов, притом в общем случае (n; a:b). И если табличную форму определения набора чисел считать равноценной аналитической, то для частного случая биномиального распределения при $p = 1/2$ этот метод равносилен методу производящих функций. Впрочем, табличная форма не позволила Паскалю обобщить решение на случай трех игроков.

3.7. Геометрия случая. В письме Парижской академии математики (предшественницы Парижской академии наук) Паскаль (1654) сообщил о своем намерении написать несколько трактатов, один из которых должен был быть посвящен геометрии случая (1654/1998, с. 172):

> *Объединяя строгость научных доказательств с неопределенностью случая, примиряя эти кажущиеся*

противоположными вещи и выводя название из них обеих, можно будет с полным правом присвоить объединению ошеломляющее название геометрия случая.

Паскаль не успел осуществить своего намерения, но интересно, что он имел в виду описать элементы теории вероятностей. **Реньи** (1969) попытался представить содержание подобного трактата, отнеся его к 1654 г. Мы не согласны с богатым содержанием его придуманного трактата, поскольку в то время Паскаль не написал ни о чем, кроме раздела ставки, а отсутствие в нем ссылок на Аристотеля означает, что предположенное рассуждение Паскаля о философии теории вероятностей по меньшей мере неполно.

4. Гюйгенс

В п. 4.1 мы обсуждаем трактат Гюйгенса (1657; перевод: Шейнин 2006, с. 28 – 42); его переписка и рукописи, содержащие интересные результаты, являются темой п. 4.2, и, наконец, п. 4.3 посвящен моральной достоверности[59].

4.1. Гюйгенс (1657). Этот трактат предварен письмом автора **ван Схутену**, и в нем содержится пояснительная фраза: “Вы [ван Схутен] сочли его [трактат] достойным появления вместе с результатами Ваших глубоких исследований”. В письме Гюйгенс провидчески утверждает, что при изучении азартных игр “Дело идет не о простой игре ума, в нее [в работу] заложено начало весьма интересному и глубокому умозрительному построению”. И другое утверждение:

В течение какого-то времени некоторые наиболее знаменитые математики всей Франции занимались этим видом исчисления, так что никто не должен приписывать мне честь первого открытия […]. *Но эти ученые* […] *скрыли* [не обнародовали] *свои методы. Поэтому мне самому пришлось исследовать и глубоко вникать в этот предмет, начиная с самого начала.*

Гюйгенс обосновывал свои рассуждения понятием ожидания случайного события, хотя никакого термина для него не предложил ни здесь, ни в своей переписке. В первых трех Предложениях своего трактата он вычислял ожидание выигрыша в азартной игре и в последнем из них доказывал (а не принимал по определению, как мы это сейчас сделали бы), что при p шансах получить a и q шансах получить b ожидание игрока равно

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

В следующих шести Предложениях Гюйгенс обсуждал раздел ставки между двумя и тремя игроками. С перепиской **Паскаля** и **Ферма** он никак не мог быть знаком и непосредственно подсчитывал ожидания. Последние 5 Предложений были посвящены игре в кости, и вот два из них (по существу никак не *предложения*, а задачи)[60].

[4.1] В скольких бросках двух костей можно обязаться выбросить 12 очков.

[4.2] А берется выбросить 7 очков двумя костями, а В – 6 очков. Они играют поочередно и начинает В. Каково соотношение их шансов?

Решение задачи **[4.1]**. Вероятность успеха равна 1/36. При двух бросках и ставке a ожидание успеха равно

$$(1/36)a + (35/36) \cdot (1/36)a = (71/1296)a.$$

При четырех бросках

$$(71/1296)a + (1225/1296) \cdot (71/1296)a \text{ и т. д.}^{61}$$

И, вычислив вероятности успеха для 8 и 16 бросков, можно, как заметил Гюйгенс, подсчитать ее и для 24 бросков и т. д. Впрочем, он полагал, что достаточно установить число бросков, при котором шансы игроков уравниваются.

Reiersol (1968) истолковал вычисления как применение формулы,

$$E[E(X/Y)] = EX, \qquad (4.1)$$

к которой мы вернемся в п. 4.2.3. Представляется, что самое естественное решение этой задачи было бы при использовании производящей функции $[(1/36) + (35/36)x]$.

Решение задачи **[4.2]**. Пусть ожидание выигрыша А в момент, когда очередь перешла к В, равна x, а когда очередь его самого – y, и ставка равна единице. Игрок В выигрывает каждый раз с вероятностью $p_2 = 5/36$ и поэтому

$$x = (1 - p_2)y = (31/36)y, \; y = (1/6) + (5/6)x,$$

где $p_1 = 1/6$ – вероятность выбросить 7 очков. Таким образом, $x = 31/61$ и искомое соотношение равно 31/30. Аналогичные задачи мы обсудим в пп. 4.2.1 и 4.2.2.

Трактат заканчивается формулированием пяти дополнительных задач, о которых см. там же. Первую и третью предложил Ферма (п. 4.2.1), последнюю – Паскаль (п. 3.5).

[1доп] Игрок А берется выбросить 6 очков при броске двух костей, а В – 7 очков. Начинает А, которому предоставляется один бросок, затем поочередно каждый выбрасывает кости дважды. Каково соотношение шансов этих игроков?

[2 доп] Дано 12 жетонов, 8 – черных и 4 – белых. Игроки А, В и С по очереди вытаскивают по одному, и выигрывает тот, кто первым вытащит белый жетон. Вопрос тот же.

[3 доп] Из колоды в 40 карт извлекаются 4. Каково соотношение шансов того, что появятся или не появятся карты всех мастей?

[4 доп] Игрок вытаскивает 7 жетонов из 12, упомянутых в задаче **[2 доп]**. Каково соотношение шансов того, что 3 из них белые или нет? Подобные задачи, приводящие к гипергеометрическому распределению, оказались важными для статистического контроля качества продукции.

[5 доп] Игрок А берется выбросить 14 очков при броске трех костей, игрок В – 11. У каждого по 12 жетонов, и выигрывающий партию забирает жетон у проигравшего. Каково соотношение шансов их разорения?

4.2. Переписка и рукописи Гюйгенса

Гюйгенс неоднократно обращался к теории вероятностей в своей переписке. Той же теме были посвящены некоторые его рукописи, которые теперь опубликованы в качестве дополнений к его основному трактату 1657 г. (т. 14, с. 92 – 179)[62].

4.2.1. Год 1656-й. В том году Каркави (Гюйгенс, т. 1, с. 418 – 419) послал **Ферма** решение задачи о разделе ставки, данное Гюйгенсом, который сам сформулировал еще одну задачу на ту же тему (или, быть может, ту же задачу с другими начальными условиями), см. там же, с. 432. Ферма решил дополнительную задачу и Гюйгенс (с. 442) заметил: “Он владеет общим методом для установления всего того, что относится к этому предмету”.

Затем, в письме к Каркави, Ферма (там же, с. 433 – 434) предложил (Гюйгенсу?) 5 задач и привел ответы к ним, не указав метода их решения. Две из них, именно **[1 доп]** и **[3 доп]**, см. п. 4.1, Гюйгенс опубликовал в своем трактате. Вот остальные.

[4.3] Игру начинает А, который берется выкинуть 6 очков в двух бросках двух костей, а В берется выбросить 7 очков в трех бросках. Каково соотношение шансов их выигрыша?

[4.4] Игроки А и В вытаскивают поочередно по одной карте из колоды в 52 карты, и выигрывает тот, кто первым вытянет червовую карту. Тот же вопрос.

[4.5] Из колоды в 36 карт извлекаются 12. Каково соотношение шансов того, что среди них окажутся или не окажутся 3 туза?

Вот решения Гюйгенса.

[1 доп] Обозначим (т. 1, с. 442 – 443) вероятности выбросить 6 и 7 очков через p_1 и p_2, $p_1 = 5/36$, $p_2 = 1/6$. Пусть, далее, x – доля А и последовательность бросков A_1, B_1, B_2, A_2, A_3, …, а ставка равна 1.

Ожидание выигрыша А от броска A_2 равна

$$p_1 + (1 - p_1)x,$$

а от прошедших бросков B_2, B_1 и A_1 соответственно

$$(1 - p_2)\,[p_1 + (1 - p_1)x],\ (1 - p_2)^2\,[p_1 + (1 - p_1)x],$$
$$p_1 + (1 - p_1)\,(1 - p_2)^2\,[p_1 + (1 - p_1)x],$$

притом последний выигрыш должен равняться x:

$$p_1 + (1 - p_1)\,(1 - p_2)^2\,[p_1 + (1 - p_1)x] = x,\ x = 10\,355/22\,631,$$

что совпало с результатом Ферма.

[4.3] См. там же, с. 444. Приведен только ответ:

$$P_A/P_B = 87\,451/72\,360.$$

Заметим, что в соответствии с решением задачи **[2 доп]** (п. 4.2.2),

$$x = p_1/[p_1 + p_2 - p_1p_2],\ 1 - x = p_2(1 - p_1)/[p_1 + p_2 - p_1p_2].$$

При $p_1 = 335/1246$ и $p_2 = 91/216$ окажется, что числитель и знаменатель в ответе Гюйгенса следует поменять местами, и тогда он совпадет с ответом Ферма.

[4.4] См. там же. Гюйгенс решил эту задачу по методу, совпадающему с методом условных вероятностей.

[3 доп] См. там же. Гюйгенс привел только ответ:

$$[P/(1 - P)] = 1000/8139,$$

что соответствует значению $P = \dfrac{(C_{10}^1)^4}{C_{10}^4} = \dfrac{1000}{9139}$.

[4.5] См. там же, с. 444 и 446 – 447. Гюйгенс не привел окончательного ответа, но указал метод решения, – тот же, что и для задачи **[4.4]**.

Для полноты изложения упомянем, что Гюйгенс решил и задачу **[5 доп]**, см. п. 3.5, и задачи **[2 доп]** и **[4 доп]**, см. п. 4.2.2.

4.2.2. Год 1665-й. Гюйгенс вернулся к теории вероятностей в переписке с **Хюдде**. Вначале (т. 5, с. 305 – 311) они обсуждали задачи **[2 доп]**, **[4 доп]** и задачу об игре в орлянку. Вот эта последняя.

[4.6] Игроки А и В подбрасывают монету по очереди. Если у игрока выпадает решетка, он ставит дукат, если орел – он выигрывает и забирает все накопленные деньги. Начинает А, и требуется определить преимущество В.

Хюдде (там же, с. 348 – 351) обобщил эту задачу:

[4.7] У игрока А – 1 белый и 2 черных жетона, у В – некоторое число жетонов тех же цветов. Каждый из них вытаскивает один из своих жетонов и возвращает его обратно. Если жетон оказался черным, игрок ставит дукат, а выигрывает и забирает все накопленные деньги тот, кто первым вытащит белый жетон. Начинает А, и требуется определить соотношение белых и черных жетонов у В при справедливой игре.

[2 доп] Ее решение содержится в рукописи 1665 г. (т. 14, с. 96) и подразумевает, что жетоны извлекаются с возвращением. Обозначим ожидания игроков А, В и С через x, y, z. Ставка равна 1. Тогда

$$x = (4 + 8z)/12,$$

где 4/12 – вероятность выигрыша А при первом тираже, а 8/12 – его вероятность очутиться в положении игрока С, т. е. выиграть z. Аналогично

$$y = (8/12)x,\ z = (8/12)y.$$

и $x = 9/19$, $y = 6/19$ и $z = 4/19$.

Хюдде (т. 5, с. 307) решил эту задачу, полагая, что извлеченные жетоны не возвращаются, и заметил, что в таком случае задача соответствует выборам в городское самоуправление. Он получил

$$x:y:z = 232:159:104.$$

Верный результат (**Якоб Бернулли** 1713/1999, ч. 1, с. 65, перевод 2006, с. 73) таков:

$$x:y:z = 77:53:35\ (= 231:159:105).$$

[4 доп] Гюйгенс *решил ее* в той же рукописи 1665 г. (т. 14, с. 97 – 101). Вот смысл его рассуждения. В точности 3 белых жетона из семи можно извлечь только, если в первых шести уже было 2 или 3 белых. Если было 3, то вероятность успеха равна 5/6, если же их было 2, то эта вероятность равна лишь 1/3. В свою очередь, каждая из указанных возможностей осуществляется с какой-то вероятностью и т. д.

[4.7] Обозначим количество белых и черных жетонов у А через a и b, а у В – через c и d. Без пояснений Гюйгенс (т. 5, с. 391 – 395) привел формулу[63]

$$c^2 = -cd + \frac{a^2cd}{b(a+b)} + \frac{ad^2}{b}, \tag{4.2}$$

Хюдде же (с. 385), также без пояснения, – формулу

$$c = ad/(a+b), \tag{4.3}$$

которая соответствовала его истолкованию задачи (см. ниже).

Исследование этой задачи представляется сложным, а его подробности неясны. По существу Гюйгенс (т. 14, с. 102 – 150) определил ожидаемые выигрыши игроков при каждом извлечении и суммировал их. Сложным был и метод Хюдде (там же, т. 5, с. 463 – 471). Более естественным, видимо, является следующее решение.

Обозначим вероятности выигрыша и проигрыша при каждом извлечении через p_1 и q_1 для игрока А и p_2 и q_2 – для В:

$$p_1 = a/(a + b),\ q_1 = b/(a + b),\ p_2 = c/(c + d),\ q_2 = d/(c + d).$$

Если А с самого начала извлекает белый жетон[64], то с вероятностью q_2p_1 он выигрывает дукат у В, с вероятностью $q_2^2q_1p_1$– 2 дуката и т. д. В то же время он потеряет дукат с вероятностью $q_1q_2p_2$, 2 дуката – с вероятностью $q_1^2q_2^2p_2$ и т. д. Ожидание его выгоды поэтому равно

$$p_1q_2(1 + 2q_1q_2 + 3q_1^2q_2^2 + \ldots) - q_1q_2p_2(1 + 2q_1q_2 + 3q_1^2q_2^2 + \ldots),$$

но она еще должна быть умножена на p_1, т. е. на вероятность основного предположения.

Но игрок А может в начале игры извлечь и черный жетон. В этом случае ожидание его выигрыша (уже с учетом указанной возможности) будет равно

$$p_1q_1q_2(1 + 2q_1q_2 + 3q_1^2q_2^2 + \ldots) - p_2q_1(1 + 2q_1q_2 + 3q_1^2q_2^2 + \ldots).$$

При справедливой игре его искомое ожидание

$$[p_1q_2(p_1 - q_1p_2) + q_1(p_1q_2 - p_2)](1 + 2q_1q_2 + 3q_1^2q_2^2 + \ldots)$$

должно быть равно нулю:

$$p_1^2q_2 - p_1p_2q_1q_2 + p_1q_1q_2 - q_1p_2 = 0. \qquad (4.4)$$

Это уравнение с неизвестным p_2 можно несколько упростить, но важнее, что оно равносильно формуле Гюйгенса (4.2). Формула Хюдде (4.3) тоже может быть получена, если отбросить первые два члена в левой части уравнения (4.4). При $p_1 \to 0$ из (4.4) следует, что $p_2 \to 0$, а при $p_1 \to 1$ и $p_2 \to 1$. Другие значения p_1 приводят к двум положительным значениям p_2, из которых в точности одно меньше 1.

[4.6] Эту задачу рассмотрел Frenicle de Bessy в своем письме Гюйгенсу (Гюйгенс, т. 5, с. 489 – 490). Он недостаточно подробно описал метод решения, но вывел верное значение ожидаемого выигрыша игрока В. Вот наше собственное решение, возможно более простое.

Если А отказывается играть первым, он должен поставить 1/2 дуката; если и В в свою очередь отказывается, он должен поставить 1/4 дуката и т. д. Отказываясь играть вообще, игроки А и В должны поставить соответственно

$$1/2 + 1/8 + 1/32 + \ldots = 21/32, \quad 1/4 + 1/16 + 1/64 + \ldots = 21/64.$$

После этого игра оказалась бы справедливой, так что каждый игрок должен был бы получить половину общей ставки, т. е. 63/128 дуката, а ожидание проигрыша А, равное ожиданию выигрыша В, окажется равным 21/32 – 63/128 = 21/128 дуката.

Гюйгенс (т. 5, с. 352) полагал, что задача **[4.7]** “иного жанра, нежели те, которые включены в мои [его] опубликованные трактаты”[65]; можно предложить много подобных, “но их польза не очень велика”.

4.2.3. Год 1669-й, смертность (т. 6/перевод: Шейнин 2007а, с. 59 – 72)**.** В переписке со своим братом Людовиком Христиан Гюйгенс впервые вывел теорию вероятностей за пределы азартных игр. Переписка, видимо начатая Людовиком, была вызвана появлением таблицы **Граунта** (п. 2.4.3)[66], и Людовик написал брату (т. 6, с. 483), что “в соответствии с моими [его] вычислениями Вы доживете до 561/2 лет [фактически более чем до 66], а я до 55”. Он явно основывался на вычислениях, приведенных там же, на с. 515 – 518. В соответствии с таблицей Граунта 36 человек из 100 живут в среднем только 3 года, 24 человека – 11 лет и т. д., так что средняя продолжительность жизни новорожденного равнялась

$$(36 \cdot 3 + 24 \cdot 11 + \ldots)/100 = 18.22 \text{ года}. \qquad (4.5)$$

Таким же образом Людовик вычислил среднюю продолжительность жизни для лиц в возрастах 6, 16, 26, … лет, которые были включены в таблицу Граунта. Так, для возраста 6 лет первое слагаемое в формуле (4.5) следовало отбросить, а знаменатель соответственно уменьшить на 36 и т. д. Для 40-летнего (в то время) Христиана средняя продолжительность окажется равной

$$(42 + 44 + 46 + 51 \cdot 4 + \ldots)/13 = 57.1 \text{ года},$$

а не 561/2. Числа 42, 44 и 46 мы получили, разделив промежуток времени [36; 46], в течение которого умирает 6 человек, на 5 равных частей и выбрав точки правее точки 40.

Христиан (там же, с. 524 – 525/2007, с. 64) предупредил, что 18 лет и 2 месяца (см. выше) не являются, “как Вы полагаете несомненным, возрастом каждого новорожденного или зачатого”. Он же (с. 531 – 532/с. 69) ввел вероятную продолжительность жизни (но не сам термин), спросив: “Сколько, как можно разумно полагать, останется прожить человеку” данного возраста? Показав, как можно определить это при помощи графического построения, он (с. 537/с. 70) снова пояснил суть вероятной продолжительности жизни и указал возможные приложения этого нового понятия:

Ожидание или значение будущего возраста человека и возраст, до которого он имеет равные возможности дожить или не дожить: первое служит для определения стоимости пожизненных рент, второй – для пари[67].

Графическое построение Христиана (т. 6, между с. 530 и 531) было основано на графике непрерывной кривой, проведенной через эмпирические точки, указанные в таблице Граунта. Он соответствовал кривой

$$y = 1 - F(x),$$

где $F(x)$ была интегральной функцией распределения с необычным интервалом возможных вероятностей [0; 100].

В рассматриваемой переписке Гюйгенс (с. 528/с. 66) сформулировал и частично решил две задачи:

[4.8] Каково ожидание промежутка времени, в течение которого не умрет ни один из супругов? Или же, “если мне обещают 100 франков в конце каждого года, в течение которого они оба живы, за какую справедливую цену можно выкупить это обязательство?”[68]

[4.9a] Каков ожидаемый промежуток времени, в течение которого вымрет группа из 40 человек в возрасте 46 лет каждый?

[4.9b] Тот же вопрос для двух человек в возрасте 16 лет каждый.

Гюйгенс предположил, что задача **[4.8]** не отличается существенно от задачи **[4.9b]**[69]. И вот решение этой последней (там же, с. 528 – 531/с. 66 – 68). В соответствии с таблицей Граунта каждый из двоих имеет 15 шансов прожить в среднем еще 5 лет; 9 шансов прожить в среднем еще 15 лет и т. д. Пусть они оба вытягивают билетики с написанными на них сроками жизни. Если А (который умрет первым) вытянет билетик со сроком 5 лет, то В проживет не менее пяти лет. Точнее, его 15 шансов прожить 5 лет перейдут в 71/2 шансов прожить 5 лет и во столько же – прожить 8 лет. С учетом остальных шансов, которые не изменились, продолжительность жизни В окажется равной 20.8 года [правильно: 20.3 года].

Если же А вытянет билетик с надписью 15 лет, то В проживет не менее 15 и будет иметь 191/2 шансов прожить 15 лет, 41/2 шанса прожить 18 лет и т. д., и продолжительность его жизни будет равна 24.3 года. С учетом всех возможных предположений, которые происходят соответственно 15, 9 и т. д. раз, Гюйгенс вычислил окончательное значение продолжительности жизни В и заметил, что таким же образом можно было бы вычислить ее для А.

Итак, Гюйгенс применил условные ожидания продолжительности жизни, и именно это следовало бы в первую очередь указать Рейерзолу (п. 4.1). И кроме того Гюйгенс сумел вычислить ожидание порядковой статистики для дискретного распределения.

Задачу **[4.9a]** Гюйгенс не решил: вычисления оказались бы слишком сложными. Но он вполне мог принять, что последний уцелевший прожил бы почти до предельного возраста (по Граунту), т. е. почти до 86 лет. В связи с подобной же задачей Гюйгенс (с. 538/с. 70) неверно заключил, что при постоянной вероятности умереть в интервале от 46 до 56 лет смертность в данной группе в первые годы, в течение которых она оставалась более многочисленной, окажется более высокой[70]. На самом деле n порядковых статистик разделят интервал на $(n + 1)$ примерно равных частей.

4.2.4. Годы 1676 – 1688. В 1676 г., затем в 1679 и 1688 гг. Гюйгенс (т. 14, с. 156 – 179) снова рассматривал азартные игры. В 1676 г. он решил задачу, подобную одной из своего трактата 1657 г.; в 1679 г. он изучал игру, называемую bassette (Я. Бернулли 1713, ч. 3, Задача № 21), а в 1688 г. – так называемую игру Вальдеграва (Тодхантер 1865, с. 122). Вот ее описание. Играют А и В; побежденный ставит дукат, а на его место заступает третий игрок. Таким же образом игроки чередуются до тех пор, пока кто-нибудь не выиграет двух партий кряду и не заберет всех накопленных денег.

Гюйгенс рассмотрел несколько вариантов этой игры, но, как заметил Кортевег, редактор т. 14, допустил ошибки. Более того, он не разъяснил своего решения в достаточной степени (что, конечно же, было допустимо для рукописи). Гораздо понятнее решение **Муавра** (1712/1984, с. 249 – 251; 1718/1756, с. 132 – 159).

4.2.5. Аналитические методы Гюйгенса. По словам Кортевега (т. 14, с. 20),

> *Авторам, непосредственно следующим после Гюйгенса, было легко* […] *во многих отношениях превзойти его труды при помощи комбинаторного анализа. И следует добавить, что его предшественники, Ферма и Паскаль, также с пользой (но, как мы знаем, неведомо для Гюйгенса) применили этот анализ.*

Впрочем, есть еще одна причина, почему решения Гюйгенса сложнее, чем они могли бы быть, а именно его применение ожиданий вместо вероятностей. Вспомним задачу **[4.7]**. В различных тиражах ожидаемые выигрыши были различными, тогда как вероятности оставались неизменными[71]. Если Гюйгенс и заметил это обстоятельство (сразу или позднее), то быть может не захотел ничего менять. Опубликовав свой трактат и решив несколько важных задач на изучение смертности, он, возможно, утратил интерес к теории вероятностей (ср. его высказывание в конце п. 4.2.2)[72]. И не ему, а в первую очередь **Якобу Бернулли** принадлежит честь "интересных и глубоких умозрительных построений" (начало п. 4.1).

Но вот именно потому, что Гюйгенс обращался к переменным ожиданиям, ему не удалось обойтись без конечно-разностных уравнений. По поводу той же задачи **[4.7]** Кортевег (т. 14, с. 135) заметил, что "все уравнения [у Гюйгенса] сводятся к частным случаям уравнения

$$x_m = m\Delta - (1/2)x_{m-1} - (1/2)x_{m+1}$$

(Δ – 1 дукат)". И таким образом его следует вспоминать при описании истории конечно-разностных уравнений.

4.3. Моральная достоверность известна примерно с 1400 г. (Франклин 2001, с. 69), но окончательно ее ввел **Декарт**, а затем и **Арно** и **Николь** (п. 2.2), Гюйгенс же применил ее в естествознании. Впервые она встретилась в его письме 1673 г. (т. 7, с. 298 – 300). Принцип работы сифона и насоса, как он заметил, "с весьма большим правдоподобием …" И далее: предположения относительно "физических вещей" могут иметь лишь весьма высокую достоверность", хотя возможно, что существуют и иные, еще более достоверные. Предположения тем правдоподобнее, чем больше явлений, которым они соответствуют, но их придется изменить, если обнаружится такое явление, которое противоречит им. Следует определять степени правдоподобия.

Аналогичные высказывания содержатся в Предисловии к его трактату (1690a). Всё вместе это означает, что известные рассуждения **Лапласа** о той же проблеме были уже высказаны Гюйгенсом. Декарта Гюйгенс упомянул только один раз, и не очень определенно, в письме 1691 г. (т. 10, с. 739). Там же он добавил, что достоверность иногда достигает соотношения 10^{11} к одному[73]. Происхождение этой оценки неясно, но можно заметить, что по **Борелю** (1943/1962, с. 27) вероятность $p = 10^{-6}$ пренебрегаема "в масштабе человечества", а $p = 10^{-15}$ – в "земном масштабе".

В другом сочинении Гюйгенс (1690b/т. 21, с. 541, см. также примечание редактора тома на с. 532) утверждал, что наши выводы лишь более или менее вероятны и что степени их достоверности следует оценивать по здравому смыслу. Эту мысль он повторил в том сочинении (1698, с. 688/англ. издание 1698 г., перепечатка 1968, с. 10), в котором сформулировал тезис о множестве обитаемых миров[74]:

При изучении природы прекрасно было бы достигать [высокой] *вероятности, а сделанные при этом попытки сами по себе вознаграждают усилия. Но существует много степеней вероятного* […], *при оценке которых нам следует проявлять здравый смысл.*

5. Ньютон

В нашем контексте самыми важными оказались философские взгляды Ньютона (**Пирсон** 1926):

Идея Ньютона о вездесущем активизирующем божестве, которое сохраняет средние статистические значения, составила основание развития статистики по цепочке ***Дерхам*** [религиозный философ – ***Зюссмильх – Нивентит*** [статистик] – ***Прайс*** [статистик] – ***Кетле – Флоренс Найтингейл***.

По мнению **Э. Пирсона** (частное сообщение 1971 г.), его отец имел в виду устойчивость средних значений, которая следует из предначертания. Скажем точнее: устойчивость, время от времени подправляемая предначертанием (Ньютон 1704/1954, Вопрос 31):

Слепая судьба никогда не могла бы заставить планеты двигаться по одному и тому же направлению по концентрическим орбитам за исключением некоторых незначительных неправильностей, которые могли происходить от взаимных действий комет и планет друг на друга и которые будут вероятно нарастать пока эта система не потребует [божественной] *реформации. Для столь чудесной однородности планетной системы следует допустить действие выбора. О том же свидетельствует однообразие в телах животных.*

В русском переводе подчеркнутая фраза заменена плохо понятной фразой; возможно, что jz был сделан с другого издания *Оптики*. Ньютон таким образом отрицал случайность, но вместе с тем фактически признавал ее.

Занимаясь хронологией событий древности, Ньютон (1728, с. 52) оставил интересное замечание:

Греческие хронисты […] *утверждали, что цари их нескольких городов* […] *правили в среднем по 35 – 40 лет, что настолько превосходит ход событий в природе, что не может быть признано. Ибо в соответствии с обычным ходом природы цари правят в среднем около 18 или 20 лет, иногда в среднем на 5 или 6* *лет дольше, а иногда на столько же короче. 18 или 20 лет является средней величиной.*

Свою оценку Ньютон вывел на основании других хронологических данных, но вот формализовать его разумное решение было бы трудно.

Непосредственно к теории вероятностей относится рукопись Ньютона 1664 – 1666 гг. (1967, с. 58 – 61) и письмо 1693 г. (Gani 1982). В рукописи он обсуждал мысленный опыт – падение шара на круг, разделенный на два сектора, отношение площадей которых было равно $2:\sqrt{5}$. Вводя игрока и его выигрыши a и b, зависевшие от остановки шара в том или ином секторе, он выписал “надежду” игрока, равную $(2a + b\sqrt{5})/(2 + \sqrt{5})$. Иначе говоря, Ньютон обобщил понятие ожидания и фактически использовал геометрическую вероятность, притом, как можно думать, статистическую.

В письме 1693 г. Ньютон, отвечая на вопрос, определил шансы выпадения не менее одной, двух и трех шестерок при броске, соответственно, 6, 12 и 18 костей.

Пирсон упустил из вида, что Ньютон оказал громадное влияние на Муавра [III, п. 4].

Примечания

1. В течение того же времени **Муавр** (1712) опубликовал свое первое исследование по теории вероятностей, однако его труды в целом относятся к последующему периоду; даже **Якоба Бернулли** мы по той же причине не включаем в нашу статью.

2. Особо интересной была в ней игра le her. Ее исследование стало возможным в рамках современной теории игр на основе принципа минимакса; впрочем, **Николай Бернулли** (переписка которого с **Монмором** включена во второе издание книги) всё же заметил (с. 334), что игрокам следовало придерживаться, как мы сказали бы, смешанных стратегий (Freudenthal & Steiner 1966, p. 158).

В одном из своих писем 1713 г. Николай Бернулли исследовал закономерность мужских и женских рождений и неявно ввел нормальное распределение, см. [III, п. 7.1].

3. Одну из этих причин (суеверие) Кендалл связывал с психологией игроков. О суевериях игроков см. **Монмор** (1708/1713, с. vi – viii; перевод: Шейнин 2006, с. 52) и **Лаплас** (1814, глава Иллюзии …).

Недавние опыты (Cohen 1957; Cohen и др. 1970; Cohen и др. 1971) наводят на мысль о том, что психологически обоснованные субъективные вероятности значительно отличаются от объективных. В одном из опытов многие испытуемые решили, что количество лотерейных билетов, выигрывавших с вероятностью 0.01, равноценное одному билету с соответствующей вероятностью, равной 0.01, значительно отличалось от 10.

4. Указанные начальные условия мы будем обозначать (n; a:b).

5. Шнейдер (1988, с. 2, Прим.) утверждает, что G. F. Peverone, книга которого вышла в 1595 г., повторил решение **Кардано**.

6. Декарт продолжает:

Другой вид достоверности имеет место, когда мы полагаем, что нет никакой возможности, чтобы вещь оказалась не такой, какой мы ее считаем. […] *Эта достоверность относится ко всему, что доказывается в математике* [доказательство от противного].

7. В гл. 16 части 4 вводится ожидание, что, возможно, способствовало распространению вероятностных идей. Утверждая, что это понятие должно руководить ежедневным поведением (моральная достоверность уже не упоминается), авторы соглашаются с логикой *Пари* **Паскаля** (1669, № 397, с. 676 – 681; Шейнин 2007а, с. 56 – 58), – с его доказательством вероятностной выгоды от веры в Бога.

8. По мысли автора безвестно отсутствующий не должен быть признан умершим пока вероятность смерти не станет вдвое превышать вероятности противного события. **Кондорсе** (1789) дополнил это рассуждение, рассмотрев отношение рисков потери имущества отсутствующего либо им самим, либо его наследниками. Отсутствующие упоминаются в римском праве (Marmonier примерно 1885 – 1892, с. 145):

Один из законов ***Юлия Цезаря*** *постановил, что плен больше не является причиной развода и что сама по себе неуверенность в жизни пленника не может позволить его супруге выйти снова замуж ранее, чем через пять лет после дня пленения мужа.*

Подобные законы видимо неизменно обосновывались лишь здравым смыслом. Так, даже в XIX в. (там же), соответствующие вероятности были весьма простыми:

Гражданский кодекс подразделяет отсутствие на три периода. 1. Презумпция отсутствия. Здесь сомнения в том, что отсутствующий жив, весьма малы. 2. Объявление отсутствия. Здесь предположение о смерти преобладает над предположением о жизни. […] *3. Вступление в окончательное владение* [имуществом]. *Со временем предположение о смерти усиливается почти до достоверности.*

9. Соответствующие результаты **де Витта** (п. 2.3.3) и **Гюйгенса** (п. 4.2.3) еще не были опубликованы. **Кондорсе** (1787, с. 498) даже переоценил сочинение **Николая Бернулли**: "Со времени его работы исчисление вероятностей стало темой исследований философов и сочинений математиков". Правильнее было бы назвать **Якоба Бернулли**!

10. *Enc. Brit*., т. 4, 1965, с. 8. Автор продолжает: "Аналогичный контракт об оплате безопасности груза называется respondentia".

11. На указанную статью Хендрикса мы ссылаемся неоднократно и ее дату не будем больше указывать.

12. *Statutes of the Realm*, vol. 4, pt 2, pp. 978 – 979.

13. Тонтиной, по имени изобретателя, итальянского банкира **Лоренцо Тонти** (Hendriks 1863), называли группу покупателей пожизненной ренты, которая ежегодно распределялась между ее остающимися в живых членами. Доживавшие до преклонного возраста получали весьма солидные суммы. Если не учитывать примитивных форм страхования жизни в прежние времена (что, быть может, и не обязательно), то пожизненные ренты окажутся первым по времени видом страхования жизни, и именно так мы будем их называть, а страхование на случай смерти – вторым видом.

14. Аналогично развивалось страхование жизни и имущества в Японии (Noguchi 1925, с. 238): “Как и в средневековой Европе страхованием занимались гильдии, так и в Японии за тысячу лет до этого возникли те же понятия и та же организация обоюдной помощи”. И на с. 242, но, к сожалению, снова без всяких ссылок:

Большинство европейских исследователей теперь полагает, что страховая наука, как и соответствующие понятия, развились из деятельности гильдий, тогда как формы страхования возникли из морского страхования. Точно то же имело место в Японии.

15. См. также замечание **Гюйгенса** о пари по поводу продолжительности жизни в п. 4.2.3.

16. *Многочисленные исследования допускают* [или: признают], *что страхование жизни вышло на самостоятельный путь не через парадный вход, а протиснувшись сквозь отверстие в борте морского страхования.*

В тексте этого богатого и пленительного нематематического источника (O’Donnell 1936, с. 78), который мы не изучили, отсутствуют ссылки на приведенную Библиографию. Мы также не видели двух других книг по истории страхования, упомянутых Seal (1954), а именно Braun (1925) и Trenery (1926), но всё-таки полагаем, что не упустили здесь ничего существенного.

17. Более точно (Du Pasquier 1910, с. 484 – 485), “папская булла 1423 г. наконец [после примерно столетнего запрета] разрешила покупку пожизненных рент”.

18. “Самый ранний достоверный договор страхования жизни был […] заключен в 1308 г.” (Du Pasquier 1910, с. 484). В другом источнике (*Mémoires* 1898, с. 186 – 193) приводятся, однако, тексты удостоверений пожизненной ренты 1228 и 1229 гг. Такую ренту приобрел для себя **Челлини** (опубл. 1728/1965, с. 423), см. также Adles (1853): “Я отказался от денег за его портрет […] и он согласился удержать их, выплачивая мне взамен 15% [годовых] пожизненно”.

19. Мы упоминаем **Хюдде** неоднократно. О его математических работах см. Haas (1956). Период издания Полного собрания сочинений **Гюйгенса**, 1888 – 1950, мы не будем более указывать.

20. Сведения о тогдашнем положении в Англии см. **Пирсон** (1978, с. 134 – 135).

21. *Лафарж смог учредить* […] *сберегательную кассу, а именно знаменитую* *тонтину Лафаржа, успех которой оказался призрачным, но которая послужила образцом первых сберегательных касс* (*Grand Larousse Enc.*, т. 7, 1962, с. 542).

22. Seal (1949) использовал данные ранних тонтин для изучения законов смертности. Он утверждает, что схемы голландских пожизненных рент XVI в. фактически приравнивали их к тонтинам. Он также ссылается на письмо **Хюдде**, написанное на родном языке автора, и разобрать его мы не смогли. Ссылаясь и на **Депарсье**, Сил использовал сведения о смертности французских монахов в 1607 – 1669 гг.

23. Первое успешное общество страхования жизни в Англии было учреждено в 1720 г. (Chaufton 1884, с. 351).

24. *В период рискованных финансовых мероприятий, закончившихся кризисом 1720 г., некоторое число небольших фирм разорилось.* […] *Рискованные сделки были обычными в течение всего века.* […] *Между 1800 и 1870 гг. было создано около 500 фирм* […] *некоторые из них притом явно жульнических* (*Enc. Brit.*, т. 13, 1965, с. 1094).

25. Не исследуя истории вопроса, **Бьенеме** (1839) заметил, что необходимость выплаты сложных процентов отрицательно влияет на деятельность страховых обществ: даже небольшую потерю, понесенную в начале операций, нельзя будет покрыть такой же последующей прибылью. Он заключил, что успех обеспечивается только многочисленностью полисов.

26. Hendriks (с. 253 – 255) собрал высказывания о **де Витте**, к которым можно добавить мнение **Гюйгенса** 1659 г. (Гюйгенс, т. 2, с. 411 – 412): "Он сведущ в геометрии и алгебре и неизменно занимается ими несмотря на взваленную на него серьезную работу". Современную биографию де Витта см. Romein & Romein-Versschoor (1946), также Biermann & Faak (1959).

27. Или по крайней мере "Благородным и могучим властелинам государства" (Хендрикс, с. 232). Этот автор (с. 257) обнаружил памятную *Записку* **де Витта** в *Resolutions of the States of Holland and West Friesland* 1671 г. (но указал лишь английское название этого источника, который, видимо, содержал перепечатку *Записки*). Во всяком случае, Хендрикс заметил опечатку, которой не было в исходной *Записке* 1671 г. Теперь она перепечатана с сохранением исходной пагинации без перевода (**J. Bernoulli** 1975, с. 327 – 350) с комментарием Kohli & **van der Waerden** (1975, с. 525 – 535).

28. Энестрём вряд ли знал, что Хендрикс (с. 246) упомянул фактическую предпосылку **де Витта**, хотя не сказал ничего про ее происхождение.

29. Эту задачу возможно предложил **Хюдде**. Во всяком случае, **де Витт** упомянул полученное им от того письмо с ее обсуждением, см. также ниже.

30. Соответствующие результаты **Гюйгенса** (п. 4.2.3) также оставались неизвестными. В другом письме того же 1671 г. **де Витт**

(Хендрикс с. 102) извещает **Хюдде**, что “число, которое Вы [которое тот] недавно предложили в качестве отношения шансов игроков в quinque novem, точно совпадает с недавно вычисленным мной”. Вариант этой не лишенной интереса игры см. **Монмор** (1708/1713, с. 173).

31. Записка **де Витта** стала известной через два или три поколения после ее появления (van Brakel 1976, с. 130 – 131, Прим.).

32. Сведения в этом источнике должным образом подкреплены ссылками. См. также John (1884, с. 17 – 34), Meitzen (1903, §§ 2 – 4) и Elsner (1974).

33. В письме 1685 г. **Петти** (1928, с. 157 – 159) упрекает покойного **Паскаля** за употребление “многих слов и фраз, […] которые не имеют определенного разумного значения и потому не могут породить четких понятий, смысла или знания у читателя”. Редактор, видимо, правильно называет соответствующую статью (а точнее обрывок из посмертных *Мыслей* Паскаля) Différence entre l’esprit de Géométrie et l’esprit de finesse (Pascal 2000, с. 742 – 744). В другом письме 1667 г. Петти (1927, т. 2, с. 22)

> *Про*[*сит*] *разрешения у мира отказываться от слов бесконечный, непостижимый при* [характеристике] *всемогущего Бога.* [Эти слова] *пригодны не для моих рассуждений, а скорее для поклонения, они не способствуют нашему пониманию.*

Впрочем, он может быть и ошибался в какой-то степени [I, Прим. 8].

34. Лейбниц не был сооснователем политической арифметики, но представлял себе страхование жизни и имущества как весьма важный социальный институт (1680?). Sofonea (1957a) высоко оценил эту рукопись и заметил, что Лейбниц относился к человеку как к члену общества и предвосхитил современные социальные усилия предотвратить или ослабить последствия несчастных случаев и пр.

35. Ср. его же не очень понятные высказывания (1674, с. 15):

> *1. Место – это идея материи или рассматриваемой материи. 2. Количество или произвольное обстоятельство места.* […] *5. Положение или несколько мест, рассматриваемых совместно. 6. Фигура, количество и положение, рассматриваемые совместно.* […] *9. Время, идея движения.*

Там же (с. 82 – 88) **Петти** утверждает, что для лиц в возрасте 16 лет и a ($a < 16$), правдоподобия дожить до 70 лет относятся как $\sqrt{16} : \sqrt{a}$, а для лиц в возрасте a и b ($a, b > 16$) правдоподобие для b пережить a относится к правдоподобию противоположного события как $\sqrt{a} : \sqrt{b}.$ Он не сослался на таблицу **Граунта** (п. 2.4.3), которая никак не подтверждала этих выводов, но сопутствующие примеры Петти в основном относились к возрастам 16, 26 и 36 лет, непосредственно использованным Граунтом.

36. Высказывания о невозможности случайного происхождения мира см. [I, п. 9.1].

37. Возможно ли, что основатель евгеники, **Гальтон**, и его первые последователи усматривали какую-либо связь своего творчества с **Зюссмильхом** (или **Петти**)?

38. Даже в этом случае **Петти** следовало бы считать соавтором *Наблюдений.* Приведем, однако, слова **Граунта** из его Посвящения своих *Наблюдений* Лорду Джону Робертсу: "Направив свои мысли (не знаю по какому случаю) на Бюллетени о смертности …" И вот малоизвестная фраза Петти (1674) из Посвящения этого сочинения Лорду Броукнеру, первому президенту Королевского общества: "Я (как и автор тех *Наблюдений*) посвятил это Рассуждение также и …"

39. Халл (**Петти** 1899, т. 1, с. LII) заметил, что Петти рассуждал даже о количестве морской рыбы и дикой птицы в конце каждого тысячелетия после Потопа. Неудивительно, что его статистические оценки были часто ошибочными, но всё же именно он был первым сторонником применения новой *игрушки*. Яркую характеристику Петти см. Гринвуд (1928, с. 80; 1941 – 1943/1970, с. 73).

40. *Статистическая музыка* **Граунта** оказалась здесь всё же малопонятной. Указанное предположение см. Граунт (1662/1939, с. 32 или 2005, с. 39 – 40).

41. **Борткевич** (1907) заявил, что **Лейбниц** (1683) неверно подсчитал нынешнюю стоимость пожизненной ренты. Свою статью, как и многие другие, он написал методологически неудовлетворительно, – чтобы понять хотя бы что именно Борткевич счел неверным, надо было бы прочесть все его 37 страниц, – и никто, кажется, так и не сослался на его утверждение.

Несколько заметок K. R. Biermann о Лейбнице см. в журнале *Forschung und Fortschritte* (т. 28, 1954; т. 29, 1955, две заметки; т. 30, 1956) и в *Sudhoffs Archiv* (т. 51, 1967), а также его совместную с M. Faak статью, снова в *Forschung und Fortschritte* (т. 31, 1957).

42. Это ошибка: указанное сочинение **Петти** вышло лишь в 1690 г. Петти, правда, публиковал политико-арифметические исследования с 1682 г.

43. Объединение статистических данных отдельных стран, предпринятое во второй половине XIX в., оказалось исключительно трудным.

44. В 1704 г. **Лейбниц** "думал […] о создании Общества наук […] в Дрездене" (Couturat 1901, с. 522), одной из целей которого должно было стать "составление статистики населения". См. также Biedermann (1882, с. 457).

45. Подробное изучение лейбницевского вопросника представляется всё же желательным.

46. Впрочем, ничего больше об оценках населения **Лейбниц** не сказал.

47. "Тот день, когда **Галлей** […] доложил о своем сочинении, можно считать днем рождения статистической науки" (Böckh 1893, с. 1). Эта оценка всё же завышена: не названы ни **Граунт**, ни **Петти**. Но вот более основательные мнения. Галлей обработал свои материалы так, как это сделал бы современный актуарий (**Пирсон**

1978, с. 78). Его мемуар – “начало всего развития современной техники страхования жизни” (Sofonea 1957b, p. 31*). Он оказался “исключительно важным для статистики страхования” (Хальд 1990, с. 141).

48. Так, обсуждая смертность от различных заболеваний, **Граунт** прежде всего пытался исключить систематические влияния, и, например, разумно предположил, что смертность от сифилиса была сильно преуменьшена: причиной смерти тех, кто умирал от него, обычно называли язвы.

49. Вот начало небольшого дополнения к основному мемуару (1694/1942, с. 19 или 2005, с. 119): “То, что я представил в своем предыдущем трактате, было в основном предназначено для вычисления стоимости пожизненных рент”. **Галлей** далее привел замечания о вычислительной стороне дела и включил общее морально-этическое соображение (1942, с. 21/2005, с. 21):

Могущество и слава государя состоят в многолюдности его подданных […]. *Следует отбить охоту от холостяцкой жизни.* […] *А тех, у кого много детей, надо поощрять такими законами, как римский* [закон о поощрении семей с тремя и более детьми], *но в особенности обеспечивать существование бедных действенным попечением по отысканию им работы.*

Редактор издания переписки и рукописей Галлея (Галлей 1932, с. 232) со ссылкой на *Biogr. Brit.* 1757 г. указал, что в 1693 г. тот “составил рукопись, описав в ней метод вычисления стоимости ренты на одну, две и три жизни. […] Ее постановили опубликовать в *Transactions* [*of the Royal Society*]”. И всё-таки ничего подобного не отмечено в списке его сочинений […], который приложен в том же источнике.

50. Почти через столетие после появления мемуара **Галлея** Томас Пейн (Kruskal & Pieters 1973, с. 106) убеждал в необходимости социальной защиты стариков. Он “несколько раз пересчитывал прохожих на улицах Лондона […] и обнаружил, что в среднем один из 16 или 17” был старше 50 лет. Ссылаясь на несколько источников, авторы предполагают, что доля этих более старых людей должна была быть равна 17%, или от 13 до 20% (1/17 = 5.9%, 1/16 = 6.2%). Интересно, что по таблице Галлея, составленной для иного населения и намного более раннего периода, эта доля оказалась равной 18%!

51. **Муавр** (1718/1756, с. x; перевод: Шейнин 2006, с. 90 – 91) принес ему “свою чистосердечную благодарность” за “поучительные соображения, которые он охотно сообщал мне [Муавру] на протяжении нашей [их] 25-летней дружбы”. Несколько строк об их взаимоотношениях см. у Walker (1934/1956, с. 356).

52. Первым это распределение ввел **Николай Бернулли** (п. 2.2), что осталось незамеченным.

53. Вот аналогичный пример, хоть и без соответствующей ссылки (Elsner 1974, с. 136):

> *Томас Кромвель, дальний родственник* […] ***Оливера Кромвеля,*** […] *приказал вести в церковных книгах систематические записи рождений и смертей. В Бранденбурге* [в Германии] *это же стало обязательным* […] *с 1573 г.*

Заметим, впрочем, что даты жизни Томаса и Оливера весьма различны: 1485 – 1540 и 1599 – 1658.

54. Эта переписка, видимо, еще не перепечатана в продолжающемся многосерийном и многотомном издании сочинений и писем **Лейбница**.

55. Пирсон (1978, с. 75 – 78) привел в английском переводе письма Жюстелля Нойману и ответное письмоНоймана (оба – 1692 г.). Жюстелль благодарил за присланные и добросовестно собранные статистические данные по г. Бреслау, заметил, что количество ежегодных смертей в нем не достигает 2680 и упомянул, что Нойман сообщил ему название (своего собственного?) трактата о кометах.

Нойман сообщил Жюстеллю о своем намерении проводить геомагнитные наблюдения и классифицировать растения, упомянутые в Библии. В этих письмах, второе из которых привел также Гретцер (с. 33 – 37), непонятны фразы о смертности католиков в Бреслау: Жюстелль указал, что Нойман включил в свои сведения и протестантов, и католиков, сам же Нойман это отрицал, хоть и не совсем явно. В свою очередь, Гретцер (с. 33) указал, что данные Ноймана относились к четырем церковным приходам Бреслау.

Жюстелль был хранителем Королевской библиотеки в Англии и секретарем Королевского общества, см. его жизнеописание у **Пирсона** (с. 80 – 81).

56. Слыхал ли Нойман о **Граунте** и **Петти**?

57. Весьма последовательно Оре добавил, что формула (3.5а) была общеизвестна, – в противном случае, как он добавил, **Паскаль** упомянул бы ее. Но если эта формула была элементарной, она не заслуживала бы обсуждения (во всяком случае, с **Ферма**).

58. Эти слова по сути повторил **Монмор** (1708/1713, с. 73).

59. Гюйгенс (1673, часть 1) обсуждал различные погрешности маятниковых часов. Эта тема относится к предыстории планирования эксперимента (иначе, к детерминированной теории ошибок).

60. Несколько простых задач того же типа **Гюйгенс** решил еще в 1656 г. (т. 1, с. 426 – 427), но без пояснений, и добавил: “я с нетерпением ожидаю, что скажет месье **Ферма**, а до того времени Вы разрешите мне придержать [метод] решения в секрете”.

61. Гюйгенс (т. 14, с. 156 – 163) решил и аналогичную задачу примерно тем же методом в рукописи 1676 г.

62. Приложение 1 1656 г., посвященное разделу ставки между тремя игроками, было возможно написано в связи с перепиской автора с Каркави. Остальные приложения относятся к 1665 – 1688 гг. В большинстве случаев их датировал Кортевег, редактор тома 14 *Полного собрания сочинений* **Гюйгенса**.

63. Гюйгенс ошибся в обозначениях белых и черных жетонов; в нашем тексте его ошибка исправлена. Другая ошибка в формуле (4.3) имеется только во французском тексте письма Гюйгенса (там же).

64. Хюдде (**Гюйгенс** т. 5, с. 406) полагал, что в этом случае игра заканчивалась вничью.

65. Почему множественное число?

66. В письме 30 октября 1669 г. Людовик указал, что **Граунт** включил в число новорожденных выкидышей и мертворожденных, а в Приложении 1 к письму 21 ноября того же года **Христиан** повторил это утверждение. На самом же деле Граунт, поясняя свою таблицу продолжительности жизни, четко пояснил противное.

67. Гюйгенс таким образом вовсе не рекомендовал применять вероятную, а не среднюю продолжительность жизни, как это ошибочно указали White & Hardy (1970). О связи между страхованием жизни и пари см. п. 2.3.2. И Христиан Гюйгенс (с. 524 – 526 и 484 – 485; перевод: Шейнин 2007а, с. 64 и 63), и его брат Людовик (с. 484 – 485) упоминали пари о сроках жизни людей.

68. Он таким образом предложил определять стоимость пожизненной ренты на двоих.

69. Тем более, что в те времена не было сведений о различии смертности мужчин и женщин.

70. Гюйгенс (с. 538/Шейнин (2007а, с. 71) продолжал:

Вот довольно хорошенький вопрос […], *который я еще не решил, хотя вижу способ, как это сделать. Два человека, по 16 лет каждому. Как долго по нашему ожиданию они проживут вместе не умирая? И также, через какое время они оба умрут? Это по существу два разных вопроса, и следует подумать о каждом.*

Но это – задача **[4.8]**, так что замечание Гюйгенса неясно.

71. Муавр (1718/1756, с. ii; перевод: Шейнин 2006, с. 81) “безусловно решил отвергнуть” метод **Гюйгенса**.

72. Гюйгенс не мог ожидать ничего нового у **де Витта**, но неясно, почему он не упоминал своего предшественника в своих письмах.

73. Гюйгенс выписал 11 нулей.

74. “Вероятность того, что среди всех небесных тел населено лишь одно, […] ему казалась исключительно низкой”, – пояснение редактора на с. 534 того же тома 21. Мы не стали изучать это сочинение Гюйгенса, но всё же заметили досадную ошибку: Юпитер в 20 раз больше Земли, см. с. 115 английского издания (по диаметру, приблизительно), а потому (с. 78) его обитатели должны быть больше размером. На самом деле, будь Юпитер обитаем, его жители должны были бы быть крохотными.

Библиография

Бернулли Я. (1986), *О законе больших чисел.* Ред. Ю. В. Прохоров. М.

--- (2006), *Искусство предположений*, части 1 – 3. Берлин. Также www.sheynin.de

Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики, математики страхового дела*. Берлин. Также www.sheynin.de

Мрочек В. Р. (1934), Возникновение и развитие теории вероятностей. *Тр. Инст. истории техники и техники*, сер. 1, вып. 2. Л., с. 45 – 60.

Райхер В. К. (1947), *Общественно-исторические типы страхования*. М. – Л.

Федорович Л. В. (1894), *История и теория статистики.* Одесса.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1971), Newton and the classical theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 7, pp. 217 – 243.

--- (2001), Social statistics and probability theory in the 19th century. *Hist. Scientiarum*, vol. 11, pp. 86 – 111.

---, составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de Включает переводы переписки Паскаля и Ферма, трактата Гюйгенса 1657 г., небольших заметок Ньютона, предисловий книг Монмора 1713 г. и Муавра 1756 г.

---, составитель и переводчик (2007a), *Вторая Хрестоматия по теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de Включает переводы трактата Паскаля Об арифметическом треугольнике, и его *Пари*, письма Каркави Гюйгенсу 1656 г. и переписки Гюйгенса с братом и речи Лапласа о запрещении лотереи.

---, составитель и переводчик (2007b), *Третья Хрестоматия по теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de Включает перевод мемуара Лейбница 1680 – 1683 гг.

--- (2007c), Euler’s work in probability and statistics. В книге *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*. Heber City, Uta, pp. 281 – 316.

Adler G. и др. (1907), *Festgaben für W. Lexis*. Jena.

Adles L. (1853), Note on the early history of life assurance. *Assurance Mag*., vol. 3, p. 64.

Arnauld A., Nicole P., Арно А., Николь П. (1662), *Logique de Port-Royal*. Paris, 1992. [*Логика или искусство мыслить*. М., 1991.]

Bernoulli J., Бернулли Я. (рукопись; 1975), Aus der Meditationes. В книге автора (1975, pp. 21 – 89).

--- (1713), *Ars conjectandi*. В книге автора (1975, pp. 107 – 259). Нем. перевод (1899): *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Frankfurt/Main, 1999. Русский перевод части 4 в книге автора (1986, с. 23 – 59), частей 1 – 3: Бернулли Я. (2006).

--- (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel.

Bernoulli N. (1709), Dissertatio inauguralis mathematico-juridica De usu artis conjectandi in jure. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 289 – 326).

Biedermann K. (1882), Von und aus noch ungedruckten Leibniz’schen Handschriften. *Westermann’s Monatshefte*, Jg. 26., Bd. 52, pp. 453 – 462.

Bienaymé I. J. (1839), Sur un effet de l’intérêt composé. *Procès verb. Soc. Philomathique Paris*, pp. 60 – 65. Извлечение из *L’Institut, J. general sociétés et travaux scient.,* 1e sect., No. 286.

Biermann K.-R., Бирман К. Р. (1957), Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей. *Историко-математич. исследования*, вып. 10, с. 649 – 670.

Biermann K.-R., Faak M. (1959), Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. Witt. *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 33, pp. 168 – 173.

Böckh R. (1893), E. Halley als Statistiker. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, t. 7, No. 1, pp. 1 – 24.

Borel É. (1943, франц.), *Probabilities and Life*. New York, 1962.

Bortkiewicz L. von (1907), Wie Leibniz die Diskontierungsformel begründete. В книге Adler и др. (1907, pp. 59 – 96).

van Brakel J. (1976), Some remarks on the prehistory of the concept of statistical probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 16, pp. 119 – 136.

Braun H. (1925), *Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik*. Berlin, 1963.

Cantor M. (1898), *Politische Arithmetik*. Leipzig.

Cellini B., Челлини Б. (рукопись 1558 – 1565, опубл. 1728), *Autobiography*. New York, 1965. *Жизнь*. М. – Л., 1931.

Chaufton A. (1884), *Les assurances*, t. 1. Paris.

Cohen J. (1957), Subjective probability. *Scient. American*, vol. 197, No. 5, pp. 128 – 138.

Cohen J., Chesnik E. I. (1970), The doctrine of psychological chances. *Brit. J. Psychology*, vol. 61, pp. 323 – 334.

Cohen J., Chesnik E. I., Haran D. (1971), Evaluation of compound probabilities in sequential choice. *Nature*, vol. 232, pp. 414 – 416.

Commelin C. (1693), *Beschryvinge der Stadt Amsterdam*, t. 2. Amsterdam.

Condorcet M. J. A. N. (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix.* Paris. [New York, 1972.]

--- (прочтено 1787), Discours sur l'astronomie et le calcul des probabilités. *Oeuvr. Compl.*, t. 1. Paris, 1847 – 1849, pp. 482 – 503.

--- (1788), Des impôts volontaires, et des impôts sur le luxe. В сочинении автора Essai sur la constitution et les fonction des assemblées provinciales. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1847, pp. 387 – 406.

--- (1789), Absent. В книге Rashed (1974, pp. 8 – 11).

Couturat L. (1901), *La logique de Leibniz.* Paris.

Dale A. I. (1998), De Méré paradoxes. *Math. Scientist*, vol. 23, pp. 74 – 82.

De Moivre A., Муавр А. (1712, латин.), De mensura sortis, or, On the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 229 – 262.

--- (1718), *Doctrine of Chances*. Последующие издания 1738, 1756. Перепечатка последнего издания: Нью-Йорк, 1967.

--- (1725), Treatise of annuities on lives. В книге автора (1756, pp. 261 – 328).

Descartes R., Декарт Р. (1644), *Les principes de la philosophie. Oeuvres*, t. 9, No. 2. Paris, 1978. *Начала философии. Избр. произв.* Б. м., 1950, с. 409 – 544.

Elsner E. (1974), Entwicklungslinien der Statistik. *Humanismus und Technik*, Bd. 18, pp. 132 – 155.

Émerigon B.-M. (1783), *Traité des assurances etc.*, t. 1. Marseille.

Eneström G. (1896, шведск.), Sur la méthode de J. de Witt (1671) pour le calcul de rentes viagères. *Archief voor de verzerkerings-wetenschap*, t. 3, 1897, pp. 62 – 68.

Fermat P. (1894), *Oeuvres*, t. 2. Paris.

Fourier J. B. J. (1826), Rapport sur les tontines. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 617 – 633. Доклад подготовили Poisson, Lacroix, докладчик Fourier.

Franklin J. (2001), *The Science of Conjecture.* Baltimore.

Freudenthal H., Steiner H. G. (1966), Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik. В книге *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 4. Ред. H. Behnke. Göttingen, pp. 149 – 195.

Gani J. (1982), Newton on a "Question touching ye different Odds upon certain given Chances upon Dice". *Math. Scientist*, vol. 7, pp. 61 – 66.

Gini C. (1946), Gedanken zum Theorem von Bernoulli. *Schweiz. Z. für Volkswirtschaft und Statistik*, 82. Jg, pp. 401 – 413.

Glass D. V. (1974), Graunt and his *Natural and Political Observations. Proc. Roy. Soc.*, vol. B159, pp. 2 – 37.

Graetzer J. (1883), *E. Halley und C. Neumann.* Breslau.

Graunt J., Граунт Дж. (1662), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Baltimore, 1939. Русский перевод: *Естественные и политические наблюдения над бюллетенями о смертности* в книге Граунт, Галлей (2005, с. 5 – 105).

Greenwood M. (1928), Graunt and Petty. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 91, pp. 79 – 85.

--- (1940), A statistical mare's nest? Там же, vol. 103, pp. 246 – 248.

--- (1941 – 1943), Medical statistics from Graunt to Farr. *Biometrika*, vol. 32, pp. 101 – 127, 203 – 225; vol 33, pp. 1 – 24. Перепечатка в книге Pearson & Kendall (1970, pp. 47 – 120).

Guhrauer G. E. (1863), Leben und Verdienste Caspar Neumann's. Nebst seinem ungedruckten Briefwechsel mit Leibniz. *Schlesische Provinzialblätter*, N. F., Bd. 2, pp. 7 – 17, 141 – 151, 202 – 210, 263 – 273.

Guy W. A. (1885), Statistical development with special reference to statistics as a science. *Jubilee Volume Roy. Stat. Soc.*, pp. 72 – 86.

Haas K. (1956), Die mathematischen Arbeiten von J. H. Hudde (1628 – 1704). *Centaurus*, Bd. 4, pp. 235 – 284.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* New York.

Halley E., Галлей Э. (1694), *An estimate of the degree of mortality of mankind*. Baltimore, 1942. Русский перевод: *Оценка степеней смертности рода человеческого* и т. д. в книге Граунт, Галлей (2005, с. 107 – 118).

--- (1932), *Correspondence and Papers*. Ред. E. F. MacPike. Oxford.

Hebrard P. (2004), La détresse des Pays-Bas: De Witt, Hudde et des rentes viagères d'Amsterdam 1671 – 1673. *Math. Inform. Hum.*, No. 166, pp. 47 – 63.

Hendriks F. (1852 – 1853), Contributions to the history of insurance with restoration of […] De Witt's Treatise on Life Annuities. *Assurance Mag.*, vol. 2, pp. 121 – 150, 222 – 258; vol. 3, pp. 93 – 120.

--- (1863), Notes on the early history of tontines. *J. Inst. Actuaries, or Assurance Mag.*, vol. 10, pp. 205 – 219.

Huygens C., Гюйгенс Х. (1657), De calcul dans les jeux de hasard. В книге автора (1888 – 1950, t. 14, pp. 49 – 91).

--- (1673), Horologium oscillatorium. Там же, t. 18, pp. 27 – 438. *Маятниковые часы*. Б. м., 1951.

--- (1690a), Traité de la lumière. Там же, t. 19, pp. 450 – 548. *Трактат о свете*. М. – Л., 1935.

--- (1690b), Réflexions sur la probabilité de nos conclusions. В книге автора (1888 – 1950, t. 21, pp. 529 – 568).

--- (1698), Cosmotheoros. Там же, с. 653 – 842. *The Celestial Worlds Discovered* (1698). London, 1968. *Книга мирозрения*, 1717 и 1724.

John V. (1884), *Geschichte der Statistik*. Stuttgart.

Kendall M. G. (1956), The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, vol. 43, pp. 1 – 14. Перепечатано в книге Pearson & Kendall (1970, pp. 19 – 34).

--- (1960), Where shall the history of statistics begin? *Biometrika*, vol. 47, pp. 447 – 449. Перепечатано там же, с. 45 – 46.

Kendall, M., Plackett R. L. (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.

Kohli K. (1975), Kommentar zur Dissertation von N. Bernoulli. В книге Bernoulli J. (1975b, pp. 541 – 556).

Kohli K., van der Waerden B. L. (1975), Bewertung von Leibrenten. Там же, с. 541 – 556.

Kruskal W. H., Pieters R. S. (1973), T. Paine and social security. В книге *Statistics by Example. Exploring Data*. Reading, Mass., pp. 105 – 111.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Прохоров Ю. В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.

--- (прочтено 1819, опубл. 1868), Sur la suppression de la lotérie. *Oeuvr. Compl.*, t. 14. Paris, 1912, pp. 375 – 378.

Lazarsfeld P. F. (1961), Notes on the history of quantification in sociology etc. *Isis*, vol. 52, pp. 277 – 333. Перепечатано в книге Kendall & Plackett (1977, pp. 213 – 269).

Leibniz G. W. (рукопись 1668 – 1669?), Demonstrationum catholicarum conspectus. В книге автора (1971, pp. 494 – 500).

--- (рукопись 1669 – 1670?), Elementa juris naturalis. В книге автора (1866, с. 431 – 485).

--- (рукопись 1680?, опубл. 1872), Öffentliche Assecuranzen. В книге автора (1986, pp. 421 – 432).

--- (рукопись 1680a, опубл. 1866), Entwurf gewisser Staatstafeln. Там же, с. 340 – 349.

--- (рукопись 1680b, опубл. 1866), Von Bestellung eines Registratur-Amtes. Там же, с. 376 – 381.

--- (рукопись 1680c, опубл. 1866), Vorschlag zu einer Medizinal-Behörde. Там же, 370 – 375.

--- (рукопись 1682, опубл. 1866), Quaestiones. В книге автора с немецким переводом (2000, pp. 520 – 523).

--- (1680 – 1683), Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes. Там же, с немецким переводом, с. 428 – 445.

--- (рукопись 1680 – 1683, опубл. 1986), De longaevitata II. Там же, с немецким переводом, с. 496 – 501.

--- (рукопись 1686), Allgemeine Untersuchungen über die Analyse der Begriffe und wahren Sätze. В книге автора (1960, pp. 241 – 303).

--- (рукопись 1683), Meditatio juridica-mathematica simplice. В книге автора, с немецким переводом (2000, pp. 272 – 293).

--- (1866), *Die Werke gemäß seinem handschriftlichen Nachlasse in der Kgl. Bobliothek zu Hannover*. Редактор O. Klopp. 1. Reihe, Bd. 5. Hannover.

--- (1887), *Philosophische Schriften*, Bd. 3. Hildesheim, 1965.

--- (1960), *Fragmente zur Logik.* Berlin.

--- (1970), *Sämtliche Schriften und Briefe.* 1. Reihe, Bd. 8. Berlin.

--- (1971), *Sämtliche Schriften und Briefe*, 6. Reihe, Bd. 1. Berlin.

--- (1986), *Sämtliche Schriften und Briefe.* 4. Reihe, Bd. 3. Berlin.

--- (2000), *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik.* Berlin. Редакторы Knobloch E., Schulenburg J.- Mathias, Graf von der.

Marmonier H. (1885 – 1892), Absence. *La Grande Enc.*, t. 1, pp. 145 – 147. Без года. Годы издания *Энциклопедии* указаны в *Grand Larousse*, t. 4, 1961, p. 527.

Meitzen A. (1903), *Geschichte, Theorie und Technik der Statistik.* Stuttgart – Berlin.

Mémoires (1898), *Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas.* Amsterdam.

Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hasard.* Paris, 1713. Перепечатка второго издания: Нью-Йорк, 1980.

Newton I., Ньютон И. (1704, англ.), *Оптика*. М., 1954.

--- (1728), *Chronology of Ancient Kingdoms Amended.* London. [London, 1770.]

--- (1958), *Papers and Letters on Natural Philosophy. Cambridge.* [Cambridge, Mass. – London, 1978.]

--- (1967), *Mathematical Papers*, vol. 1. Cambridge.

Noguchi S. (1925), Die Entwicklung des Versicherungsgedankens in Japan. *Z. für die ges. Versicheruungs-Wiss.*, Bd. 25, pp. 238 – 253.

O'Donnell Terence (1936), *History of Life Insurance*. Chicago.

Ore O. (1960), Pascal and the invention of probability theory. *Amer. Math. Monthly*, vol. 67, pp. 409 – 419.

Pascal B., Паскаль Б. (1654), À la très illustre Académie Parisienne de Mathématique. В книге автора (1998 – 2000, t. 1, pp. 169 – 173).

--- (1665), Traité du triangle arithmétique. Там же, t. 1, pp. 282 – 327.

--- (1669), Pensées. Там же, t. 2, pp. 543 – 1046. *Мысли.* М., 1899. *Избранные мысли*. СПб, 1904.

--- (1998 – 2000), *Oeuvres Complètes*, tt. 1 – 2. Paris.

Du Pasquier L. G. (1910), Die Entwicklung der Tontinen bis auf die Gegenwart etc. *Z. schweiz. Statistik*, 46. Jg, pp. 484 – 513.

Pearson K. (1926), A. De Moivre. *Nature*, vol. 117, pp. 551 – 552.

--- (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries. Lectures 1921 – 1933*. Ред. E. S. Pearson. London.

Pearson K., Kendall M. G. (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London.

Petty W., Петти В. (1662), Treatise of taxes and contributions. В книге автора (1899, vol. 1, pp. 1 – 97).

--- (1674), *Discourse Read before the Royal Society*. London.

--- (1690), *Political Arithmetic*. В книге автора (1899, vol. 2, pp. 239 – 313).

--- (1691), Verbum sapienti. Там же, vol. 1, pp. 99 – 120.

--- (1899), *Economic Writings*, vols 1 – 2. London, 1997.

--- (1927), *Papers*, vols 1 – 2. London. [London, 1997.]

--- (1928), *Petty – Southwell Correspondence 1676 – 1687*. London.

--- (1940), *Экономические и статистические работы*. М. Переводы основных сочинений автора из двухтомника 1899 г., и в том числе всех трех, перечисленных выше.

Ptoukha M. (1938), Graunt, fondateur de la démographie. В книге *Congr. intern. de la population*. Paris, 1937. Paris, t. 2, pp. 61 – 74.

Rashed R. (1974), *Condorcet, mathématique et société*. Paris.

Reiersol O. (1968), Notes on some propositions of Huygens in the calculus of probability. *Nord. Matem. Tidskr.*, t. 16, No. 3, pp. 88 – 91.

Rényi A., Реньи А. (1969?, венг.; 1969, нем.), Письма о вероятности. В книге автора *Трилогия о математике*. М., 1980, с. 121 – 198.

Romein J., Romein- Versschoor Annie (1946), J. de Witt. В книге авторов *Anherren der Höllandischen Kultur*. Bern, pp. 277 – 312.

Schlözer A. L. (1804), *Theorie der Statistik nebst Ideen über das Statium der Politik überhaupt*. Göttingen.

Schneider I., составитель (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Darmstadt.

Seal H. L. (1949), Mortality data and the binomial probability law. *Skand. Aktuarietidskrift*, No. 3 – 4, pp. 188 – 216.

--- (1954), A budget of paradoxes. *J. Inst. Actuaries Students' Soc.*, vol. 13. Перепечатано в книге Kendall & Plackett (1977, pp. 24 – 29).

Sofonea T. (1957a), Leibniz und sein Projekt zur Errichtung staatlicher Versicherungsanstalten. *Schweiz. Versicherungs-Zeitschrift*, Bd. 65, pp. 144 – 149.

--- (1957b), E. Halley (1656 – 1742) und seine Sterbetafel 300 Jahre nach seiner Geburt. *Het Verzerkerings Archief*, Bd. 34, pp. 31* – 42*.

Struyck N. (1739 или позже), Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine. *Oeuvres*. Amsterdam, 1912, pp. 165 – 249.

--- (1752 или позже), Découvertes plus détaillées concertant l'état du genre humaine. Там же, с. 250 – 423.

Todhunter I. (1865), *History of Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Trenery C. F. (1926), *The Origin and Early History of Insurance*. London.

van der Waerden B. L., Ван дер Варден Б. Л. (1976), Переписка между Паскалем и Ферма по вопросам теории вероятностей. *Историко-математич. исследования*, вып. 21, с. 228 – 232.

Walker Helen M. (1934), A. De Moivre. В книге De Moivre (1718/1967, pp. 351 – 368).

White C., Hardy R. J. (1970), Huygens' graph of Graunt's data. *Isis*, vol. 61, pp. 107 – 108.

De Witt J. (1671), Waerdye van lyf-renten near proportie van los-renten. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 327 – 350). Англ. перевод: Hendriks (1852 – 1853, pp. 232 – 249).

III

Теория вероятностей и статистика в XVIII веке

Lo sviluppo della teoria della probabilità e della statistica.
Storia della Scienza, t. 6. Roma, Ist. Enc. Ital., 2002, pp. 529 – 541

1. Введение

Эта статья, рукопись которой мы представили на английском языке, появилась в печати в итальянском переводе (без библиографии); вопреки договору, английский текст не был опубликован. Ниже он приводится в переработанном переводе.

Теорию вероятностей можно начать с переписки **Паскаля** и **Ферма** 1654 г. и с посвященного ей трактата **Гюйгенса** 1657 г. Моральная достоверность и приложение статистических вероятностей обсуждались в философской литературе (Арно и Николь 1662), и это в известной степени повлияло на **Якоба Бернулли**, сыгравшего громадную роль в истории теории вероятностей (п. 2). Во второй половине XVII в. **Петти** и **Граунт** создали политическую арифметику, самые интересные и важные задачи которой относились к статистике населения и ее закономерностям. Имея в своем распоряжении весьма несовершенные данные, Граунт сумел составить первую таблицу продолжительности жизни и вывести важные заключения, относящиеся к медицинской статистике. В 1694 г. **Галлей** составил вторую такую таблицу, намного более точную, и заложил основы страховой математики. **Ньютон** применил вероятностные рассуждения для исправления древней хронологии, а в рукописи 1664 – 1666 гг. придумал простой мысленный опыт, чтобы показать, что еще не известная геометрическая вероятность могла иметь дело с иррациональными соотношениями шансов. Этот материал мы описали в статье [II], а предысторию теории вероятностей – в [I].

2. Первая предельная теорема

Искусство предположений, – посмертный и неоконченный труд **Якоба Бернулли**, – было опубликовано в 1713 г. Оно содержало перепечатку трактата Гюйгенса 1657 г. с важными комментариями; исследования в области комбинаторного анализа (с введением *чисел Бернулли*); решение задач на азартные игры; и, наконец, исчисление вероятностных предположений и доводов и доказательство бессмертной теоремы, – (слабого) *закона больших чисел* по терминологии **Пуассона**. В этой же последней части появилось (но не было использовано) не вполне, правда, формализованное *классическое* определение вероятности, обычно приписываемое **Лапласу**. Не было, однако, объявленного автором приложения “предыдущего учения в гражданских, моральных и экономических делах”.

Исчисление предположений и доводов также не было существенно использовано, но интересно, что оно фактически применяло теоремы сложения и умножения шансов, – т. е., неявно, вероятностей. Кроме того, эти вероятности были неаддитивными; нечто могло иметь 2/3 достоверности, а ему противоположное – 3/4 (1713/1986, с. 38). Подобные вероятности начал изучать Koopman (1940), Бернулли же мог исходить из средневековой теории пробабилизма, которая считала вероятным мнение каждого отца церкви.

И вот теорема Бернулли. Он рассматривал *испытания Бернулли*, а именно $\nu = (r + s)n$ независимых испытаний, в каждом из которых исследуемое событие А появлялось (как мы скажем) с вероятностью $p = r/(r + s)$. Если число наступлений А равнялось μ, то, как доказал Бернулли,

$$P(|\frac{\mu}{\nu} - p| \leq \frac{1}{r+s}) \geq \frac{c}{1+c},$$

где c было произвольно, а $\nu \geq 8226 + 5758 \lg c$. Таким образом, оказалось, что

$$\lim P(|\frac{\mu}{\nu} - p| < \varepsilon) = 1, \nu \to \infty. \qquad (1)$$

Это означало, что статистическая вероятность μ/ν равносильна теоретической p, поскольку при большом числе испытаний она обеспечивала моральную достоверность. Бернулли четко указал, что хотел установить, существует ли предел (1) и действительно ли он равен 1, а не какому-либо меньшему (положительному) числу, потому что в противном случае индукция (исходящая из ν испытаний) оказалась бы менее надежна, чем дедукция. Закон больших чисел обосновал применимость статистических исследований, и, следовательно, новый (после ее приложения к проблемам смертности [II, п. 4.2.3]) выход теории вероятностей из области азартных игр.

Добавление к пункту 2

Печальным обстоятельством следует считать появление статьи Чайковского (2001), состоящей поровну из самоуверенности и глупостей. В ней можно найти вымышленное описание закона больших чисел (ЗБЧ), произвольное истолкование многих других вопросов, равно как и внесение наукообразных терминов типа *познавательная модель* (= аксиома) и бессмысленные утверждения (*в годы торжества Максвелла и Дарвина баланс стали трактовать как равнодействующую всех случайностей*).

Якоб Бернулли будто бы пытался объединить априорную, апостериорную, моральную (которая оказалась субъективной) и логическую вероятности. Две последние являются трудно различимыми разновидностями априорной, и верно только то, что

Бернулли не отличал явно субъективной вероятности от объективной, что никак нельзя назвать попыткой объединения чего-то.

Бернулли “туманно” определил вероятность? Так ведь он привел четкий пример. Формулы (1) у него не было? Не было только в явном виде. А вообще ЗБЧ следует называть теоремой Кардано – Бернулли … Причин для этого великого переворота несколько. Во-первых, именно Кардано, а не Арно и Николь (1662), указал, что априорную вероятность можно определить по статистической, Бернулли же просто перепутал их с Кардано (на которого нет ссылки в библиографии автора). Ну, нет, не мог Бернулли перенять отсутствовавший у Кардано пример с нечестным нотариусом, и сам Чайковский (с. 45), не сознавая этого, глухо назвал по этому поводу французских авторов, у которых указанный пример-то и есть.

Во-вторых, Чайковский (с. 51) утверждает, что идея доказательства ЗБЧ, брать все исходы “ровно по одному разу”, содержалась у Кардано. Так этой идеей пользовались все ученые, начиная с Орема и Кеплера [I, п. 8.1.2], которых автор забыл.

В третьих, и это у него главное, Кардано косвенно заявил, что при бесконечно большом числе испытаний апостериорная вероятность совпадет с априорной, и Чайковский четко добавил, что эту идею Бернулли также перенял у Кардано. Повторяем, что точной ссылки на Кардано нет, и проверить автора трудно, нет и никакого доказательства, что Бернулли был знаком с сочинением Кардано. И неясно, высказался ли Кардано мимоходом и притом лишь в контексте азартной игры, или обратил особое внимание на свое утверждение.

Идея Кардано не была новой. В XVI в. мы видим утверждение о том, что с возрастанием числа измерений убывает погрешность среднего [IV, п. 5.5] и знаем [IV, Прим. 8], что Тихо наблюдал на нескольких инструментах, чтобы повысить точность своих результатов. Подобный подход и соответствующие идеи относятся к предыстории ЗБЧ, но не более того.

Так воздадим же бернуллиево Бернулли, а карданово – Кардано, Чайковский же пусть останется у разбитого корыта.

Далее. Бернулли, оказывается, не верил в случайность, – см., однако, начало части 4 его книги. Лейбниц “несомненно помог” Бернулли? Да, но совсем не в смысле автора, после смерти которого он к тому же приписал начало его работы в теории вероятностей своим “увещеваниям” [II, п. 2.4.4].

Идем дальше. Гоббс не признавал случайности? См. [I, п. 9.1]. Устойчивость статистических частот объяснил только Лексис? А мы думали, что Бернулли и Пуассон! Переиначив цитированное им же высказывание Паскаля, Чайковский заявил, что ни Паскаль, ни Ферма не высказали “даже смутных статистических догадок”. И они удовольствовались своей перепиской и к теории вероятностей не вернулись? Ферма вообще занимался другими исследованиями, Паскаль имел в виду ввести в науку *геометрию случая* (о чем автор упоминает!), но ушел в религию. Лаплас “изящно” доказал ЗБЧ, но как? И что нового было у него? Он был строгим детерминистом и случайности не признавал? Ср., однако, п. 9! Наконец, теория вероятностей будто бы основана на понятии вероятности, на самом же деле – на понятии случайной величины.

Ну, хватит. Я уже весь в дерьме.

3. Монмор

Его трактат (1708) об азартных играх оказался весьма полезным, в частности **Муавру**. В нем Монмор исследовал многие старинные и новые игры, одна из которых, рассмотренная в простейшем варианте еще **Галилеем**, требовала подсчета шансов выбросить k очков при броске n f-гранных костей (или даже n костей с разным количеством граней). В связи с этой задачей Монмор использовал формулу включения и исключения для событий A_i расположенных как угодно друг относительно друга

$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i\,A_j) + \sum P(A_i\,A_j\,A_k) - \ldots,$$

где $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n,\ i < j,\ i < j < k, \ldots$

При $f = \text{Const} = 6$ (например) указанная задача равносильна определению вероятности сумме n взаимно независимых случайных величин, с равной вероятностью принимающих значения 1, 2, …, 5, 6, равняться k.

Во второе издание свой книги 1713 г. Монмор включил свою весьма интересную переписку с **Николаем Бернулли**; одну из рассмотренных ими задач мы упоминали ранее [II, Прим. 2]; о некоторых других темах их переписки см. пп. 7.1 и 10.2.

В предисловии к своей книге Монмор (1798/1713, с. vi – vii); перевод Шейнин 2006, с. 52 – 53) сообщил о предрассудках в связи с играми и вообще “во всех жизненных делах, в которых случай играет какую-то роль”, а **Лаплас** (1814) уделил специальную главу иллюзиям, в том числе в играх и лотереях, см. перевод, 1999, с. 835 левый столбец. Монмор справедливо заметил, что прошедшее не влияет на будущее, а **Бертран** (1888, с. XXII) выразился аналогично, но гораздо убедительнее: рулетка “не имеет ни воли, ни памяти”.

Вообще же серии событий изучались неоднократно (а их теория является предметом математической статистики). Решение соответствующих задач можно найти у Муавра, а в 1767 г. **Эйлер** исследовал серии выхода числовых последовательностей в выборках без возвращения; в 1793 г. **Джон Дальтон** встретился с сериями при изучении влияния северных сияний на погоду (Шейнин 1984, п. 5.2), и именно в метеорологии, уже в XIX в., **Кетле** вплотную занялся сериями событий и создал элементы теории серий (там же, п. 5.3).

4. Муавр

Его основным сочинением было *Учение о шансах* (1718), в которое, начиная со второго издания 1738 г., он включил вывод своей предельной теоремы, отпечатанный частным образом в 1733 г., но написанный им “дюжину лет или более” до того. А мемуар Муавра 1712 г., появившийся еще до посмертного выхода в свет *Искусства предположений* **Якоба Бернулли**, можно считать предварительным ядром *Учения* … Именно там, т. е. до Бернулли, он опубликовал *классическое* определение вероятности.

Учение … было написано для широкого круга читателей и содержало решение многих задач из области азартных игр, хотя часто без обоснования. Тем не менее, там оказались и весьма важные результаты, см. ниже и в п. 10.1, и о ее переводе на французский язык помышляли и **Лагранж**, см. его письмо **Лапласу** 30.12.1776 г. в томе 14 его Трудов, и Лаплас (там же).

И вот упомянутая выше теорема. Стремясь определить закономерность мужских и женских рождений (см. наш п. 7.1), Муавр доказал, что при n испытаниях Бернулли при вероятности *успеха* p в единичном испытании число успехов μ подчинялось предельному закону

$$\lim P\,(\alpha \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \exp\,(-z^2/2)dz,\ n \to \infty, \tag{2}$$

$q = 1 - p$. Заметим, что $np = \mathrm{E}\mu$ и $npq = \mathrm{D}\mu$ – ожидание и дисперсия числа успехов; понятие дисперсии по существу ввел **Гаусс**. Сходимость к пределу равномерна по α и β, но и это понятие появилось лишь в XIX в.

При выводе своей формулы Муавр широко пользовался разложениями функций в степенные ряды (иногда – в расходящиеся ряды, учитывая суммы лишь их начальных членов).

Так в теорию вероятностей было введено нормальное распределение (которое неявно появилось уже у **Николая Бернулли**, см. п. 7.1). Муавр доказал (2) для случая $p = q$ (в его обозначениях: $a = b$), но справедливо заметил, что его рассуждения могут легко быть обобщены. Более того: название его мемуара 1733 г., который он включил во второе и третье издания *Учения* …, упоминало “бином $(a + b)^n$, разложенный в ряд”. Впрочем, Муавр не указал, что погрешность его формулы в случае конечных значений n возрастала с убыванием p (или q) от 1/2 и не исследовал скорости предельного перехода.

Следуя после-ньютоновской английской традиции, Муавр не применял обозначения интеграла, а английский язык был плохо известен на континенте Европы. Далее, Тодхантер, историческое исследование (1865) которого многие десятилетия оставалось единственным в своем роде, поверхностно описал формулу (2) и, в частности, ни слова не сказал о фактической общности результата, см. его с. 192 – 193. Наконец, **Лаплас** (1814/1999, с. 861 – 862) одобрительно отозвался о теореме Муавра, но недостаточно четко разъяснил ее значение. Неудивительно, что континентальная Европа распознала суть открытия Муавра лишь в конце XIX в.

В 1812 г. сам Лаплас доказал ту же теорему (и по инициативе **Маркова** она теперь называется теоремой Муавра – Лапласа) при помощи формулы суммирования **Эйлера – Маклорена** и вычислил ее поправочный член, учитывавший конечность значений n.

Развитие науки потребовало изучения случайных переменных, подчинявшихся не только биномиальному распределению, как в исследованиях Якоба Бернулли и Муавра, однако же стремление сумм этих переменных к нормальному закону осталось в силе при весьма общих условиях. Этот факт описывает *центральная предельная теорема* (термин Полиа 1920 г.), и формула (2) оказалась ее простейшим частным случаем.

В том же *Учении* … Муавр применил возвратные последовательности (теорию которых он сам и разработал), сформулировал в Предисловии теорему умножения вероятностей (уже не шансов) и определил независимость событий A и B формулами (в современных обозначениях)

$$P(B) = P(B/A),\ P(A) = P(A/B),$$

для зависимых же событий (например, трех) указал формулу

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Основную цель своего сочинения Муавр видел в отделении случайности от предначертания (иначе: от необходимости), т. е. в задаче, которую мы сегодня отнесли бы к математической статистике. Лишь постепенно понятие случайности начало уточняться указанием соответствующих законов распределения, Муавр же понимал случайное в смысле *равномерной* случайности. В Посвящении первого издания *Учения* … **Ньютону** (перепечатано на с. 329 третьего издания) Муавр назвал именно указанную цель и добавил, что ее достижение позволит, “исходя из Вашей [Ньютона] философии”, устанавливать “свидетельства утонченной [божественной] мудрости и предначертания”.

5. Бейес

Его основополагающий посмертный мемуар 1764 г. представил и комментировал статистик Прайс. Бейес изучал *обратную* задачу, как назвал ее Прайс, а именно, определение неизвестной теоретической вероятности события по статистической вероятности его появления в испытаниях Бернулли. Вот суть его рассуждения. Шар падает $\alpha + \beta = n$ раз на отрезок AB единичной длины, притом местоположения точек падения и некоторой точки c, расположенной на нем, равновероятны. Далее, α раз шар падает левее c (α успехов) и β раз – правее (β неудач), статистическая вероятность успеха равна α/n. Требуется установить положение точки c. Для каждого отрезка $[a; b]$ принадлежащего AB

$$P(c \in [a; b]) = \int_a^b C_n^\alpha x^\alpha (1-x)^\beta dx \div \int_0^1 C_n^\alpha x^\alpha (1-x)^\beta dx. \qquad (3)$$

Таково апостериорное распределение точки c при ее равномерном априорном распределении, т. е. при нашем до-опытном незнании. Величина x в формуле (3) обозначает также длину отрезка Ac, которая изменяется после каждого нового испытания. Теперь известно, что

$$P = I_b(\alpha + 1; \beta + 1) - I_a(\alpha + 1; \beta + 1),$$

где I – символ неполной бета-функции. Знаменатель формулы (3), как Бейес легко установил, был при каждом допустимом значении α равен

P(число успехов равно α вне зависимости от Ac) = $1/(n + 1)$.

Добавим: равен соответствующему значению полной бета-функции, умноженному на C_n^{α}.

Вплоть до 1930-х годов было исключительно трудно оценить числитель той же формулы при больших значениях α и β, и некоторые комментаторы даже посчитали, что Бейес не был по этой причине удовлетворен своими результатами и не стал сам публиковать их. Во всяком случае, он вряд ли был удовлетворен предельными соотношениями, потому что их нельзя было непосредственно применять к конечным значениям n; Прайс, кстати, так и заявил по поводу предельной теоремы **Муавра**. И всё-таки Тимердинг, редактор немецкого перевода мемуара Бейеса (1908 г.), доказал, что вычисления английского математика, содержавшиеся в дополнении 1765 г. к основному мемуару, могли быть приведены к формуле

$$\lim P\left(a \le \frac{x - \alpha/n}{\sqrt{\alpha\beta}/n^{3/2}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp(-z^2/2)dz,\ n \to \infty,$$

в которой, как мы заметим, $\alpha/n = \mathrm{E}x$ и $\alpha\beta/n^3 = \mathrm{D}x$.

Сам Бейес об этом предельном выражении умолчал, быть может потому, что, как он заявил в отдельной заметке, также посмертной, недопустимо (по примеру Муавра и других математиков того времени) использовать расходящиеся ряды. Примечательно, что Бейес (как и Муавр), конечно же, не владел понятием дисперсии, но видимо понял, что элементарное и формальное преобразование левой части формулы (2) приводит к

$$P\left(a \le \frac{\mu/n - p}{\sqrt{pq/n}} \le b\right)$$

и потому не обеспечивает надлежащего ответа *обратной* задачи. И именно мемуар Бейеса, как допустимо считать, завершил построение исходного варианта теории вероятностей; ее вершинами были закон больших чисел и решение прямой и обратной задач (по терминологии Прайса), т. е. результаты Муавра (2) и Бейеса (3).

Основной результат Бейеса кроме того устанавливал, что, зная лишь весьма приближенно закон распределения случайной величины, можно уточнить его по наблюдениям: равномерное распределение положений c на AB удалось заменить распределением (3).

Прайс дополнил мемуар Бейеса примерами, в которых предполагалось полное предварительное незнание, и вот самый известный из них. Восход Солнца наблюдался миллион раз подряд; насколько вероятен следующий восход? По формуле (3) при $a = 1/2$, $b = 1$, $\alpha = 10^6$ и $\beta = 0$ соотношение шансов *успеха* и *неудачи* оказывается равным двум в миллионной степени к единице. **Чебышев** (1879 – 1880, с. 158), следует сказать, сформулировал ту же задачу на житейском уровне: студент ответил на несколько вопросов, какова же вероятность, что он ответит на следующий?

Как и в случае с Муавром (п. 4), математики на континенте Европы ознакомились с мемуаром Бейеса с сильным запозданием. Этому помешал английский язык автора и отсутствие должного пояснения его весьма тонких рассуждений. “Бейесовский подход” некоторое время (с 1930-х годов и в течение примерно 30 лет) отрицался, в первую очередь Р. Фишером, видимо в связи с введением плохо известных априорных распределений, но затем Корнфильд (1967, с. 41) заметил, что теорема Бейеса “вернулась с кладбища”. По поводу недавних баталий см. также Gillies (1987).

Пусть событие B может произойти с одним и только одним из несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вероятности которых были вначале равны $P(A_i)$. Тогда, после наступления B, эти вероятности окажутся равными

$$P(A_i/B) = P(B/A_i)P(A_i) \div \sum_{j=1}^{n} [P(B/A_j)\, P(A_j)]. \qquad (4)$$

Такова так называемая теорема Бейеса (**Курно** 1843, § 88), которой, однако, в мемуаре Бейеса не было; этим термином мы склонны называть его предельную теорему (3). Формула (4) появилась у **Лапласа** (1774b), выразившего ее, впрочем, только на словах и обосновавшего ее позже (1781, с. 414). Он (1786) также распространил метод Бейеса на иные априорные распределения и решил несколько задач, приводящих к формулам типа (3); своего предшественника Лаплас упомянул лишь позже (1814/1999, с. 862 левый столбец). Более других известна его собственная оценка вероятности последующего восхода Солнца (там же, с. 837 левый столбец), которую он обосновал ранее (1781):

$$P = (\alpha + 1)/(\alpha + 2).$$

При помощи того же метода Лаплас (1774b) изучал урновые задачи, а в 1781 г. перешел к исследованию закономерности мужских и женских рождений, см. наш п. 7.1. Впрочем, указанное исследование уже не содержало ничего принципиально нового, и мы на нем не останавливаемся.

Вот задача из первого мемуара: урна содержит бесконечное число белых и черных шаров. Было извлечено без возвращения p белых шаров и q черных, и требуется определить вероятность появления белого шара при последующем тираже.

Обозначим неизвестное соотношение белых шаров к их общему числу через x, тогда вероятность получения указанной выборки будет пропорциональна $x^p(1-x)^q$ и при равной вероятности всех значений x искомая вероятность будет равна

$$P = \int_0^1 x \cdot x^p(1-x)^q dx \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{p+1}{p+q+2},$$

откуда (при $p = \alpha$ и $q = 0$) и следует приведенная выше формула для вероятности последующего восхода Солнца. Заметим, что полученный результат численно равен ожиданию случайной величины с плотностью

$$\varphi(x) = Cx^p(1-x)^q,\ C = 1 \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx.$$

Теперь требуется определить вероятность извлечения m белых и n черных шаров в последующих $(m + n)$ тиражах при условии малости этих чисел по сравнению с p и q. Прибегнув к приближенным вычислениям, Лаплас получил

$$P = \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}$$

и заметил, что это соответствует (как и должно было быть) значению $x \approx p/(p + q)$.

Наконец, в том же мемуарее Лаплас доказал, что при произвольных $\alpha > 0$

$$\lim P\,(\frac{p}{p+q} - \alpha \le x \le \frac{p}{p+q} + \alpha) = 1,\ p,\ q \to \infty.$$

В 1781 г. он использовал этот результат, чтобы заявить, что обширные статистические данные позволят определить соотношение мужских и женских рождений сколь угодно точно [если только оно остается постоянным!]. В п. 11 мы опишем еще одну подобную задачу, исследованную Лапласом. При больших p и q расхождения между статистическими и теоретическими значениями таких величин, как $p/(p + q)$, можно оценить при помощи теоремы Муавра – Лапласа. Действительно, при p, $q \to \infty$ вероятности извлечения шаров каждого цвета остаются постоянными даже при тиражах без возвращения.

6. Геометрические вероятности. В XVIIIв. теория вероятностей обогатилась понятием “геометрическая вероятность”. Первым на возможность применения геометрических вероятностей указал **Ньютон** [II, п. 5]. **Д. Бернулли** воспользовался ей в 1735 г. в астрономическом контексте и ее же фактически применяли все авторы, начиная с Николая Бернулли, вводившие непрерывные распределения. Всеобще известной стала задача Мичелла (Michell 1767): определить вероятность того, что две звезды из общего их числа, равномерно распределенных по небесной сфере, находятся не далее, чем в 1° друг от друга. Если выбрать произвольную точку (A) на сфере с центром O и провести малый круг, перпендикулярный OA на расстоянии 1° от A, то искомая вероятность окажется отношением площадей поверхностей полученного шарового сегмента и шара. Особое внимание этой задаче уделили в XIX в., а **Бертран** (1888, с. 170 – 171) заметил, что без изучения иных возможных особенностей звездной системы нельзя решить, расположены ли звезды случайно.

По-настоящему ввел геометрические вероятности **Бюффон** (1777); впрочем, краткое сообщение о своей работе он анонимно опубликовал еще в 1735 г. Вот его основная задача: игла длиной $2r$ падает “случайным образом” на пучок параллельных прямых, расположенных на расстоянии $a > 2r$ друг от друга. Требуется определить вероятность того, что игла пересечет одну из них. Оказывается, что

$$P = 4r/\pi a.$$

Сам Бюффон, правда, определил лишь отношение r/a для заданной $P = 1/2$. Многие комментаторы описывали и обобщали задачу Бюффона. Первый из них (**Laplace** 1812/1886, гл. 5, с. 366), заметил, что формула Бюффона позволяла экспериментально [но с небольшой точностью] определить число π. Основной целью Бюффона было, как он указал, “ввести геометрию в свои права в науке о случае” (1777, § 23).

Формальное определение геометрической вероятности, а точнее, общее определение, пригодное и для дискретного, и для непрерывного вариантов, появилось лишь у **Курно** (1843, § 18), который заменил отношение тех и других шансов отношением их протяженностей (étendue). Мы бы сейчас применили термин *мера*. В конце того же XIX в. Бертран (1888, с. 4) придумал свою знаменитую задачу о длине “случайной” хорды данного круга и указал для нее три различных решения в зависимости от истолкования “случайного”. Чубер (1903, с. 107 – 108) отыскал три дополнительных естественных решения, а другой автор (De Montessus 1903) вообще доказал, что количество решений несчетно.

7. Приложения теории вероятностей

7.1. Статистика населения. Основоположники политической арифметики (п. 1) сомневались в том, что статистические данные нужны кому-либо кроме высших должностных лиц государства. И действительно, первые социальные программы начали появляться (в Германии) лишь в 1880-е годы; до того времени правительства интересовались лишь числом налогоплательщиков и мужчин, способных носить оружие.

Новым предметом изучения в статистике населения оказалось соотношение мужских и женских рождений, интересное в связи с общей целью отделения случайного от предначертания (ср. п. 4). **Кеплер** и **Ньютон** сумели добиться этой цели в отношении системы мира, и ученые начали отыскивать закономерности в движении населения.

В 1712 г. **Арбутнот** опубликовал статистику крещений за 82 года (1629 – 1710) в Лондоне, которая выявила, что число мальчиков среди новорожденных неизменно превышало число девочек. Арбутнот заключил, что, будь вероятности мужских и женских рождений одинаковы, подобный результат имел бы вероятность 2^{-82} и что преобладание мальчиков поэтому является божественным законом, который “возмещал” более высокую смертность и их самих, и мужчин по сравнению с девочками и женщинами.

Это рассуждение не было строгим. Во-первых, исходные данные имелись только по Лондону (даже не по Англии), притом только по христианской части населения. Во-вторых, число крещений не совпадало с числом рождений; **Граунт** (1662/2005, конец гл. 3), например, косвенно засвидетельствовал, что между 1650 и 1660 гг. “менее половины населения Англии было убеждено в необходимости крещения” [новорожденных]. В третьих, сравнительная смертность мужчин и женщин не была изучена, и соответствующее (верное) утверждение Арбутнота оставалось необоснованным. В четвертых, указанная выше вероятность, конечно же, пренебрегаема, но точно такую же ничтожную вероятность имела бы любая последовательность 82 символов *м* и *ж* (*м* означало бы преобладание мальчиков в данном году, а *ж* – преобладание девочек). Даже в наше время определение случайной последовательности (тем более конечной) остается исключительно трудной задачей.

Арбутнот упустил возможность опередить Лапласа, который с методической целью решил подобную же задачу (**Даламбера – Лапласа**): из букв составлено длинное слово (Константинополь). Какова вероятность его случайного составления? Поскольку слово имело смысл, то, несмотря на равную вероятность любого расположения букв, можно полагать, что оно было составлено преднамеренно. Задачу придумал Даламбер (1767, с. 254 – 255), но ответил на нее неубедительно.

Наконец, Арбутнот вполне мог бы истолковать свои данные подчинением рождений биномиальному распределению, оставив на долю провидения выбор его параметра. Так, между прочим, и заявил **Муавр** (1733/1756, с. 253; перевод: Шейнин 2006, с. 108).

Николай Бернулли (**Монмор** 1708/1713, с. 388 – 394; перевод: Шейнин 2006, с. 71 – 73) исследовал данные Арбутнота по-своему. Обозначим соотношение рождений (пусть будут рождения) мальчиков и девочек через m/f, число всех ежегодных рождений – n, из которых μ – мальчики, и, далее,

$$n/(m+f) = r,\ m/(m+f) = p,\ f/(m+f) = q,\ p + q = 1 \text{ и } s = 0(\sqrt{n}).$$

Тогда

$$P(|\mu - rm| \le s) \approx (t-1)/t,\ t \approx [1 + s(m+f)/mfr]^{s/2} \approx \exp[s^2(m+f)^2/2mfn],$$
$$P\,(|\mu - rm| \le s) \approx 1 - \exp(s^2/2pqn),\ P[|\mu - np|/\sqrt{npq} \le s] \approx 1 - \exp(-s^2/2).$$

Он таким образом косвенно ввел в теорию вероятностей экспоненциальную функцию отрицательного квадрата (только что мы сами явно записали ее). Впрочем, результат Бернулли не был ни интегральной предельной теоремой, поскольку s было ограничено по условию, ни локальной теоремой, так как он не содержал множителя $\sqrt{2}/\pi$. Об отсутствии этого множителя не упомянул Хальд (1998, с. 17), а по его описанию трое современных математиков (Юшкевич 1986) заключили, что Бернулли близко подошел к локальной теореме. Мы этого не понимаем.

Отцом статистики населения оказался **Зюссмильх** (1741). Он собрал обширный материал о движении населения, которым пытался обосновать божественное провидение о роде человеческом. Само название его книги свидетельствовало об этом: *Божественный порядок в изменениях рода человеческого, выведенный из рождений, смертей и размножения*, а в § 14 книги он поэтически представил свой основной вывод; вот заглавие параграфа, обусловленное тем, что Зюссмильх был военным священником: *Армейский полк* [переменного состава!] *на марше и Божественный порядок.*

Впрочем, Зюссмильх обрабатывал свои данные малоудовлетворительным образом; например, объединяя результаты по городам и сельским местностям, он не учел соответствующих весов, пусть даже приближенно назначенных. Вместе с тем, он привлек внимание к статистике населения и проложил дорогу **Кетле**, а его таблицы смертности оставались в употреблении еще в начале XIX в. Наконец, некоторые рассмотренные им вопросы (внебрачные рождения, самоубийства, преступления) позднее стали предметом изучения моральной статистики.

Эйлер активно участвовал в подготовке второго издания книги 1765 г., и одна из ее глав была даже частично включена в *Полное собрание* его сочинений (*Opera omnia*, серия 1, т. 7). В ней Эйлер (вряд ли Зюссмильх) заключил, что население возрастает в геометрической прогрессии, и этот вывод в общем и целом остался в силе, и его же (без ссылок) в свое время подхватил Мальтус.

И в своих сочинениях, и при ставших неизбежными столкновениях с чиновниками Берлина и Пруссии Зюссмильх заявлял, что правители обязаны заботиться о населении и в интересах государства, и во исполнение заповеди о необходимости заселения Земли. Он (1758) также указывал, что бедность и невежество способствуют распространению эпидемий.

В том же томе *Opera omnia* опубликованы несколько мемуаров Эйлера, посвященных статистике населения. Переписей (в современном понимании) в те времена еще не было, и он не смог представить себе значимость некоторых демографических факторов, но он решил несколько важных конкретных задач и выработал основную часть математической теории смертности. Успешно занимался Эйлер и страховой математикой и заложил ее основы, а его формулы оставались в ходу еще в начале XIX в., возможно и долее. Особое внимание он уделял мерам по исключению чрезмерных рисков, сопровождал изложение многочисленными примерами и составил множество полезных таблиц.

В 1766 – 1771 гг. **Даниил Бернулли** опубликовал три мемуара по статистике населения. В первом из них он исследовал преимущества вариоляции, – передачи ослабленной формы оспы от больного здоровому. Вплоть до начала XIX в. эта, не вполне безопасная прививка, от которой умирал один человек из нескольких сотен, оставалась единственным средством спасения от болезни, уносившей миллионы жизней.

Приняв определенные предпосылки о заболеваемости оспой и смертности от нее, Бернулли составил и решил соответствующее дифференциальное уравнение и установил, что вариоляция, практически исключавшая последующее заболевание, увеличивает средний срок жизни более, чем на два года, а потому исключительно полезна. Этот вывод не был безупречным, и **Даламбер** (1761b), не отрицая принципиальной пользы вариоляции, заявил, что не всякий согласится подвергнуться пусть малому риску немедленной смерти в обмен на удлинение жизни в будущем. К тому же (что ранее высказал и **Кондамин**), прививка детей сопряжена с моральной проблемой.

Серьезной опасностью было возможное распространение инфекции в результате вариоляции, которую Бернулли, правда, считал пренебрегаемой, и, наконец, всё его рассуждение главным образом обосновывало пользу вариоляции для государства в целом, а не для отдельного человека. В общем, однако, его мемуар оказался исключительно полезным, поскольку он применил математику, а точнее вероятностный метод, к решению существенно новых задач, но вот о степени его влияния на общественное мнение мы ничего сказать не можем.

В своем втором мемуаре Бернулли исследовал продолжительность женитьб, что было существенно для совместного страхования жизни супругов. Математически он (1768a) исходил из соответствующей урновой модели, урны, наполненной полосками двух различных цветов, вероятности извлечения которых были либо равны друг другу, либо различны. Второй случай, разумеется, соответствовал различной смертности мужчин и женщин.

Свой последний мемуар по статистике населения (1770 – 1771) Бернулли посвятил исследованию соотношения мужских и женских рождений; напомним, что эту классическую задачу рассматривали **Арбутнот, Николай Бернулли** и **Муавр**. Предположив вначале, что и те, и другие рождения равновероятны, Бернулли записал вероятность, что из $2N$ новорожденных m окажутся мальчиками:

$$P = [1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2N-1)] \div [2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2N] = q(N).$$

Эту дробь он вычислил не по формуле **Валлиса**, и не по локальной теореме Муавра (которую он, видимо, не знал, см. ниже), а при помощи дифференциальных уравнений. Вычислив $q(N-1)$ и $q(N+1)$ и оба соответствующих значений Δq, он получил

$$dq/dN = -q/(2N+2),\ dq/dN = -q/(2N-1)$$

и “в среднем” $dq/dN = -q/(2N+1/2)$. Полагая, что подходящее частное решение этого уравнения проходит через точку $N = 12$ и $q(12)$, он вывел значение

$$q = 1.12826/\sqrt{4N+1}.$$

Применение дифференциальных уравнений было его обычным методом в теории вероятностей.

Бернулли также определил вероятность рождения примерно m мальчиков:

$$P(m = N \pm \mu) = q\exp(-\mu^2/N),\ \mu = 0(\sqrt{}N) \qquad (5)$$

и перешел к общему случаю, – к неравенству вероятностей мужских и женских рождений. Исходя из некоторых статистических данных, он сравнил друг с другом два возможных значения искомого соотношения рождений, но так и не пришел ни к какому определенному решению.

Особо заметим, что Бернулли определил значение μ, при котором сумма вероятностей (5) от $\mu = 0$ до этого значения равнялась 1/2, но не интегрированием, а суммированием. На Муавра он не сослался.

В 1772 г. **Ламберт** в свою очередь занялся статистикой населения. Он предложил умозрительный закон смертности (основанный лишь на аналогии с вытеканием воды из цилиндра и с термическими процессами), исследовал распределение детей в семьях и детскую смертность от оспы. Ламберт произвольно увеличил общее число детей вполовину, видимо стараясь учесть мертворожденных и умерших, а в последнем упомянутом исследовании несколько дополнил соответствующий мемуар Даниила Бернулли. Об одном важном исследовании **Лапласа** см. п. 11.

Важные теоретические исследования, обусловленные запросами страхования жизни, начали появляться с 1725 г. (**Муавр, Симпсон**). Муавр был самым значительным автором своего времени в области математического страхования жизни, которым он занимался с начала 1720-х годов. Исходя из таблицы **Галлея** [II, п. 2.4.5], он (1725/1756, с. 262 – 263) принял равномерный непрерывный закон смертности для всех возрастов начиная с 12-ти лет и максимальную продолжительность жизни в 86 лет. Из его многочисленных результатов мы опишем некоторые из числа тех, которые потребовали приложения интегрального исчисления.

1) Определить ожидание продолжительности жизни для человека данного возраста, если максимальное значение (комплемент) этой величины (т.е. 86 минус возраст) равно n (с. 288). Ответ Муавра: $n/2$. Реконструкция проста:

$$\int_0^n xdx/n = n/2.$$

2) Определить вероятность одному человеку пережить другого, если комплементы их жизней n и p, $n > p$ (с. 324). Вот по существу решение Муавра. Обозначим случайные продолжительности жизни A и B через ξ и η. Тогда, поскольку в некоторый момент времени x комплемент жизни A равен $(n – x)$,

$$P\ (\xi \geq x,\ \eta = x) = [(n - z)/n]dz/p,\ P(\xi > \eta) = \int_0^p [(n - z)/n]dz\,/\,p\ = 1 - p/2n.$$

3) Определить ожидание срока, в течение которого два человека с теми же комплементами жизни, что и в предыдущей задаче, остаются в живых (с. 288). Муавр привел лишь ответ, а реконструкция решения (Czuber, замечание 22 к немецкому переводу сочинения Муавра 1906 г.) такова:

$$P\ (x \leq \xi \leq x + dx \text{ или } x \leq \eta \leq x + dx) = [(n - x)/n]dx/p\ +\ [(p - x)p]dx/n,$$

$$\mathrm{E}\zeta = \int_0^p\ \{[(n - x)/np] + [p - x)p/n]\}dx = p/2 - p^2/6n.$$

Заметим, что из вероятности типа $P(\xi \geq x)$ очень просто получить соответствующую интегральную функцию распределения $F(x)$.

Подробное изложение работы Муавра и его основного соперника, Т. Симпсона, см. Hald (1990, с. 515 – 546). Симпсон усовершенствовал, а в нескольких случаях исправил результаты Муавра. Рассмотрев один из вариантов совместного страхования, Хальд (с. 546) заключил, что соответствующие выводы Симпсона были “значительным шагом вперед”.

7.2. Приложения к юриспруденции и экономике. В 1709 г. **Николай Бернулли** опубликовал диссертацию о применении искусства предположений в юриспруденции [II, п. 2.2]. Вероятностным изучением юридических вопросов много позже занялся Кондорсе, но многие последующие авторы отрицали пользу этого подхода. Его наиболее известными противниками оказались Милль (1843/1886, с. 353; перевод 1914, с. 490) и **Пуанкаре** (1896/1912, с. 20; перевод 1999, с. 22), который заявил, что в судах люди ведут себя как баранье стадо. Фактически они пошли намного дальше **Лейбница** (письмо **Якобу Бернулли** 1703 г.); немецкий перевод с латинского см. Gini (1946, с. 405), который полагал, что

Оценка вероятностей исключительно полезна, хотя в примерах из юриспруденции и политических наук тонкие вычисления не так необходимы, как точное перечисление всех обстоятельств.

Да, учет обстоятельств исключительно важен, но он вовсе не исключает вычислений. **Гаусс**, например, счел, что теория вероятностей обеспечивает “путеводную нить” для установления желательного числа свидетелей и судей (присяжных); так от его имени заявил в письме 1841 г. W. E. Weber, см. т. 12, с. 201 – 204 Собрания сочинений Гаусса (1929 г.).

Кондорсе (Тодхантер 1865, гл. 17) пытался установить и указанные числа, и вероятность исключительных событий, о которых сообщает свидетель. Его изложение было, однако, тяжеловесным, и он не указал, что рассматривает лишь идеальный случай независимости решений в суде. Он, правда, заметил, что “люди” должны быть образованы и лишены предрассудков. Мы обязаны, впрочем, упомянуть Крепеля (Crepel 1988), который в своем резюме “настаивал”, что “точка зрения Кондорсе изобретательна, строга и ясна”. Если это и так, то всё-таки *точка зрения* и *изложение* – это разные вещи.

Кондорсе заинтересовался теорией вероятностей в 1772 г., что усматривается из его тогдашнего (3 сент.) письма Тюрго (Henry 1883/1970, с. 97 – 98): “Я забавляюсь, вычисляя вероятности, напишу на эту тему небольшую книжку. […] В основном я придерживаюсь мнения Даламбера, и мы отличаемся друг от друга лишь в нескольких деталях”. Впрочем, о высказываниях Кондорсе в духе Даламбера нам ничего не известно. Crepel (1987) опубликовал резюме упомянутой *книжки*, которая так и не появилась в свет несмотря на его указание.

К мнению Кондорсе **Лаплас** добавил, что государство должно быть представлено образованной и четко мыслящей элитой. Лишь в одном месте и мимоходом он (1816, с. 523) разъяснил, что предполагает независимость суждений присяжных.

Одна из простых формул Кондорсе (1784 – 1787/1994, с. 433), также Тодхантер (с. 400), которая косвенно встречалась и у **Якоба Бернулли**, в гл. 3 части 4 *Искусства предположений*, и впоследствии у Лапласа в 1812 г., относилась к исключительным событиям. Если вероятность такого события сама по себе и правдивость сообщения о нем обозначить через p_1 и p_2, то вероятность события окажется равной

$$P = \frac{p_1 p_2}{[p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)]}.$$

Вряд ли этот вывод имел какое-либо значение. При $p_1 = 1/10\,000$ и $p_2 = 0.99$, оказывается, что $P \approx 0.01$, и вряд ли суд признал бы событие имевшим место; потребовался бы второй свидетель.

Моральная статистика, изучавшая женитьбы, самоубийства и преступления, по меньшей мере обращала внимание общественности на необходимость сбора соответствующих данных и способствовала оценке возможных изменений законов и порядка судопроизводства. Впрочем, она получила должное развитие лишь в XIX в.

Приложение теории вероятностей к экономике началось с 1738 г., – с исследования петербургской игры (п. 10.2) **Даниилом Бернулли**. Он предположил, что выгода (y) игрока и его выигрыш (x) связаны дифференциальным уравнением (кажется, первым в теории вероятностей)

$$y = f(x) = c \ln(x/a),$$

в котором a означало начальный капитал игрока. Бернулли затем принял, что взамен ожидания в азартных играх следовало исходить из *морального ожидания*, т. е. не из

$$\sum p_i x_i / \sum p_i, \text{ а из } \sum p_i f(x_i) / \sum p_i,$$

где p_i как и раньше означали вероятности соответствующих выигрышей (или проигрышей).

Это нововведение позволило Бернулли заменить несообразное со здравым смыслом бесконечное ожидание выигрыша в петербургской игре конечным (моральным) ожиданием. Он также заметил, что новое понятие устанавливает, что даже справедливая игра невыгодна для каждого игрока и применил его, чтобы показать, что (в соответствии с общепринятым мнением) морские грузы выгоднее отправлять на нескольких судах, а не на одном-единственном. Доказал это, однако, Лаплас (1812, гл. 10), см. также Тодхантер (1865, § 383).

Сам термин *моральное ожидание* Бернулли, впрочем, не применял; предложил его швейцарский математик Габриель Крамер в письме 1728 г. **Николаю Бернулли**, текст которого Даниил изложил в своем мемуаре. Новое понятие стало настолько популярным, что Лаплас (1812/1886, с. 189) заменил классическое ожидание *математическим ожиданием*. Его предложение укоренилось во французской и русской литературе, хотя, казалось бы, что от него давно уже следовало отказаться.

В 1888 г. **Бертран** (с. 66) заявил, что моральное ожидание, хоть и стало притчей во языцех, бесполезно, но уже в то время экономисты начали исходить из него при построении теории предельной полезности. Можно добавить, что в 1999 г. мемуар Бернулли был переведен на русский язык.

8. Теория ошибок

8.1. Основная задача. Допустим, что m неизвестных величин x, y, z, … определяются из избыточной системы физически независимых уравнений числом n ($m < n$)

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + s_i = 0 \qquad (6)$$

(понятие линейной зависимости в XVIII в. еще не существовало). Коэффициенты этих уравнений задаются соответствующей теорией, свободные члены – это результаты измерений, а приближенные значения x, y, z, … известны (хотя бы из каких-то предварительных прикидок), так что линейность системы (6) не была ограничением. Подобные системы были несовместны, и за их решение приходилось считать любой набор чисел, устанавливаемый в соответствии с тем или иным дополнительным условием, и приводящий к приемлемым остаточным свободным членам (v_i). Выбор оптимального в каком-либо смысле решения и определение степени его надежности и было основной задачей уравнивания *косвенных наблюдений*.

Случай *прямых наблюдений* (m = 1) следует рассмотреть особо. Даны наблюдения s_1, s_2, …, s_n неизвестной константы x, *истинное значение* которой, равно как и его надежность, требовалось определить. Выбор среднего арифметического в качестве оценки неизвестной постоянной прослеживается с начала XVII в. (Шейнин 2005, с. 25 – 26), и лишь в 1722 г. появилось сочинение **Котса**, в котором рекомендовалось, правда, без должного обоснования, придерживаться среднего арифметического.

В древности астрономы обрабатывали свои наблюдения произвольным образом, и в этом смысле древняя астрономия не была еще количественной наукой. Но они знали, что их наблюдения весьма неточны, а в наше время известно, что при *плохих* плотностях распределения среднее арифметическое не лучше (а возможно даже хуже) отдельного наблюдения.

Термин *истинное значение* (Шейнин 2007е) встречается в явном виде с 1760 г. (**Ламберт**) и косвенно отождествляется при этом со средним арифметическим. Такой была и точка зрения **Лапласа** (1795/1912, с. 161), добавивший, однако, условие равновозможности ошибок обоих знаков, формально же определил это понятие **Фурье** (1826/1890, с. 533 – 534), который в свою очередь имел в виду бесконечное число измерений. Независимо от него это определение повторили многие последующие авторы и в том числе **Мизес**, а **Гаусс** (1816, §§ 3 и 4) и другие ученые, включая **Фишера**, применяли термин (стало быть, и понятие) *истинное значение* даже для величин, вообще не существовавших в природе (например, для мер точности).

Ньютон теоретически установил, что Земля является эллипсоидом вращения с экваториальным радиусом (a), превышающим полярный радиус (b). Естественным образом появились классические задачи, – опытная проверка теории и, при ее подтверждении, определение подходящего эллипсоида вращения для фигуры Земли. Решать их можно было одновременно, и в принципе для этого было достаточно двух градусных измерений, но ввиду неизбежных ошибок геодезических и астрономических измерений/наблюдений (и местных уклонений Земли от ее общей фигуры), требовалось намного больше.

В настоящее время для фигуры Земли принят эллипсоид вращения с параметрами (приближенно) $a = 6378.1$*км* и $b = 6356.8$*км*, причем оказывается, что $2\pi a = 39\,941$*км*, что не случайно близко к 40 тысячам: в 1791 г. *метр* был определен как $1/10^7$ четверти парижского меридиана. Этот стандарт длины просуществовал до его замены в 1872 г. длиной *архивного метра* (по месту хранения в Париже) – платинового жезла, изготовленного ранее в качестве носителя исходного определения. Впрочем, с 1960 г. метр определяется в единицах длины световой волны.

8.2. Решение систем уравнений. Системы (6) приходилось решать неоднократно, в основном в связи с запросами астрономии и геодезии, а с начала XIX в. – также для нужд физики и химии. В классическом случае определения фигуры Земли появлялись системы с двумя неизвестными, и было принято составлять все возможные пары уравнений, решать эти подсистемы, а затем осреднять частные решения (уже для трех неизвестных этот метод оказывался чересчур громоздким). В XIX в. обнаружилось, что при надлежащем взвешивании частных решений результат совпадал с решением по методу наименьших квадратов.

Бошкович (Maire & Boscovich 1770, с. 501) предложил другой метод, а именно введение дополнительных условий

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0, |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| = \min. \qquad (7a, 7b)$$

Первое из них можно исключить, если сложить уравнения и выразить одно неизвестное через остальные. И, как заметил **Гаусс** (1809, § 186), условие (7b) приводило в точности к m нулевым остаточным свободным членам. Можно сказать, что это следовало из важной теоремы в то время еще не известного линейного программирования. Другими словами, метод Бошковича требовал выбора и решения (m – 1) уравнений из исходных n – но каких именно? Сам Бошкович выбрал требуемую подсистему простым геометрическим приемом, а после него тот же метод уравнивания и для той же цели (обработка градусных измерений) применял **Лаплас** (например, в т. 2 своей *Небесной механики*, 1799 г.), но уже вооружившись для этого аналитическим приемом.

Бошкович ввел свой метод после того, как не удовлетворился сочетаниями уравнений (см. выше). Но интересно, что он применял сочетания даже в простейшем случае (Cubranic 1961, с. 46): он вывел среднее арифметическое из четырех величин только после того, как вычислил полусуммы всех их попарных разностей. Возможно, что он хотел таким образом, не изменяя окончательного результата, получить представление о погрешностях своих исходных данных.

Особым условием *минимакса* решения систем (6) было

$$|v_{\max}| = \min.$$

Кеплер (1609/1992, с. 286/113), который заявил, что не смог согласовать птолемееву систему мира с наблюдениями **Тихо Браге**, как можно думать, безуспешно пытался добиться этого по принципу минимакса (не зная еще соответствующего алгоритма и, естественно, имея дело не с линейными и даже не с алгебраическими уравнениями). Действительно, если не подходит даже минимаксное решение, то либо теория неверна, либо наблюдения негодные.

В 1749 г. **Эйлер** был в этом отношении удачливее при обработке градусных измерений, но ни его решение, ни минимаксные решения вообще не обладают никакими оптимальными вероятностными качествами, и Лаплас (1789, с. 506) так и сказал.

С начала XIX в. основным при уравнивании косвенных наблюдений стало, конечно же, условие наименьших квадратов.

8.3. Уравнивание прямых наблюдений. В 1756 г. **Симпсон** доказал, что для дискретных равномерного и треугольного распределений среднее арифметическое в вероятностном смысле предпочтительнее отдельного наблюдения. Он таким образом нашел новое поле приложения теории вероятностей и по существу ввел понятие случайной ошибки наблюдения, т. е. ошибки, принимающей множество значений с соответствующими вероятностями.

Симпсон воспользовался производящей функцией, которую **Муавр** (1730, с. 191 – 197) ввел для вычисления шансов выбросить определенное число очков при броске некоторого числа костей. Впервые он решил эту задачу в 1712 г. (но не привел никакого обоснования), несколько раньше **Монмора** (1708/1713), который применил другой метод решения.

Симпсон (1740) описал те же вычисления комбинаторным методом, а в 1756 г. (*Замечание* к *Предложению* 1) отметил общность старой и новой задач. Рассмотрим к примеру треугольное распределение, при котором вероятности погрешностей

$$-v, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, v \qquad (8)$$

были пропорциональны числам

$$1, \ldots, (v-2), (v-1), v, (v-1), (v-2), \ldots, 1.$$

Производящая функция (всё еще безымянная) была равна

$$f(r) = r^{-v} + 2r^{-v+1} + \ldots + (v+1)\, r^0 + \ldots + 2r^{v-1} + r^{v},$$

так что шанс сумме t ошибок равняться m оказался коэффициентом при r^m в функции $f^{\,t}(r)$.

В 1757 г., изменив масштаб, Симпсон пришел к непрерывному треугольному распределению. Интервалы между целыми числами (8) теперь стремились к нулю и отрезок [– v; v] можно было считать как бы состоящим из бесконечного числа указанных интервалов. В заключение Симпсон ошибочно заявил, что его доказательство носит всеобщий характер.

В 1776 г. **Лагранж** распространил выводы Симпсона (на которого он так и не сослался, быть может ввиду яростных приоритетных споров последнего с Муавром) на другие, чисто теоретические распределения. Он, однако, ввел при этом интегральные преобразования, сумел применить производящие функции к непрерывным распределениям и получил другие важные общематематические результаты.

8.4. Ламберт. Допустим, что $\varphi(x;\ \hat{x})$ с неизвестным параметром $\hat{x}$ является плотностью распределения для независимых ошибок $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда произведение

$$\varphi(x_1;\ \hat{x}) \cdot \varphi(x_2;\ \hat{x}) \ldots \cdot \varphi(x_n;\ \hat{x}) \qquad (9)$$

укажет вероятность действительного получения соответствующей серии наблюдений, а максимальное значение (9) – вероятнейшее значение $\hat{x}$. Если, как всегда принималось в классической теории ошибок, $\varphi(x - \hat{x})$ – кривая с единственной вершиной в точке $x = \hat{x}$, то отыскание истинного значения неизвестной постоянной можно будет заменить вычислением вероятнейшего значения $\hat{x}$. Математическая статистика действительно заменила отыскание первых вычислением оптимальных (в этом случае – вероятнейших, соответствующих *принципу наибольшего правдоподобия*) оценок параметров сдвига функций плотностей.

Ламберт первым сформулировал этот принцип в 1760 г. для одновершинной кривой (без указания ее уравнения) и в том же сочинении исследовал обработку наблюдений вообще. В 1765 г. он вернулся к этой теме и, в частности, сделал первую (неудачную) попытку оценить точность наблюдений и умозрительно установил плотность распределения ошибок наведения геодезического прибора. Поскольку “не было причин” для ее “угловатости”, он решил, что кривая плотности – полуокружность.

Это *отсутствие причин* стало позднее называться принципом *недостаточного основания*; именно им можно (нестрого) обосновать равновероятность событий в примерах из жизни и естествознания. **Пуанкаре** и последующие авторы смягчили положение, введя понятие о *произвольных функциях* (**Хинчин** 1961, с. 88 – 89).

Ламберт (1765, § 321) также ввел термин *теория ошибок* (на немецком языке), включив в нее и детерминированную, и вероятностную части. **Бессель** начал пользоваться новым термином, и в середине XIX в. он как-то сразу вошел во всеобщее употребление, хотя до этого ни **Лаплас**, ни **Гаусс** его ни разу не упомянули.

Классическим примером детерминированной ветви теории ошибок было вычисление погрешностей вычисляемых элементов прямолинейных и сферических треугольников по известным погрешностям их измеренных элементов (**Котс** 1722). Погрешности Котс заменил соответствующими дифференциалами и применил простые формулы дифференциального исчисления. Пусть функция (результат наблюдения) y зависит от нескольких параметров, $y = f(x;\ a;\ b;\ \ldots)$. Тогда ее дифференциал dy, т. е. ошибка наблюдения Δy, может быть вычислена для любых заданных множеств $a, b, \ldots$ и $\Delta a, \Delta b, \ldots$ Таким образом, при заданных погрешностях параметров можно заранее выбрать наилучшие значения $a, b, \ldots$

Growing (1983, с. 91 – 108) описал это исследование, перевел его небольшую часть, включил сводку результатов указанных вычислений Котса и описал весьма благоприятный отклик французских астрономов на него, но забыл упомянуть Лапласа (1814/1999, с. 862 левый столбец): “Правилу [рекомендации следовать среднему арифметическому, см. п. 8.1] Котса следовали все вычислители”.

8.5. Даниил Бернулли. В 1778 г. он заявил, что применение среднего арифметического подобно стрельбе вслепую и взамен него рекомендовал принцип наибольшего правдоподобия; на **Ламберта** он не сослался. За плотность распределения он умозрительно принял кривую второго порядка и в случае трех наблюдений пришел к алгебраическому уравнению пятой степени с неизвестным $\hat{x}$, оценкой наибольшего правдоподобия.

В комментарии того же года **Эйлер** отказался от принципа наибольшего правдоподобия: при наличии отклоняющегося наблюдения произведение в левой части (9) становится малым, к тому же слишком сильно сказывается на искомой оценке выбор решения о его отбраковке или оставлении.

Затем, неверно поняв одно из рассуждений Бернулли и исходя из принципа наибольшей суммы квадратов весов наблюдений, Эйлер вывел кубичное уравнение относительно искомой оценки, которая с хорошим приближением всё-таки совпала со средним арифметическим, поскольку оказывалось, что

$$(\hat{x} - x_1)^2 + (\hat{x} - x_2)^2 + \ldots + (\hat{x} - x_n)^2 = \min.$$

Эвристически его условие напоминало принцип наибольшего веса, из которого **Гаусс** исходил в 1823 г. в своем окончательном варианте метода наименьших квадратов: достаточно было условие Эйлера перенести на случай нескольких неизвестных и отказаться от предварительного выбора кривой плотности.

(Апостериорные) веса наблюдений появились потому, что принцип наибольшего правдоподобия и у Бернулли, и у Эйлера сводился к взвешенному среднему арифметическому.

В 1780 г. Бернулли исследовал маятниковые наблюдения. Основываясь на своем мемуаре 1770 – 1771 гг., он принял формулу (5), т. е. нормальный закон, для вычисления погрешности хранения времени, накапливающейся за 24 часа, и кроме того он подразделил ошибки наблюдения на *моментальные* и *хронические*, – действующие пропорционально корню квадратному из промежутка времени, и самому этому промежутку. Иначе говоря, он выделил случайные погрешности (но только подчиняющиеся нормальному закону, хоть их действие во времени и не обусловлено этим ограничением) и систематические (но только постоянные).

Принятые им предпосылки о погрешностях были слишком упрощены даже для появления нормального закона, и он ни слова не сказал о возможной зависимости между периодами смежных колебаний маятника, не заявил он и о пригодности своих выводов для наблюдений вообще. Но он ввел нормальный закон в теорию ошибок и первым явно подразделил ошибки на две основные категории.

8.6. Лаплас. Его основные достижения в теории ошибок относятся к XIX в. и связаны с применением нескольких нестрого доказанных им вариантов центральной предельной теоремы. В XVIII в. он опубликовал два мемуара (1774а; 1781), интересных теоретически, но практически вряд ли полезных (например, ввел без должного обоснования две явно не подходящие плотности). Но уже тогда, в 1781 г., Лаплас предложил свое основное условие для уравнивания прямых наблюдений: сумма ошибок, которых следует опасаться, умноженных на их вероятности (т. е. абсолютное ожидание) должна была быть наименьшей.

В XIXв. он обосновал этим условием принцип наименьших квадратов, что оказалось возможным лишь для погрешностей, подчиняющихся нормальному закону (который в силу центральной предельной теоремы имел место лишь при большом числе наблюдений). Также в 1781 г. Лаплас предложил в качестве плотности распределения функцию

$$\varphi(\alpha x) = 0,\ x = \infty;\ \varphi(\alpha x) = q \neq 0,\ x \neq \infty,\ \alpha \to 0.$$

Его рассуждения можно описать при помощи дельта-функции **Дирака**, однако один из его выводов основывался на рассмотрении интеграла от

$$\varphi[\alpha(x - x_1)] \cdot \varphi[\alpha(x - x_2)]\ \ldots\ \cdot \varphi[\alpha(x - x_n)]$$

(здесь – x_i результаты наблюдений), который не имеет смысла на языке обобщенных функций.

С самого начала теория ошибок принадлежала теории вероятностей (**Симпсон**), но ее принципы (наибольшего правдоподобия, наименьшего абсолютного ожидания, наименьших квадратов) впоследствии переняла математическая статистика. Теория ошибок оставалась основным полем приложения теории вероятностей вплоть до 1930-х годов. **Пуанкаре** (посм. публ. 1921/1980, с. 343) заявил, что теория ошибок “естественно” была “основной целью” его трактата 1896 г., а позднее со-основатель современной теории вероятностей **П. Леви** (1925, с. vii) заметил, что без теории ошибок это (его основное, посвященное устойчивым распределениям) сочинение “не имело бы смысла”.

9. Лапласов детерминизм

Хорошо известно его изречение (1814/1999. с. 835 левый столбец) о том, что для всесведущего ума, способного на любые вычисления, случайности не существовало бы, и “будущее, как и прошлое, предстало бы перед его взором”. Но таких умов нет, и допустимо считать, что Лаплас всё-таки каким-то образом признавал случайность даже в принципе (Дорфман 1974, с. 265). Фактически же он и не мог обойтись без нее, о чем свидетельствуют его основополагающие достижения в астрономии и работы по статистике населения. Он (1796, с. 504), к примеру, обсуждал также эксцентриситеты планетных орбит и другие небольшие уклонения “от закономерности” [I, п. 8.1.1].

Заметим, далее, что Лаплас не указал на неустойчивые состояния, при которых малые действия ведут к существенным последствиям. Именно такой схемой, кстати, **Пуанкаре** (1896/1912, с. 4; перевод 1999, с. 11) впоследствии главным образом объяснял суть случайных событий. И, наконец, *лапласов детерминизм* был присущ и **Мопертюи** (1756, с. 300), и **Бошковичу** (1758, § 385), которые упомянули вычисления прошлого и будущего (Бошкович, притом, “до бесконечности в обоих направлениях”).

С другой стороны, однако, Лаплас (1776, с. 145) и прежде заявлял, что “случай […] сам по себе не существует”; многие явления могут изучаться лишь в вероятностном смысле, и “теория случаев или вероятностей” обязана своим появлением слабости человеческого ума. Правильнее, конечно, было бы сказать: обязана существованием вероятностных законов поведения сумм и других функций случайных величин, обязана диалектике взаимодействия случайного единичного события и закономерностью массовых случайных явлений.

Особо упомянем *статистический детерминизм* Лапласа (1814/1999, с. 842 левый столбец): он указал не только на закономерности статистики населения и моральной (женитьбы), но и на устойчивость числа писем, отправляемых без адреса, и доходов от лотереи Франции.

10. Некоторые примечательные задачи

10.1. Разорение игрока. А и В продолжают играть, пока один из них не разорится. Как долго будет продолжаться игра? Какова вероятность, что она не продлится более n партий? В своей простейшей форме эта задача восходит к **Паскалю** и **Гюйгенсу** [II, п. 4.1].

Допустим, что игрок А имеет a жетонов и вероятность его выигрыша в каждой партии равна p, и что для игрока В соответствующие величины равны b и q ($p + q = 1$). Обозначим через P_a вероятность потери всех a жетонов игроком А до того, как он выиграет все жетоны у В и через P_{an} – вероятность его разорения не более, чем в n партиях, а для игрока В соответствующие величины пусть будут P_b и P_{bn}. Игру можно представить как случайное блуждание точки С вдоль отрезка длиной ($a + b$) и именно влево – не более, чем на b единиц (шагов), и вправо – не более, чем на a. После каждой партии точка С перескакивает налево с вероятностью p или вправо – с вероятностью q, и игра заканчивается, когда С достигнет любого конца отрезка. Заметим, что случайное блуждание (которое может происходить и в трехмерном пространстве) является (грубой) моделью диффузии и броуновского движения.

Якоб Бернулли несколько раз обращался к этой задаче, но либо (как и Гюйгенс) вникал в нее недостаточно, либо приведя свою соответствующую формулу (1713, ч. 1, комментарий к Задаче № 5) без обоснования.

Доказал эту формулу

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{a^q(a^p - b^p)}{b^p(a^q - b^q)}, \; a \neq b$$

Муавр (1712, Задача № 9) весьма остроумным рассуждением. Он также сформулировал правила для вычисления вероятностей $(P_{an} + P_{bn})$, P_{an}, P_{bn} и рассмотрел случай $a = \infty$. В 1718 г. Муавр решил и другие задачи на разорение игрока, но уже без обоснования, которое можно найти у Хальда (1990, § 20.5). Именно при этом он применил свой новый метод возвратных последовательностей, который мы упоминали в п. 4.

Лаплас обсуждал разорение игрока в нескольких мемуарах. В 1776 г. он применил при этом уравнения в частных разностях даже для случая трех игроков. Этот же тип уравнений применял и **Лагранж** в последнем параграфе своего мемуара 1777 г., притом для решения различных вероятностных задач.

10.2. Петербургский парадокс. В письме **Монмору** 1713 г. **Николай Бернулли** (Монмор (1708/1713, с. 402) описал придуманную им игру. Если А выбросит 6 очков при первом же броске кости, он получает 1 экю от В; если это же произойдет только при втором, третьем, четвертом, … броске, то он же получит 2, 4, 8, … экю. Каков его ожидаемый выигрыш (равный его взносу за право играть на таких условиях)? В 1728 г. Габриель Крамер предложил заменить игральную кость на монету, так что ожидаемый выигрыш А (оставшийся бесконечным) стал равным

$$E\xi = 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/8 + \ldots = \infty, \qquad (10)$$

тогда как ни один разумный человек не согласился бы считать его сколько-нибудь существенным.

В п. 7.2 мы упоминали и эту игру, и Крамера, и **Даниила Бернулли**, в мемуаре 1738 г. которого он был описан. Мемуар был опубликован в Петербурге, что и объясняет ее название. Игра была поистине примечательна, ибо

1. Она ввела в теорию вероятностей случайную величину с бесконечным ожиданием.

2. Она натолкнула на мысль о том, что низкой вероятностью выигрыша (ниже некоторого положительного α) следует пренебрегать; в данном случае – учитывать лишь несколько первых членов ряда (10). Но как выбирать α? И когда можно считать вероятность $(1 - \alpha)$ моральной достоверностью? Общего ответа нет, всё зависит от обстоятельств, не относящихся к математике. **Бюффон** (1777, § 8) рекомендовал значение $\alpha = 1/10\,000$, – вероятность здоровому человеку 56 лет умереть в течение ближайших суток. Его рекомендация хорошо воспринималась, но вряд ли когда-либо применялась: указанное значение было слишком низким, и в любом случае оно не должно было быть универсальным.

3. Парадокс игры привел Даниила Бернулли к мысли о моральном ожидании (п. 7.2), при помощи которого он, в частности, заменил бесконечное ожидание (10) конечной величиной.

4. Он также привел возможно к первому серьезному статистическому опыту. В том же сочинении 1777 г., в § 18, Бюффон сообщил о 2048 партиях петербургской игры, средний выигрыш А в которой оказался равным 4.9, а наибольшее число бросков монеты – девяти, да и то лишь в шести играх. Подобный опыт повторил Дутка (1988), но уже с применением компьютера.

5. **Кондорсе** (1784 – 1787/1994, 1-я часть мемуара), см. также Тодхантер (1865, с. 393), а затем **Лакруа** (1816, с. 129 – 130) заметили, что возможно бесконечная игра представляла собой лишь один опыт, и что разумное исследование должно было быть основано на среднем результате многих игр. Много позже Фрейденталь (1951) исследовал такую серию игр, в которой, однако, роли игроков каждый раз определялись заново по жребию.

10.3. Модель Эренфестов. В двух урнах находится по *n* шаров, белых и черных поровну. Определить (ожидаемое) число белых шаров, остающихся в первой урне после *r* циклических перекладок из одной урны в другую. Эту задачу **Даниил Бернулли** (1770) решил и комбинаторным методом, и при помощи дифференциальных уравнений.

Он, далее, обобщил ее на случай трех урн и шаров трех цветов и заметил существование предельного состояния – равного числа (ожидаемых) шаров каждого цвета в каждой урне. Сейчас можно сказать, что этот факт следует из теоремы об однородных цепях **Маркова**.

В 1777 г. **Лагранж** решил аналогичную задачу при помощи уравнений в частных разностях для конечного числа урн. Тот же метод применил **Лаплас** в 1811 г. для решения подобной же задачи, а в своей *Аналитической теории вероятностей* 1812 г. он (с. 306) уточнил, что имел в виду средние количества и заметил, что окончательный результат не зависел от первоначального распределения шаров в урнах. Наконец, он (1814/1999, с. 843 левый столбец) указал, что ничего не изменится, если даже в процессе перекладок добавлять новые урны, опять-таки с произвольным распределением шаров в них. Он заключил, хотя, видимо, слишком оптимистически, что

> *Можно распространить этот результат на все сочетания в природе, в которых постоянные силы* […] *устанавливают правильный образ действий, способный вызвать даже из недр хаоса системы, управляемые удивительными законами.*

Также поэтически, хотя лишь на основании действия закона больших чисел, **Бертран** (1888, с. XX) указал, что “во всякой игре случай подправляет свои капризы”. Дальнейшая история подобных урновых задач включает знаменитую модель **Эренфестов** 1907 г., с которой принято начинать историю случайных процессов, но которая совпадает с описанной выше моделью.

11. Математическая статистика

Грубо говоря, различие между теорией вероятностей и математической статистикой обусловлено тем, что первая дисциплина дедуктивна, а вторая – частично индуктивна. Она оформилась в XX в., а термин математическая статистика вряд ли появился до Книса (Knies 1850, с. 163) и Вернадского (1852/1963, с. 237). Впрочем, выводы из количественных данных делались уже в древности. В Талмуде, в трактате Taanit (Шейнин 1998, пп. 5.1.2 и 5.3), было указано правило для разграничения случайного от необходимого, а именно, обычной смертности в городе от начала эпидемии чумы. Весьма неточными данными пользовался **Граунт** в 1662 г. и последующие статистики для оценки населения городов и стран и т. д. По **Муавру** (конец п. 4), цель теории вероятностей достигается, как мы сказали бы сейчас, методами математической статистики.

Новый этап в построении математической статистики появился вместе с **Бейесом** (п. 5), а именно со статистическим определением теоретической вероятности события. Для **Лапласа** основным средством открытия законов естествознания оказалась теория вероятностей, – но, можно сказать, в сочетании с математической статистикой. Так, установив, что существование некоторой астрономической величины, указанной наблюдениями, было весьма вероятно, он (1812, с. 361) посчитал желательным обосновать это существование аналитически и действительно добился успеха. И вообще несколько глав его *Аналитической теории вероятностей* можно было бы сейчас считать статистическими. А поскольку он в большой степени опирался на свои прежние мемуары, то неудивительно, что мы находим в них упоминание “нового жанра задач на случаи” (1774b, с. 56) и даже “новую ветвь теории вероятностей” (1781, с. 383). *Новая ветвь* – это выражение **Лагранжа** (письмо Лапласу 13.1.1775 в т. 14 его *Трудов*), который, однако, имел в виду вычисление некоторых вероятностей Лапласом. Он же (п. 6) указал на возможность вычисления π методом статистического моделирования.

Любопытное утверждение **Уильяма Гершеля** (1817, с. 579) свидетельствует, что статистикой иногда обосновывали неверные заключения. Он заявил, что любая звезда, выбранная “случайно” из 14 000 звезд первых семи величин, “вряд ли будет намного отличаться по своим размерам от среднего из всех”. Размеры звезд были в то время совершенно неизвестны, и никакие выводы не могли исходить из незнания, см. [V, п. 9.4].

Теория выборочного метода является главой математической статистики, однако элементы этого метода применялись с XIII в. в Англии при контроле отчеканенной монеты (Стиглер 1977). Тот же Гершель много лет, начиная примерно с 1784 г., подсчитывал количества звезд в различных участках неба; он полагал, что его телескоп проникал до границ конечной, по его мнению, вселенной, и хотел определить ее очертания. И вот на одном отрезке Млечного пути он (1784, с. 158) сосчитал число звезд в шести “случайно” выбранных участках и принял среднее в качестве оценки для всего отрезка.

При отсутствии переписей (современного типа) **Лаплас** (1786) применил выборочный метод для оценки населения Франции; подробное описание его исследования см. Bru (1988). Ему было известно население выборочных районов страны и число ежегодных рождений и там, и во всей Франции. Предполагая отношение этого числа к населению постоянным, он сразу же вычислил искомое население, но главная его задача состояла в том, чтобы на основании своих прежних формул (п. 5) оценить погрешность вычисления.

В 1928 г. **Пирсон** заметил, что урновая модель Лапласа, которую он при этом применил, была теоретически несостоятельна, но что ошибка при оценке погрешности оказалась у него сравнительно небольшой, притом же Лаплас был первым, кто оценивал точность выборочного метода.

Продукцию сельского хозяйства Франции выборочно оценил маршал Вобан еще в самом начале XVIII столетия (Moreau de Jonnès 1847, с. 53 – 54). О выборочных исследованиях сельского хозяйства России в XVII – XVIII вв. см. Птуха (1961).

12. Противодействие

Развитие теории вероятностей встречало противодействие. **Лейбниц**, по крайней мере в 1704 – 1705 гг., не признавал статистических вероятностей, а потому и важности (еще не опубликованного) закона больших чисел **Якоба Бернулли** [II, п. 2.4.4]. **Муавр** (1718/1756, с. 254; перевод Шейнин 2006, с. 109) указал, что “имеются такие писатели […], которые внушают, будто <u>учению о вероятностях</u> нет места ни в каких серьезных исследованиях”. В свою очередь, **Симпсон** (1756, с. 82; перевод Шейнин 2006, с. 116) определил цель своего мемуара (п. 8.3) как опровержение “весьма известных лиц”, которые

Даже публично утверждали, что одному-единственному наблюдению, выполненному с должными предосторожностями, следует доверять настолько же, насколько среднему из большого числа наблюдений.

Естествоиспытатели могли придерживаться мнения **Бойля** (1772, с. 376) о том, что “опыты надлежит оценивать их значением, а не числом”. Впрочем, два подхода к экспериментированию, таким образом намеченные им, не должны непременно противостоять друг другу.

Мы теперь упомянем Флемстида (1646 – 1719) и Брадлея (1693 – 1762), которые никак не противодействовали идеям теории вероятностей, но и не были настроены так решительно, как Симпсон. Флемстид (Baily 1835, с. 376)

Обычно принимал тот результат, который в тот момент казался ему наиболее удовлетворительным, не обращая никакого внимания на остальные. Он и не редуцировал все свои наблюдения (или их существенную часть). […] *И* […] *многие вычисленные им результаты* […] *он не включил ни в один из своих рукописных каталогов.*

Но не всё так просто. Флемстид никогда не торопился с публикацией своих наблюдений (Berry 1898, § 198) и неоднократно подчеркивал необходимость надежных наблюдений, например в письмах 1669 и 1672 гг. (Rigaud 1841, с. 129 – 133).

Представляется, что Брадлей (страница рукописи без названия и даты; впервые опубл. в 1787 г., см. Rigaud 1832, с. 78) учитывал все свои наблюдения, а в одном случае вывел среднее из 120 наблюдений. Впрочем, учитывал не совсем обычным образом (1750, с. 29):

Когда в течение нескольких дней сделано несколько наблюдений одной и той же звезды, я выписываю либо средний результат, либо то наблюдение, которое лучше всего соответствует ему.

И там же (с. 17) по поводу своего открытия нутации: “Это [открытие] указывает нам громадную пользу развития [астрономии] равно как и любой другой ветви естествознания, при помощи регулярных рядов наблюдений и опытов”. Он же, заметим, открыл аберрацию света.

Основное противодействие теории вероятностей оказал **Даламбер**, мнение которого, однако, не остановило ее развития. В 1754 г. и снова в мемуаре (1768a) он заявил, что вероятность выбросить подряд два орла при игре в орлянку равна 1/3, а не 1/4, и он считал, что после серии событий (например, орлов) более вероятным становится противоположное событие (решетка). Это недостойное ученого мнение он считал возможным обосновать статистически, – но ничего подобного не предпринял, а потому и не усомнился в своих словах. Далее, он (1768b) отказался понимать различие между средним и вероятным сроками жизни (что вполне было ясно уже **Гюйгенсу** [II, п. 4.2.3]. Наконец, Даламбер (1768c, с. 309 – 310) вообще начал отрицать теорию вероятностей, не относя ее “к точным и верным исчислениям ни по принципам, ни по результатам”.

В письме 27 мая/7 июня 1763 г. **Эйлер** (Juskevic и др. 1959, с. 221) упомянул “невыносимое высокомерие” Даламбера и указал, что тот “самым бесстыдным образом защищает свои ошибки”, – возможно, не только в теории вероятностей. И вот вторжение Даламбера (1759/1821, с. 167) в чуждую для него область: “Врач, который более всего заслуживает доверия, – это тот, который меньше всех верит в медицину”.

Но Даламбер высказывал и дельные мысли. Вслед за **Бюффоном** (п. 10.2) он заметил, что низкими вероятностями следует пренебрегать и справедливо критиковал мемуар **Даниила Бернулли** о вариоляции оспы (п. 7.1). И вообще некоторые его замечания, опережавшие свое время, означали, что теорию вероятностей следовало строить на более прочном основании (что, впрочем, было вряд ли возможно в то время).

13. В преддверии нового столетия

Новый век начался в 1812 г. с *Аналитической теории вероятностей* **Лапласа**, на которую мы неоднократно ссылались. В ней он собрал воедино свои прежние мемуары (включая опубликованные в 1809 – 1811 гг.), хотя и не достиг цельности изложения. Он, правда, везде, где было возможно, применял тот или иной вариант нестрого доказанной им центральной предельной теоремы, однако не ввел даже эвристического определения случайной величины, а потому не смог считать плотности распределения и характеристические функции самостоятельными математическими объектами. Его теория вероятностей оставалась прикладной дисциплиной, и ее со временем пришлось строить заново.

Но что было достигнуто к 1801 г.? Были доказаны первые предельные теоремы и создан первый вариант теории вероятностей (п. 5); были введены и применялись производящие функции и конечно-разностные уравнения, а интегралы стало возможным вычислять новыми сложными методами (Лаплас). Изучение азартных игр привело к возникновению важных тем для исследования с будущими приложениями к естествознанию и экономике. Теория вероятностей могла бы широко применяться в статистике населения (практически, однако, этого не случилось по различным причинам) и действительно широко применялась при обработке наблюдений, но вот естествознание в основном оставалось еще в стороне. Задачи, по существу относящиеся к математической статистике, решались неоднократно, и пришло время для открытия принципа наименьших квадратов (**Гаусс** 1809).

Библиография

Источники

Чебышев П. Л. (лекции 1879/1880), *Теория вероятностей*. М. – Л., 1936.

Шейнин О. Б. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также www.sheynin.de.

--- (2007f), *История теории ошибок*. Берлин. Также www.sheynin.de.

D’Alembert J. Le Rond (1754), Croix ou pile. *Enc. ou Dict. Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, t. 4. Stuttgart, 1966, pp. 512 – 513.

--- (1759), Essai sur les elemens de philosophie. Выдержку в тексте см. *Oeuvr. Compl.*, t. 1, pt 1. Paris, 1821, pp. 116 – 348.

--- (1761a), Réflexions sur le calcul des probabilités. *Opuscules math.*, t. 2. Paris, pp. 1 – 25.

--- (1761b), Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. Там же, pp. 26 – 95.

--- (1767), Doutes et questions sur le calcul des probabilités. *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, t. 5. Amsterdam, 1768, pp. 239 – 264.

--- (1768a), Sur le calcul des probabilités. Там же, т. 4, с. 73 – 79.

--- (1768b), Sur la durée de la vie. Там же, с. 92 – 98.

--- (1768c), Extraits de lettres sur le calcul des probabilités et […], § 1. Sur le calcul des probabilités. *Opuscules math.*, t. 4, pp. 283 – 310.

Arbuthnot J., Арбутнот Дж. (1712), An argument for Divine Providence taken from the constant regularity observed in the births of both sexes. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 30 – 34).

Arnauld A., Nicole P., Арно А., Николь П. (1662), *L'art de penser*. Paris, 1992. *Логика или искусство мыслить*. М., 1991.

Bayes T., Бейес Т. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, с комментарием R. Price. Перепечатка: *Biometrika*, vol. 45, 1958, pp. 293 – 315 и E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 131 – 153). Немецкий перевод 1764 – 1765: Leipzig, 1908.

--- (1765), Вторая часть мемуара. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 54, pp. 296 – 325.

Bernoulli D., Бернулли Д. (1735), Recherches physiques et astronomiques […] Quelle est la cause physique de l'inclinaison des planes des planets […]. В книге автора (1987, pp. 303 – 326).

--- (1738, латин.), Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, vol. 22, 1954, pp. 23 – 36. Опыт новой теории измерений жребия. В книге *Теория потребительского поведения и спроса*. СПб, 1999, с. 11 – 27.

--- (1766), Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. В книге автора (1982, pp. 235 – 267).

--- (1768a), De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi specimen. Там же, pp. 276 – 287.

--- (1768b), De duratione media matrimoniorum. Там же, pp. 290 – 303. О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о смежных вопросах. В книге Птуха (1955, с. 453 – 464).

--- (1770), Disquisitiones analyticae de nouo problemate coniecturale. Там же, pp. 306 – 324.

--- (1770 – 1771), Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata. Там же, pp. 326 – 360.

--- (1778, латин.), The most probable choice between several discrepant observations and the formation therefrom of the most likely induction. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 1 – 18. Перепечатка: Pearson & Kendall (1970, pp. 155 – 172).

--- (1780), Specimen philosophicum de compensationibus horologicis. В книге автора (1982, pp. 376 – 390).

--- (1982, 1987), *Werke*, Bde 2 – 3. Basel.

Bernoulli J., Бернулли Я. (1713), *Ars Conjectandi*. В книге автора (1975, pp. 107 – 259). *Искусство предположений*, ч. 1 – 3. Берлин, 2006. Также www.sheynin.de. *О законе больших чисел*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1986. Содержит перевод ч. 4 *Искусства предположений* (с. 23 – 59).

--- (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel.

Bernoulli N. (1709), De usu artis conjectandi in iure. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 287 – 326).

Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités*. Второе изд., 1907. Перепечатка: New York, 1970, 1972.

Boscovich R. G. (1758, латин.), *Theory of Natural Philosophy.* Cambridge (Mass.) – London, 1966. Перевод с изд. 1763 г.

Boyle R. (1772), A Physico-Chymical Essay. *Works*, vol. 1. Sterling, Virginia, 1999, pp. 359 – 376.

Buffon G. L. L., Бюффон Ж. Л. Л. (1777), Essai d'arithmétique morale. *Oeuvr. Phil.* Paris, 1954, pp. 456 – 488. Опыт моральной арифметики (частичный перевод). В книге Шейнин (2007b, с. 93 – 125).

Condorcet M. A. N. Caritat de (1986), *Sur les éléctions et autres textes.* Paris. Содержит Discourse préliminaire de l'essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des voix (1785), pp. 7 – 177 и Elements du calcul des probabilités (1805), pp. 483 – 623. Essai полностью (а не только Discourse) опубликовано отдельно: New York, 1972.

--- (1994), *Arithmétique politique*. Paris. Редакторы B. Bru, P. Crépel Содержит перепечатки Sur le calcul des probabilités (1784 – 1787), с. 385 – 448, статей автора из *Enc. Méthodique* и его ранее не опубликованные или частично опубликованные рукописи.

Cotes R. (1722), *Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici. Opera misc.* London, 1768, pp. 10 – 58.

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

De Moivre A. (1712, латин.), De mensura sortis, or, On the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 237 – 262 с комментарием A. Hald (pp. 229 – 236).

--- (1718), *Doctrine of Chances*. London, 1738 и 1756. Перепечатка третьего изд.: New York, 1967. Последние два издания включают статью автора 1733 г. в его переводе с латинского: Method of approximating the sum of the terms of the binomial […]. В третьем изд. (с. 329) перепечатано Посвящение первого издания книги Ньютону.

--- (1725), *Treatise of Annuities on Lives*. В книге автора (1756, pp. 261 – 328). Немецкий перевод: Вена, 1906.

--- (1730), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. London.

Euler L. (1767), Sur la probabilité des sequences dans la lotterie Génoise. *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 113 – 152.

--- (1778, латин.), Комментарий к Bernoulli D. (1778). Английский перевод опубликован вместе с англ. переводом мемуара Бернулли. Мемуары Эйлера по теории вероятностей, статистике и обработке наблюдений перепечатаны в его *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923.

Fourier J. B. J. (1826), Sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения небесных тел, кн. 2, разд. 3. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.

--- (1823, латин.), Теория комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам. Там же, с. 17 – 57.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Graunt J., Граунт Дж. (1662), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Baltimore, 1939. Много последующих изданий на разл. языках. Естественные и политические наблюдения над бюллетенями о смертности. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики, математики страхового дела*. Берлин, с. 5 – 105. Также www.sheynin.de

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

--- (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Henry M. Ch. (1883), *Correspondance inedite de Condorcet et de Turgot*. Genève, 1970.

Herschel W. (1784), Account of some observations. *Scient. Papers*, vol. 1. London, 1912, pp. 157 – 166. [London, 2003.]

Heyde C. C., Seneta E., редакторы (2001), *Statisticians of the Centuries*. New York.

Juskevic A. P. и др., редакторы (1959), *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften in Briefwechsel L. Eulers*, Bd. 1. Berlin.

Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.

Kepler J. (1609, латин.), *New Astronomy*. Cambridge, 1992.

Kotz S., редактор (2006), *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Hobokan, New Jersey. Многотомное 2-е издание. Уровня энциклопедии никак не достигает.

Lacroix S.-F. (1816), *Traité élémentaire du calcul des probabilités.* Paris. Последующие издания 1828, 1833, 1864.

Lagrange J. L. (1867 – 1892), *Oeuvres*, tt. 1 – 14. Paris.

В т. 2 (1868): Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations (1776), pp. 173 – 234.

В т. 4 (1869): Recherches sur les suites récurrentes (1777), pp. 151 – 251.

В т. 13 (1882): Его переписка с Даламбером.

В т. 14 (1892): Его переписка с другими учеными.

Lambert J. H. (1760), *Photometria.* Augsburg.

--- (1765 – 1772), *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1 – 3. Berlin. Первая часть(1765) содержит *Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie* (pp. 1 – 313) и *Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche* (pp. 424 – 488). Третья часть (1772) содержит *Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen* (pp. 476 – 569).

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1798 – 1825), *Traité de mécanique céleste*, tt. 1 – 5. Paris. См. ниже его *Oeuvr. Compl.*

--- (1878 – 1912), *Oeuvres complètes*, tt. 1 – 14. Paris.

В тт. 1 – 5 (1878 – 1882): перепечатка *Méc. Cél.* Англ. перевод: *Celestial Mechanics* (1832), vols 1 – 4. New York, 1966.

В т. 6 (1884): перепечатка изд. 1835 г. *Exposition du système du monde* (1796). *Изложение системы мира*. Л., 1982.

В т. 7 (1886): *Théorie analytique des probabilités* (1812) с Предисловием, *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) и четырьмя Дополнениями (1816 – прим. 1819). Перевод *Essai*: Опыт философии теории вероятностей. В книге *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1999, с. 834 – 863.

В т. 8 (1891) содержится Sur les suites récurro-récurrentes (1774a), pp. 5 – 24; Sur la probabilité des causes par les événements (1774b), pp. 27 – 65 и Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies (1776), pp. 69 – 197.

В т. 9 (1893) содержится Sur les probabilités (1781), pp. 383 – 485.

В т. 10 (1894) содержится Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres (1785 – 1786), pp. 209 – 338.

В т. 11 (1895) содержится Sur les naissances, les mariages et les morts (1786), pp. 35 – 46, и Sur quelques points du système du monde (1789), pp. 477 – 558.

В т. 12 (1898) содержится Sur les integrals définies […] (1811), pp. 357 – 412.

В т. 14 (1912) содержится Leçons de mathématiques données à l'École normale en 1795 (1812), pp. 10 – 177.

Lévy P. (1925), *Calcul des probabilités.* Paris.

Maire [C.], Boscovich [R. G.] (1770), *Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise*. Paris. Уравнивание наблюдений обсуждается в кн. 5, написанной Бошковичем.

Maupertuis P. L. M. (1756), Lettres. *Oeuvres*, t. 2. Lyon, 1756, pp. 185 – 340.

Michell J. (1767), An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars. *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. 12, 1809, pp. 423 – 438.

Mill J. S., Милль Дж. С. (1843), *System of Logic*. [Возможно последнее издание: *Coll. Works*, vol. 8. Toronto, 1974.] *Система логики.* СПб, 1914. Перевод с изд. 1879 г.

Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris, 1713. Перепечатка: New York, 1980.

Newton I., Ньютон И. (1704), *Optics*. *Opera quae extant omnia*, vol. 4. London, 1782, pp. 1 – 264 (перепечатка издания 1718 г.). *Оптика*. М., 1954.

Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London.

Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc (лекции 1921 – 1933). London. Редактор E. S. Pearson.

Poincaré H., Пуанкаре А. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912. Перепечатка: Paris, 1923 and 1987. *Теория вероятностей.* Ижевск, 1999.

--- (1921), Résumé analytique [собственных исследований]. В книге *Mathematical Heritage of H. Poincaré*. Providence, Rhode Island, 1983. Ред. F. E. Browder, pp. 257 – 357.

Rigaud S. P. (1832), *Miscellaneous Works and Correspondence of J. Bradley*. Oxford. [New York, 1972.]

--- (1841), *Correspondence of Scientific Men of the 17th Century*, vols 1 – 2. Oxford.

Schneider I., Editor (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfangen bis 1933*. Darmstadt. Хрестоматия. Большинство статей/отрывков на англ. языке.

Simpson T., Симпсон Т. (1740), *Nature and Laws of Chance*. London.

--- (1756), On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 64, pp. 82 – 93.

--- (1757), Переработанный вариант мемуара. В книге автора *Misc. Tracts on Some Curious* […] *Subjects in Mechanics* […]. London, pp. 64 – 75.

Süssmilch J. P. (1741), *Die Göttliche Ordnung*. Несколько последующих изданий. Перепечатка изд. 1765 г. с дополнительным т. 3 издания 1776 г.: Göttingen – Augsburg, 1988.

--- (1758), Gedancken von dem epidemischen Krankheiten. Редактор Wilke J. (1994), *Die königliche Residenz und die Mark Brandenburg im 18. Jahrhundert*. Berlin, pp. 69 – 116.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Исследования

Вернадский В. И. (1852), Задачи статистики. В книге Дружинин Н. К. (1963), *Хрестоматия по истории русской статистики*. М.

Дорфман Я. Г. (1974), *Всемирная история физики*. М.

Птуха М. В. (1955), *История статистики*, т. 1. М.

--- (1961), Выборочные исследования сельского хозяйства России в XVII – XVIII вв. *Уч. зап. по статистике*, вып. 6, с. 94 – 100.

Хинчин А. Я. (1961), Частотная теория Мизеса и современные идеи теории вероятностей. *Вопросы философии*, № 1, с. 91 – 102, № 2, с. 77 – 89.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1972), Daniel Bernoulli's work on probability. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 105 – 132).

--- (1984), On the history of the statistical method in meteorology. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 31, pp. 53 – 93.

--- (1986), Quetelet as a statistician. Там же, vol. 36, pp. 281 – 325.

--- (1998), Statistical thinking in the Bible and the Talmud. *Annals of Sci.*, vol. 55, pp. 185 – 198.

--- составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de. Содержит переводы статей/мемуаров Арбутнота (1712), Муавра (1733/1756), Симпсона (1756 – 1757), Бейеса (1764 – 1765), Даниила Бернулли (1778) и Эйлера (1778), а также предисловия книг Монмора (1708/1713) и Муавра (1718/1756) и аннотированного автором Содержания книги Зюссмильх (1741/1765) и перевод § 14 этой книги.

--- составитель и переводчик (2007a), *Вторая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de. Содержит перевод гл. 4 *Аналитической теории вероятностей* Лапласа (1812) "О вероятности ошибок средних результатов".

--- составитель и переводчик (2007b), *Третья хрестоматия по истории теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de. Содержит перевод мемуара Даниила Бернулли 1766 г. и частичный перевод *Опыта моральной арифметики* Бюффона 1777 г.

--- (2007c), Euler's work in probability and statistics. В книге *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*. Heber City, Uta, pp. 281 – 316.

--- (2007d), *Статьи по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de. Переводы статей, в том числе статей (1972; 1986; 1998).

--- (2007e), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Hist. Scientiarum*, vol. 17, pp. 38 – 48.

Юшкевич А. П. (1986), Николай Бернулли и издание *Искусства предположений* Якоба Бернулли. *Теория вероятностей и ее применения*, т. 31, с. 333 – 352.

Baily F. (1835), *An Account of the Revd J. Flamsteed*. London.

Berry A. (1898), *Short History of Astronomy*. London. [New York, 1961.]

Bradley J. (1750), Letter […] concerning an apparent motion observed in some of the fixed stars. В книге Rigaud (1832, pp. 17 – 41).

Cornfield J. (1967), The Bayes theorem. *Rev. Intern. Stat. Inst.*, t. 35, pp. 34 – 49.

Crépel P. (1987), Le premier manuscript de Condorcet sur le calcul des probabilités (1772). *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 282 – 283.

--- (1988), Condorcet et l'estimation statistique. *J. Soc. Stat. Paris*, 129^{e} année, pp. 46 – 67.

Czuber E. (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung*, Bd. 1. New York, 1968.

Cubranic N. (1961), *Geodetski rad R. Boskovica*. Zagreb.

De Montessus R. (1903), Un paradoxe du calcul des probabilités. *Nouv. Annales Math.*, sér. 4, t. 3, pp. 21 – 31.

Dutka J. (1981), The incomplete Beta function – a historical profile. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 24, pp. 11 – 29.

--- (1988), On the St. Petersburg paradox. Там же, vol. 39, pp. 13 – 39.

Eisenhart C. (1989), Laws of error. В книге Kotz (2006, т. 6, с. 4052 – 4086).

Farebrother R. W. (1993), Boscovich's method for correcting discordant observations. В книге P. Bursill-Hall, редактор, *Boscovich. Vita e attività scientifica. His Life and Scientific Work*. Roma, pp. 255 – 261.

Fieller E. C. (1931), The duration of play. *Biometrika*, vol. 22, pp. 377 – 404.

Freudenthal H. (1951), Das Petersburger Problem in Hinblick auf Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Nachr.*, Bd. 4, pp. 184 – 192.

Freudenthal H., Steiner H.- G. (1966), Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik. В книге Behnke, H. и др., редакторы, *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 4. Göttingen, pp. 149 – 195.

Gillies D. A. (1987), Was Bayes a Bayesian? *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 325 – 346.

Gini C. (1946), Gedanken von Theorem von Bernoulli. *Z. f. Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg, pp. 401 – 413.

Gowring R. (1983), *Roger Cotes – Mathematical Philosopher*. Cambridge.

Granger G.-G. (1956), *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet*. Paris.

Henny J. (1975), Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 457 – 507).

Jorland G. (1987), The St.-Petersburg paradox, 1713 – 1937. В книге Krüger L. и др., редакторы, *Probabilistic Revolution*, vol. 1. Cambridge (Mass.), pp. 157 – 190.

Knies C. G. A. (1850), *Statistik als selbstständige Wissenschaft*. Kassel.

Kohli K. (1975), Spieldauer. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 403 – 455).

--- (1975), Aus de Briefwechsel zwischen Leibniz und J. Bernoulli. Там же, pp. 509 – 513.

Koopman B. O. (1940), The bases of probability. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 763 – 774.

Moreau de Jonnès A. (1847), *Eléments de statistique.* Paris.

Paty M. (1988), D'Alembert et les probabilités. В книге Roshdi, R., редактор, *Les sciences à l'époque de la Révolution Française*. Paris, pp. 203 – 265.

Pearson K. (1924), Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika*, vol. 16, pp. 402 – 404.

--- (1925), James Bernoulli's theorem. Там же, vol. 17, pp. 201 – 210.

--- (1928), On a method of ascertaining limits to the actual number of marked individuals […] from a sample. *Biometrika*, vol. 20A, pp. 149 – 174.

Schneider I. (1968), Der Mathematiker A. De Moivre. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 5, pp. 177 – 317.

Seal H. L. (1949), Historical development of the use of generating functions in probability theory. *Bull. Assoc. Actuaires Suisses*, t. 49, pp. 209 – 229. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 67 – 86).

Shoesmith D. (1987), The Continental controversy over Arbuthnot's argument etc. *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 133 – 146.

Stigler S. M. (1977), Eight centuries of sampling inspection. The trial of the pyx. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 72, pp. 493 – 500.

--- (1986), *History of Statistics*. Cambridge (Mass.) – London. Содержит клеветнические утверждения об Эйлере и Гауссе.

Takacs L. (1969), On the classical ruin problem. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 64, pp. 889 – 906.

Thatcher A. R. (1957), Note on the early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika*, vol. 44, pp. 515 – 518. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 127 – 130).

Walker Helen M. (1929), *Studies in the History of the Statistical Method.* New York, 1975.

Westergaard H. L. (1932), *Contributions to the History of Statistics*. New York, 1968.

Yamazaki E. (1971), Dalembert et Condorcet: quelques aspects de l'histoire du calcul des probabilités. *Jap. Studies Hist. Sci.*, vol. 10, pp. 60 – 93.

Zabell Sandy L. (1988), The probabilistic analysis of testimony. *J. Stat. Planning and Inference*, vol. 20, pp. 327 – 354.

--- (1989), The rule of succession. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321. Перепечатка в книге автора *Symmetry and Its Discontents.* Cambridge, 2005, pp. 38 – 79.

IV

К истории статистического метода в астрономии

Часть первая

1. Введение

Мы предлагаем компиляцию из нескольких наших английских статей [V, Библиография]. Большое место займет, естественно, обработка астрономических наблюдений, и необходимые сведения из теории ошибок (и ее истории) можно найти в другой статье этого же сборника [III, п. 8]. Мы не описываем работ **Бируни** и почти не повторяем сказанного ранее о древних астрономах, Бируни (973 – 1048) и **Кеплере**, см. Шейнин (2007а, с. 13 – 18, 22 – 25; 2007b, с. 99 – 104); о **Галилее** см. Шейнин (2005, с. 23 и 30).

2. Древняя астрономия до Птолемея

2.1. Аристарх (конец IV в. – первая половина III в. до н. э.). Известна только одна его работа (1959), которую Нейгебауер (1975, с. 642 – 644) по существу не принял во внимание как “чисто математическое упражнение”[1] и заявил, что некоторые наблюдения, содержащиеся в ней, выдуманы, см. также Lloyd (1982, с. 153). Но тот же Нейгебауер (с. 659) считал возможным, что Аристарх был первым, кто сумел успешно математически обработать немногочисленные числовые результаты и тем самым “заменить чисто умозрительные рассуждения рациональными эмпирическими доводами”.

Известно также, что Аристарх систематически указывал границы изучаемых им количественных постоянных. Так, он (1959, с. 403) заявил, что “отношение диаметра солнца к диаметру Земли больше, чем […] [19:3], но меньше, чем […] [43:6]”, т. е. находится в пределах интервала [6.33 – 7.17], на самом же деле это отношение равно 109.

Toomer (1974, с. 139) заметил, что установление подобных границ “было хорошо известным приемом, […], который применяли, например, Аристарх, **Архимед** [см. наш п. 2.2] и **Эратосфен**”. Добавим: и **Гиппарх**, см. п. 2.3. Но, конечно же, исходить при вычислениях из таких границ, особенно если требовалось учитывать несколько постоянных, было трудно[2].

2.2. Архимед (прим. 287 – 212 до н. э.). Сославшись на **Аристарха**, Архимед (1925, с. 68 – 69) применил тот же метод установления границ и добавил несколько слов о погрешностях измерений диаметра Солнца. Впрочем, мы полагаем, что он имел в виду погрешность измерений вообще; вот его утверждение (с. 69):

> *Действительно, трудно выполнить это измерение, потому что ни глаз, ни руки, ни приборы, которые требуются для этого, не обеспечивают необходимой для этих наблюдений надежности. Нет нужды в длительных обсуждениях этих вещей, тем более, что они уже часто наглядно рассматривались. Но для решения нашей задачи нужно установить два угла, один – не превышающий угла, под которым мы видим Солнце, а второй – не меньший последнего.*

Где рассматривалось всё это – неизвестно.

Далее он описал свой метод измерения диаметра Солнца, и, основываясь на нем, можно считать, что астрономы уже в то время или даже раньше знали, что их наблюдения подвержены ошибкам. Так, Архимед (с. 69 – 70) указал, что существует ошибка (очевидно, случайная), вызванная тем, что “глаз высматривает [цель] не из точки, а из определенной поверхности”.

Архимед не упомянул погрешностей, вызываемых внешними причинами, но трудно представить себе, что о них ничего не было известно. Примечательно, далее, что он не упомянул систематических ошибок, хотя, опять же, вряд ли астрономы не заметили, или хотя бы не заподозрили, что некоторые погрешности действуют систематически, а сам Архимед (и **Гиппарх**) проводил регулярные наблюдения видимых диаметров Солнца и Луны (Нейгебауер 1975, с. 659), притом Архимед считался хорошим наблюдателем (**Ибн Юнус**, старший современник **Бируни**, см. Хартнер 1977, с. 9).

2.3. Гиппарх (ок. 180 или 190 – 125 до н. э.). Комментаторы в общем согласны в своих оценках работы Гиппарха и признают его как честного ученого, не боявшегося сообщать о противоречиях в наблюдениях (Toomer 1974, с. 140) и даже считавшего это необходимым; как ученого, который мог "выжать надежные результаты" из нескольких наблюдений (там же), и как астронома, который собрал и систематизировал наблюдения для **Птолемея**. Последний (1984, IX 2, с. 421; H 210), см. также (III 1, с. 136; H 200), кстати, назвал Гиппарха "великим приверженцем истины"[3].

И вот мнение **Лапласа** (1796/1982, с. 269 и 270):

Из всех древних астрономов Гиппарх […] *большим числом и точностью своих наблюдений, важными выводами, которые он сумел сделать из их сравнения между собой и с ранее сделанными наблюдениями, и остроумными методами, которыми он руководствовался в своих изысканиях, больше всего заслужил признательность астрономии. Птолемей, которому главным образом мы обязаны знакомством с его работами, постоянно опирался на его наблюдения и теории. Он справедливо ценил Гиппарха как астронома большой изобретательности, редкой прозорливости и искреннего друга истины.*

Его таблицы Солнца, несмотря на их несовершенство, являются долговременным памятником его гению, настолько уважаемым Птолемеем, что он подчинил ему свои наблюдения.

Особо заметим, что Гиппарх (Toomer 1974, с. 131) знал, что при благоприятных условиях ошибки наблюдения сравнительно мало влияют на искомую постоянную. На другом примере Giora Hon (1989, с. 135 – 136) указала, что Гиппарху была известна противоположная возможность, см. также Toomer (с. 139). По ее мнению подобное знание оказалось

Поворотным пунктом в греческой астрономии и вообще в науке относительно [влияния] *возможных ошибок наблюдений или, по сути, экспериментальных ошибок* […]. *С появлением системы Птолемея с ее мощным математическим описанием это понимание, проявленное Гиппархом* [и самим Птолемеем!], *было утеряно.*

Почему утеряно, и где доказательство этого? Нейгебауер (1950, с. 250), однако, упоминает в этой связи не Гиппарха, а вавилонских астрономов эпохи династии Селевкидов (правившую в одном из эллинистических государств в 312 – 64 до н. э.). Он утверждает, что вычисления, относящиеся к Луне и планетам, “были в то время “основаны на чрезвычайно малом числе наблюдений”, причем установление искомых соотношений не требовало “очень высокой точности отдельных наблюдений”. И далее:

> *Мне представляется, что одной из самых восхитительных черт древней астрономии было то, что все усилия направлялись на наибольшее возможное уменьшение влияния неточности отдельных наблюдений грубыми инструментами.*

И в другом месте он же (1948, с. 101): в древности

> *Наблюдения были скорее качественными, чем количественными. В связи с измерением диаметров Солнца и Луны Птолемей (V 15; H 417)*[4] *говорит, что при помощи инструментов можно было достаточно хорошо решить* <u>*когда углы равны*</u>*, но не* <u>*как велики углы*</u>.

Мы вернемся к этой теме при обсуждении статьи Аабо и Де Солла Прайса (п. 3.3); впрочем, здесь мы отметим, что эти авторы (с. 6 – 13), см. также Palter (1970, с. 123 – 125), описывают исследование движения Солнца Гиппархом и определение длины отдельных сезонов, которые он выполнил несмотря на невозможность их непосредственного измерения.

О регулярных наблюдениях длины тропического года Гиппархом (и Птолемеем) см. п. 3.1.4. Известно, что Гиппарх ввел само это понятие; он не осмелился утверждать, что эта длина постоянна, но ему пришлось принять для нее некоторое значение, чтобы разработать свою теорию движения Солнца. Гиппарх также открыл прецессию. Он предполагал, что константа прецессии равна 1° в 100 лет, хотя это значение было у него наименьшим. В обоих случаях он действовал в соответствии с давнишним методом установления границ для исследуемой величины (п. 2.1), и Нейгебауер (1956, с. 324) вежливо заметил, что Гиппарх “оставался как можно ближе к исходным эмпирическим данным”.

3. Птолемей (II в.)

Альмагест был написан примерно в 150 г. Исходя из прежних и своих собственных наблюдений, Птолемей построил систему мира, которая удержалась в науке примерно полтора тысячелетия[5]. И в то же время конкретное происхождение его количественных исходных данных является “таинственным и оставляет нас в недоумении” (Джинджерих 1983, с. 141), а методы их обработки сомнительны. Вот наши основные выводы, поскольку они относятся к теории ошибок.

1. Птолемей знал, что ошибки наблюдений неизбежны.
2. Он назвал некоторые источники ошибок.
3. Он знал, как по возможности уменьшить влияние некоторых из них.
4. Он размышлял о выборе методов наблюдений.
5. Он не отличал случайных ошибок от систематических в явном виде, но знал, что некоторые погрешности действуют систематически.
6. По крайней мере в одном случае Птолемей (п. 3.6) заметил, что “следует выбирать среднее между крайними наблюдениями”; при двух

наблюдениях это приводило бы к среднему арифметическому. И, при отсутствии иных сведений, он вряд ли стал бы существенно отклоняться от указанной оценки. О других вариантах уравнивания см. конец п. 3.5.

3.1. Принципы и методы наблюдений. Мы остановимся на высказываниях из *Альмагеста*, а в нескольких случаях – из *Tetrabiblos* (1956). Точнее, мы сформулируем несколько утверждений и приведем соответствующие примеры из этих источников. Поскольку Птолемей не обсуждал принципы и методы наблюдений систематически, нам придется ссылаться на некоторые его высказывания повторно. Особо заметим (см. п. 3.1.2), что он, конечно же, не различал явно систематических ошибок от случайных. Lloyd (1982, с. 158, Прим. 66), который в этом отношении благосклоннее других комментаторов, полагает, что тот “иногда косвенно замечает то, что мы могли бы назвать систематическими ошибками”. Он также указывает, что Птолемей пользовался специальным термином, *аксиологос диафора*, в смысле *существенное* или *примечательное* различие, но не предполагает, что выбранные им примеры из *Альмагеста* относятся только к систематическим ошибкам. Вот они.

III 1, с. 132; H 194: не отличаются друг от друга на существенную величину

III 1, с. 134; H 197: никакого расхождения, которое следовало бы отметить

IV 11, с. 215: H 347: существенное расхождение

V 10, с. 243; H 400: значимая ошибка

3.1.1. Наблюдай добросовестно и четко записывай результаты. Птолемей (IV 9, с. 206; H 328) отбирал “надежно зарегистрированные ” лунные затмения, результаты которых были “недвусмысленно записаны” (IV 6, с. 190; H 301). Он (IX 2, с. 423; H 213) использовал наблюдения, которые “вероятнее всего были надежными”, выбирал “точно” (IV 9, с. 207; H 332) или “очень точно” (IV 6, с. 190; H 301) наблюденные лунные затмения, “надежные наблюдения” (IX 10, с. 461; H 283) и (X 4, с. 474; H 306), наблюдения, которые были сделаны “весьма уверенно” и “с наивысшей точностью” (III 1, с. 137; H 203). И он (IX 2, с. 420; H 209) заметил, что “большинство древних наблюдений [планет] были записаны так, что их трудно оценить”[6].

Наконец, Птолемей (III 1, с. 137; H 203) отбросил “довольно грубые” наблюдения и неодобрительно отозвался о неназванных астрономах, которые “не заботились” по поводу несовершенств.

3.1.2. Исключай, или уменьшай систематические влияния.

1. Птолемей (IX 2, с. 421; H 210) знал, что рефракция влияет на астрономические наблюдения. “Один и тот же промежуток [между звездой и планетой] представляется наблюдателю бóльшим возле горизонта, и меньшим вблизи середины неба”. Он, видимо, подразумевал, что зенитные расстояния звезды и планеты не совпадали. Но никаких поправок за рефракцию Птолемей не вводил.

2. Наблюдения при лунных затмениях “являются единственными, […] которые позволяют нам точно определять положение Луны; все

остальные […] могут быть намного ошибочны ввиду лунного параллакса” (IV 1, с. 173; H 265), см. также (IV 1, с. 174; H 268).

Можно сказать, что, по Птолемею, используемая модель должна быть достаточно верна. Так, он (IV 9, с. 206; H 328 – 329) упоминает несколько условий, которые необходимо выполнять при лунных наблюдениях, чтобы промежуток времени между ними содержал “целое число оборотов по широте”, см. также (IV 9, с. 207; H 332).

3. Птолемей (IX 2, с. 421; H 209) описывает теоретическую ошибку, которую можно избежать при измерении “сравнительно больших” расстояний между планетой и звездой.

4. Он (III 1, с. 134; H 197) замечает, что астрономические инструменты могут быть “расстроены” ввиду неправильной установки или ошибки при разделении круга. Если, добавляет Птолемей, инструмент устанавливается “только один раз […] на длительное время”, то он незаметно сместится. Рекомендаций он никаких не предложил, но очевидно понимал, что при повторных установках соответствующая ошибка окажется переменной. Аналогично, надлежащая программа наблюдений могла бы уменьшить и сделать случайным влияние ошибок градуировки, но вряд ли этого можно было бы ожидать в древности.

Примечательное утверждение о погрешностях инструментов и приборов содержится в *Tetrabiblos* (1956, III 2, с. 231):

> *Практически все другие гороскопические инструменты, которым доверяет большинство более осторожных наблюдателей, часто подвержены погрешностям, солнечные инструменты ввиду случайного сдвига своего положения или своего гномона, а водяные часы по различным причинам, ведущим к засорению и нерегулярности в течении воды, а также по чистому случаю*[7].

5. Птолемей (IX 2, с. 421; H 209) указывает, что “моменты [наблюдения …] могут быть ошибочны как ввиду атмосферных различий, так и различий в зрении наблюдателей”. Он (VIII 6, с. 416; H 203) уточняет: различия между

> *Самими наблюдателями и атмосферой в окрестностях наблюдений могут вызывать различия в моментах первого предположенного появления и сомнения в них, как это стало очевидным, по крайней мере мне, по моему собственному опыту и ввиду расхождений в этом роде наблюдений.*

Различие между наблюдателями, видимо, является систематическим, но вот атмосферные различия возле точек наблюдения должны были быть случайными.

3.1.3. Применяй наилучшие методы наблюдений. Для наших целей достаточно нескольких замечаний, а кроме того некоторые утверждения в п. 3.1.2 также непосредственно или косвенно относятся к методам наблюдения.

1. Птолемей (IX 2, с. 420 – 421; H 209) знал, что некоторые наблюдения не могли быть точными. Обсуждая древние сведения о движении планет, он заметил, что

Более продолжительные ряды наблюдений относятся к стояниям и фазам. Но выявление обоих этих явлений чревато неопределенностями. Точный момент стояния не может быть установлен …

2. Он продолжает: измерение “сравнительно больших расстояний” между планетой и звездой “требует тяжелых вычислений”; имеются и теоретические осложнения, см. п. 3.1.2, № 3. И напрашивается вывод, которого он не указывает: подобных расстояний следует избегать.

3. Птолемей (V 14, с. 252; H 416 – 417) пренебрегает методами, при которых время измеряется истечением воды, см. п. 3.1.2 № 4.

4. Он (IX 2, с. 423; H 213) утверждает, что

С наиболее высокой вероятностью надежны те наблюдения, при которых действительно видно соприкосновение или очень близкое приближение [планеты] *к звезде или Луне, и особенно наблюдения, выполненные при помощи астролябии.*

Здесь виден верный выбор решающего явления (иначе: правильное применение детерминированного подхода, см. п. 3.3. Нейгебауер (п. 2.3) описал подобный подход из *Альмагеста* (V 14).

3.1.4. Наблюдай регулярно. Регулярные наблюдения являются существенной чертой древней астрономии. Они нужны для установления искомых постоянных (например, длины тропического года или координат звезд). Более определенно, они позволяют исключать систематические влияния и уравновешивать действие случайных ошибок[8].

Птолемей (III 1, с. 132; H 194) свидетельствует, что он сам (и даже **Гиппарх**) действительно наблюдали регулярно:

Поскольку Гиппарх несколько обеспокоен сомнением, появившимся ввиду ряда наблюдений, которые он производил с небольшим промежутком времени между ними, что продолжительность обращения [Солнца] *не постоянная, мы постараемся кратко показать, что здесь не о чем беспокоиться. Мы убедились, что эти интервалы между последовательными солнцестояниями и равноденствиями, которые мы сами наблюдали, не изменяются.*[…] *Ибо мы обнаруживали, что* [эти промежутки времени] *не отличаются на существенную величину от тех, которые выводятся из* [года длиной 365] *1/4 дней. Иногда они отличаются на величину, примерно соответствующую ошибке, которую можно объяснить устройством и установкой инструментов*[9].

В других местах Птолемей (III 1, с. 136; H 201) ссылается на свой “ряд наблюдений” Солнца и (IV 9, с. 206; H 236) сообщает, что повторил некоторые свои наблюдения:

Мы изменили наши прежние, несколько ошибочные предположения, потому что впоследствии произвели более точные наблюдения. […] *Ибо те, кто занимается этой наукой* [астрономией] *в подлинном духе* *исследования и любви к истине, обязаны применять любой обнаруженный ими новый метод, который обеспечивает более точные результаты, чтобы исправить не только древние теории, но и свои собственные.*

Но следует делать отличие между действительно использованными наблюдениями и имевшимися в наличии, из которых Птолемей вполне мог выбирать, см. п. 3.1.1. Джинджерих (1980, с. 257) утверждает, что Птолемей установил свою окончательную лунную модель по многим наблюдениям, но в *Альмагест* включил лишь минимальное их число[10]. Он же (с. 259) полагает, что Птолемей имел в своем распоряжении много наблюдений, которые использовал при определении перигея Венеры.

“Возможно”, предполагает он, “методологические нормы того времени требовали [от него] лишь представления его результатов”. И, наконец, Джинджерих (с. 264) считает, что у Птолемея была “существенная база данных помимо сохраненных в его трактате”.

3.1.5. Учитывай влияние ошибок. Птолемей оставил по этому поводу конкретные высказывания, см. п. 3.1.2, № 4 и п. 3.1.3, № 1. В первом случае он привел численный пример (который мы не описали). И Нейгебауер (1975, с. 99) сослался на *Альмагест* (VI 10), где Птолемей доказал, что даже при худших условиях погрешность его простой лунной теории остается “в пределах, допустимых для наблюдений и теоретических предсказаний”. Он, стало быть, проверял пригодность своей модели. Можно полагать, что при обработке наблюдений Птолемей придерживался того же принципа.

3.2. Погрешности измерений и случайность. Птолемей (п. 3.1.2, № 4) заметил, что большинство астрономических инструментов “часто подвержены погрешностям”, а показания водяных часов искажаются даже “по чистому случаю”. В другом месте он (VI 9, с. 310; H 527) назвал взаимное уравнивание двух ошибок “случайной удачей”.

Случайную ошибку наблюдения мы относим к случайным величинам, и поэтому имеет смысл описать общее понимание случайности по Птолемею. Приведенная только что фраза означает, что случайное событие может либо произойти, либо нет, т. е. является возможностью. Такое понимание случайности обычно приписывается **Аристотелю** [I, п. 2.2], который, правда, истолковывал случайность и иначе (там же).

Птолемей (1956, I 2, с. 13) упоминает случайность и в связи с астрологией: ошибки предсказаний, допускаемые неискушенными астрологами, “привели к мысли, что даже […] верные предсказания зависят от случая”[11]. Здесь суть случайности осталась прежней, притом не ограниченной равными возможностями обоих вариантов предсказаний.

3.3. Детерминированный подход. Аабо и Де Солла Прайс (1964) обсуждали “качественные измерения в древности” (это – название их статьи). Вот их заключение (с. 2 и 3).

До изобретения телескопа […] *имел место любопытный парадокс: даже хорошо градуированный инструмент* [их оценка погрешности градуировки: 5′] *для измерения углов на небесной сфере* […] *вряд ли* *мог сравниться с разумно проводимыми глазомерными наблюдениями,* –

как, например, если замечается, что некоторая планета “находится на расстоянии стольких-то лунных диаметров от какой-то звезды или от […] средней точки линии, соединяющей две звезды”. И далее: “в характерных случаях точность измерения зависела не от совершенства инструмента, а от правильного выбора решающего явления”.

И всё-таки подсчет числа диаметров Луны относится к количественным методам[12]. Мы склонны считать, что по описанию Нейгебауера (п. 2.3) и этих авторов подход древней астрономии был детерминированным и при прямых наблюдениях, и при уменьшении влияния их погрешностей на искомые параметры [III, п. 8.4] путем проб и ошибок. Видимо в этом смысле и можно истолковать описанные выше комментарии.

Уже здесь можно заметить различие между двумя возможностями: либо накапливать большое число наблюдений и надеяться на результаты их уравнивания, либо ограничиваться всего несколькими быть может особо тщательными наблюдениями при особо благоприятных условиях. В дополнение к сказанному ранее [III, п. 12] укажем, что выбор зависит от порядка случайных ошибок и плотности их распределения, от систематических влияний, требуемой точности (в смысле исключения ошибок каждого из указанных видов) и стоимости наблюдений. Но если одно или несколько наблюдений намного надежнее остальных, появляются основания отбросить все эти остальные. Именно так поступил **Бируни** и подобного же образа действий придерживался **Менделеев** (Шейнин 2007b, с. 95 и 241).

3.4. Отбор и “подправление” наблюдений. Сегодня наблюдатель обязан сообщать о результатах всех своих наблюдений, включая отброшенные им, Птолемей же отбирал их, оставляя, видимо, только менее искаженные систематическими влияниями и/или случайными погрешностями, – или же, иначе, произведенные при лучших условиях, – и умалчивая об остальных (возможно используя их для грубого контроля). Этот подход положил начало (или лишь продолжил) традицию недопустимой с нашей точки зрения свободы действий наблюдателя. Вот соответствующее обобщение Паннекука (1961, с. 339 – 340):

> *В прошлые века астроном выбирал из своих наблюдений те, которые казались ему наилучшими, и это подвергало его опасности уклониться от истины или наталкивало на выбор таких результатов, которые показали бы возможно не имевшую места согласованность.* [Следует пример из наблюдений **Тихо Браге**]. *В* XVII *в. некоторые ученые, как **Гюйгенс** и **Пикар**, поняли, что среднее из всех равноточных измерений надежнее, чем одно из отобранных из них, и в* XVIII *в. осреднение начало применяться всё больше и больше.* […] *Появился новый подход, типичный для ученого* XIX *в.*: […] *ему нужен был* […] *протокол исследования природы.*

Дальнейших ссылок Паннекук не привел, но о Пикаре (и **Кондамине**) см. Шейнин (2005, с. 89).

Некоторые комментаторы (п. 3.7) заявили также, что Птолемей исключал наблюдения лишь с целью подтвердить оставляемыми уже известные результаты. Хартнер (1977, с. 4) назвал подобный быть может имевший место подход “скорее фантазированием, чем обманом” и добавил, что в истории науки “полно подобных примеров”.

Следует, впрочем, указать и особое обстоятельство. Древние астрономы знали, что их наблюдения искажены значительными погрешностями и могли полагать необходимым “подправлять” их[13]. Они, видимо, относились к своим результатам не как к определенным числам (точкам), а как к интервалам (ср. практику назначения границ в п. 2.1), внутри которых можно было выбирать почти любую точку. Неудивительно поэтому, что новые результаты иногда совпадали с предыдущими. Наконец, как мы уже упомянули [III, п. 8.1], при наличии крупных погрешностей выбор отдельного, “рядового” наблюдения взамен среднего значения может быть вполне оправдан.

Субъективный подход к результатам наблюдения можно отыскать у самых выдающихся ученых. Donahue, переводчик классического труда **Кеплера** (1609/1992), заметил на с. 3, Прим. 7, что “к примеру [!] вся таблица в конце гл. 53 основана на вычисленных долготах, которые представлены как результаты наблюдений”. Подробнее об этом см. статью автора (1988). Можно упомянуть и **Ньютона** (Westfall 1973). Далее, ссылаясь на другого автора, Джинджерих (1980, с. 264) сообщает, что **Эйнштейн** остался бы верным своей теории, даже если наблюдения засвидетельствуют ее ошибочность. Наконец, Koyré (1956/1968, с. 150 и 152) указал, что научная литература (в частности, XVIII в.), “полна вымышленных экспериментов”, выполнить которые было вообще невозможно, и особо упомянул **Паскаля**. И представляется, что “подправление” наблюдений и иные фокусы и разрешаются, и запрещаются; *Что дозволено Юпитеру, то не дозволяется быку*![14]

3.5. Округление чисел. Птолемей вряд ли обращал внимание на эту процедуру, что не было или почти не было существенным, однако для “отточенного учебника”, который должен был указывать, как обрабатывать наблюдения (Джинджерих 1983, с. 150), подобное поведение являлось прискорбным (хотя и объяснимым, см. ниже).

Нейгебауер (1975) обвинил Птолемея в “неупорядоченных” (с. 91), “произвольных” (с. 127) и логически неверных (с. 197) округлениях. Впрочем, он не повторил своего прежнего утверждения (1951/1957, с. 68) о том, что при округлениях вавилонские и греческие астрономы (можно понять: включая Птолемея) просто отбрасывали дробные части чисел.

Но еще раньше Нейгебауер (1948, с. 113) заметил, что под влиянием вавилонской математики Птолемей иногда округлял числа таким образом, чтобы получать простые выражения даже за счет некоторой потери точности[15], см. также Прим. 6. Он продолжал: “следует сказать”, что, несмотря на имевшуюся возможность хорошей аппроксимации квадратных корней, “древние мало заботились о влиянии округлений и накопления ошибок. Ошибки часто имели тот же порядок величины, что и изучаемое явление”.

Птолемей допускал ошибки при составлении своих таблиц, иногда несущественные (Нейгебауер 1975, с. 91 и 317, Прим. 15), но недопустимые по крайней мере в одном случае, см. там же, с. 120 (почти повторяя сказанное в 1948 г.):

> *В древних вычислениях подобные несоответствия в степенях точности в различных частях одной и той же таблицы являются обычными, и иногда они приводят к ошибкам того же порядка величины, что и изучаемое явление*[16].

Он же (с. 76, Прим. 2) заметил, что вычисления Птолемея “содержат множество мелких неточностей” и (с. 197 и 318) ошибок, видимо, вызванных небрежностью. Он (1947, с. 240) коснулся и особого обстоятельства: “на некоторой ранней стадии вавилонской культуры” изменения длины дня и ночи описывались “простой схемой”, которая использовала “округленные числа, достаточно близкие к истине [к наблюдениям] для практических целей”. См. также Нейгебауер (1950, с. 250).

В XIX в. числа начали округляться с явно завышенной точностью. Гаусс, например, вычислял измеренные углы триангуляции до 0″.001 и того же подхода придерживался и **Пирсон**, и по крайней мере изредка **Фишер**, см. заметку E. B. Roessler (*Science*, т. 84, 1936, с. 289 – 290) и последующую дискуссию там же, с. 437, 483 – 484 и 574 – 575 и также Шейнин (1994, с. 255).

3.6. Обработка отобранных наблюдений. Имея в виду определение длины тропического года, Птолемей (III 1, с. 137; H 202) заявил, что

> *Чем длиннее промежуток времени между сравниваемыми наблюдениями, тем выше точность определения периода обращения* [Солнца]. *Это правило относится* […] *ко всем периодическим обращениям, ибо погрешность ввиду неточности, присущей даже тщательным наблюдениям, по ощущению наблюдателя невелика и примерно одна и та же для любых наблюдений, разделенных либо длинным, либо коротким промежутком.*

Вряд ли следовало вводить ощущения наблюдателя. Далее Птолемей разумно добавляет:

> *Что касается утверждений о пригодности* [получаемых результатов] *<u>для вечности</u> или хотя бы для промежутка времени, во много раз превосходящего интервал между наблюдениями, мы должны считать их чуждыми любви к науке и истине.*

Он (IX 2, с. 420; H 208), ср. (IV 9, с. 206; H 328) и (III 1, с. 132; H 194), в основном повторяет свое утверждение и упоминает “сравнение наблюдений (в каждом из которых наблюдатель мог допустить небольшие ошибки”. *Мог допустить* звучит слабо.

В другом случае Птолемей (I 12, с. 63; H 68) заявил, что значение некоторой астрономической постоянной (удвоенного наклонения эклиптики) было больше 47° 40′, но меньше 47° 45′ и заключил:

> *Мы таким образом выводим почти то же соотношение, что и Эратосфен, и его же применил* ***Гиппарх****. Ибо* [в соответствии со

сказанным] *дуга между солнцестояниями примерно равна (11/83)x360°* [= 47° 42′ 39″].

И далее он замечает, что “принимает точку в середине между крайними”. Для двух наблюдений его решение привело бы к арифметической средине. Разность между ней и принятой Птолемеем выше пренебрегаема, но как бы он поступил при отсутствии прежних результатов?

Грассхоф (1986, с. 217; 1990, с. 4, 31, 75, 203, 211), не всюду, правда, определенно, заявил, что Птолемей не знал, как выбрать среднее из ряда наблюдений и к тому же считал нужным приводить наблюдения в соответствие с теорией. Первое утверждение не совсем верно, см., например, п. 3.9, №№ 4 и 6, хотя, действительно, ни древние астрономы, ни **Бируни** (Шейнин 2007b) никак не выделяли среднее арифметическое. Второе утверждение должно быть уточнено.

Wilson (1984, с. 43) назвал Птолемея оппортунистом, который был готов “упрощать и выдумывать”. Но с какой целью? В конце п. 3.7 мы приводим и другие подобные высказывания, но полагаем желательным вспомнить Птолемея-картографа, имея в виду возможную общность его подхода к научным изысканиям вообще. Berggren (1991) полагает, что в картографии Птолемей стремился к “подобию правды”, но мы бы сказали: к истине в целом.

3.7. Действительное уравнивание. До сих пор мы в основном описывали рассуждения Птолемея, но его фактические действия несколько отличаются от них. Многие комментаторы отметили, что он обрабатывал наблюдения малоудовлетворительным образом, а **Деламбр** (1817, т. 1)[17] и Р. Р. Ньютон в нескольких публикациях назвали его обманщиком. Вот выводы первого.

1. “Наблюдал ли Птолемей?” (с. xxv). Деламбр ответил на свой вопрос отрицательно. Один из его доводов состоял в том, что тот сообщил мало подробностей о своих наблюдениях; аналогичный вывод по поводу длины тропического года Деламбр сделал в т. 2, с. 110.

2. “Он отбрасывал все остальные [наблюдения] потому, что они не соответствовали его теории” (с. xxix). Эта фраза относится к лунной теории Птолемея, и она недостаточно понятна: известно, что Птолемей построил три лунные модели.

3. По поводу определения постоянной прецессии (с. xxxi): “Это недобросовестно. […] Скажем больше: это неумело”. Второе утверждение (но не первое) возможно верно.

Р. Р. Ньютон просто-таки отказался признать Птолемея. Видимо в одной из своих последних соответствующих публикаций он (1980, с. 388) заявил, что уже раньше [1977] заключил, что

> *Все наблюдения, которые Птолемей приписывает себе (и могут быть проверены), были вымышлены, и что многие, хотя далеко не все, которые Птолемей приписывает прежним астрономам, были также вымышлены.*

Мы предпочитаем согласиться с Джинджерихом (1980). Этот стойкий сторонник греческого астронома сказал многое о непонятных действиях Птолемея, но совсем не считает его обманщиком. Так, он (с.

262 – 263) заключает, что Птолемей либо “усовершенствовал” некоторые наблюдения, либо отобрал те, которые соответствовали его теории. См. также п. 3.8.

Lloyd (1979, с. 192) указал, что Птолемей не проверял своих результатов по избыточным наблюдениям и повторил это утверждение на с. 198 и 200. В последнем случае Ллойд добавил, что Птолемей не видел “необходимости в тщательной регистрации и представлении […] данных”. Это противоречит некоторым утверждениям Птолемея (п. 3.1.1), и замечание Ллойда следует исправить: не поступал в соответствии со своими же заявлениями.

Ллойд (1982, с. 148) также указал, что Птолемей был “исключительно снисходителен к погрешностям”. Palter (1970, с. 122), которого цитировала Giora Hon (1989. с. 146), заметил в более общем контексте, что

Повторение опытов, перекрестная проверка экспериментальных находок, жесткий контроль произведенных измерений, щепетильное сообщение о всех измерениях, – всё это было либо исключением, либо вообще отсутствовало в древней астрономии.

Имея это в виду, мы соглашаемся с Джинджерихом (1983, с. 151) в том, что

Птолемей, как и нынешние астрономы, без сомнения построил свое сооружение на громадной массе традиционных материалов, отбрасывая, уравнивая или включая их так, как считал нужным, и сливал их в новую теоретическую структуру.

И сам Ллойд (1982, с. 147) заключил, что “повсюду заметны […] усилия Птолемея поддержать и подтвердить свои теории”. Мы закончим здесь выдержкой из Evans (1987, с. 241):

Положения планет обычно измерялись относительно звезд. […] *В свою очередь, абсолютная долгота звезд измерялась относительно Солнца, что требовало законченной теории Солнца. Логически рассуждая, можно было вначале попытаться завершить теорию Солнца и затем измерять какие-либо положения звезд или планет.* […] *Но практически это было невозможно: планеты не хотели ждать. Птолемею приходилось наблюдать планеты при благоприятных обстоятельствах в течение всей своей активной астрономической жизни. Это несовершенное положение неизбежно требовало применения временных предпосылок и мозаичных методов работы.*

3.8. Кеплер о Птолемее. Кеплер неоднократно упоминал Птолемея в своем фундаментальном сочинении (1609/1992). Вот его высказывания.

1. Регулярные наблюдения (с. 660/334; с. 645/326).

“Я не раз замечал [например, на с. 647/327], что Птолемей имел в своем распоряжении намного больше наблюдений, нежели представлено в его Опусе”.

> *Солнце очень незаметно входит в* [тропик] *Рака. И я не могу убедить себя в том, что* ***Гиппарх*** *и Птолемей определяли сам момент этого вхождения, пренебрегая промежуточными положениями. Я бы считал более вероятным, что они всё лето аккуратно замечали склонения Солнца, сводили попарно равные склонения по обе стороны солнцестояния и приняли за истинный момент вхождения Солнца в тропик время, промежуточное между моментами равных склонений.*

С этим, впрочем, не согласны Аабо и Де Солла Прайс (1964, с. 16): Кеплер "делает ошибку, типичную для ученого. […] В древности мы обнаруживаем лишь наименьшее число наблюдений, требуемых для определения искомых параметров". В соответствии с п. 3.3 мы заменили бы *требуемых* на *отобранных*, что позволило бы устранить их отрицание доводов Кеплера.

2. Трудности с эпициклами (с. 232/81 и 627/314).

Птолемей "полностью сместил свой эпицикл" с верного положения.

Птолемей "держался" за эпициклы (которые были уже у **Гиппарха**) и для их сохранения "измыслил наблюдения, исходя из неверно придуманной причуды. Но это следует ему простить, потому что у него было мало [требуемых в этом случае] наблюдений".

3. Вывод (с. 642/324).

"Вряд ли нам досталось от Птолемея что-то такое, в чем нельзя было бы с серьезным основанием усомниться, прежде, чем оно станет полезным для нас …"

3.9. Присвоил ли Птолемей звездный каталог прежних астрономов? Мы собрали мнения различных комментаторов, из которых в общем-то следует, что Птолемей действительно воспользовался трудами **Гиппарха**, – но, добавим мы сами, поступил добросовестно, в соответствии с обычаями своего времени. Мы особенно обращаем внимание читателей на соображения **Майера** и **Лапласа** (№№ 4 и 6). Далее, статистический анализ у большинства комментаторов недостаточен (или отсутствует), и они по этой причине неубедительны. Один из обычных доводов: отсутствие в каталоге Птолемея более южных звезд, которых, в отличие от него, не мог наблюдать Гиппарх на острове Родос.

1. В X в. **Al-Sufi** (**As-Sufi**?) (Нейгебауер 1975, с. 288), основываясь на предположении **Ал–Баттани** (858 – 929), заявил, что Птолемей "установил свои звездные координаты", прибавив определенное число "к долготам, найденным Менелаем [I в.] 41 год ранее. […] Ни в каком древнем источнике нет никакого следа" звездного каталога Менелая.

2. **Бируни** (1976, кн. 9, 1-й раздел главы 2, с. 253) не совсем понятно сообщил:

> *Возможно Птолемей установил эти величины* [звезд] *благодаря своим собственным наблюдениям, но возможно, что он заимствовал это у своих предшественников, как видно из того, что он перевел положения светил к своему времени.*

Величины звезд здесь совсем ни к чему, быть может перевод неверен.

3. Нейгебауер (1975, с. 280 и 836) сообщает, что **Тихо** именно так и считал “без всяких доказательств и обсуждений”. Он ссылается на самого Тихо и на Дрейера (1918, с. 348 – 349).

4. **Майер**, в письме 1753 г. **Эйлеру** (Euler & Mayer 1959, pp. 365 – 368):

> *Птолемей основывал свои солнечные таблицы исключительно на теории* ***Гиппарха****; это видно, кроме прочего еще из того, что все данные им наблюдения равноденствия более поздние, чем его наблюдения планет.* […] *Следовательно, он заимствовал движение Солнца без особого исследования у Гиппарха.* […]
>
> *Не исключено, что Птолемей заметил эту ошибку своих солнечных таблиц лишь при наблюдениях равноденствий, которые были самыми последними из всех его наблюдений. Однако, поскольку он уже построил на этом всю свою систему, он, вероятно, скорее пожелал отбросить свои наблюдения, чем исправлять с самого начала всю систему.* […] *Он выдал ложные равноденствия своих таблиц за истинные и взятые из наблюдений. Можно привести много более поздних примеров, когда астроном из слишком большой любви к своему построению измышлял ложные наблюдения.*
>
> *Мы окончательно убедимся в справедливости* [сказанного], *если обратимся к данным Птолемея о движении неподвижных звезд. Из своих наблюдений* […], *которые, как было сказано, относятся к более раннему времени, чем его равноденствия, он сделал вывод, что их долготы от Гиппарха до его времени* […] *возросли на 3 градуса, в то время, как точно известно, что* [на] 4° 13′ […].

5. Лаланд попытался “лишить Птолемея всякой оригинальной значимости” (Pedersen 1974, с. 22), и в конце XVIII в. некоторые комментаторы, естественно ссылавшиеся на *Астрономию* Лаланда, придерживались примерно той же точки зрения (там же, с. 254), хотя он высказал свое мнение намного раньше (1757, с. 421 – 422).

6. **Лаплас** (1796/1982, с. 275 – 276):

> *Ошибка* [Птолемея] *в годичном движении равноденствий, как мне представляется, произошла из-за слишком большого доверия к продолжительности, которую* ***Гиппарх*** *приписывал тропическому году.* […] *Эти замечания наводят на мысль исследовать, не является ли каталог Птолемея, как это обычно думают, каталогом Гиппарха, приведенным* […] *с помощью прецессии* […] *за 90 лет.* […] *Основываются на том, что постоянная ошибка в долготах звезд этого каталога исчезает, если его относить ко времени Гиппарха. Но данное нами объяснение этой ошибки освобождает Птолемея от упреков в присвоении работы Гиппарха, и, по-видимому, ему можно верить, когда он определенно говорит, что наблюдал звезды этого каталога, включая даже звезды шестой величины.* […]
>
> *Даже теперь, когда* […] *система Птолемея* […] *полностью отвергнута,* <u>*Альмагест*</u> […] *является одним из драгоценнейших памятников древности.* […] *Автор внес в него только наблюдения, необходимые ему для установления своих теорий.* […] *Когда его система уступила свое место естественной системе, ее автору*

стали мстить за тот деспотизм, с которым она слишком долго царила в астрономии. Птолемея обвинили в присвоении открытий его предшественников. Но благородная манера, с которой он очень часто цитирует Гиппарха […], *полностью снимает с него эти обвинения.*

7. **Деламбр** (1817, с. xvi) о том же: “Трудно оправдать Птолемея в этом плагиате, а возможно и в некоторых других”. На с. 183 он утверждает, что “представляется намного более вероятным, что он [Птолемей] не наблюдал ни звезд, ни Солнца, и что, сделав быть может для вида небольшое число наблюдений, он всё заимствовал у **Гиппарха**”.

Но на с. xxxii Деламбр защищает Птолемея от другого обвинения: “Мы не знаем, на каком основании Abraham Zachut [прим. 1450 – прим. 1510] настаивает на том, что Птолемей заимствовал свой каталог у Millaeus, который проводил наблюдения в Риме при [императоре] Траяне” [53 – 117].

8. **Ньюком** (1878, с. 20): “Весь *Альмагест*, […] как мне представляется, дышит безупречной искренностью”.

9. Peters & Knobel (1915) исследовали ошибки в долготах птолемеевых звезд. Без статистического анализа они (с. 15) заключили, что каталог Птолемея является “просто каталогом **Гиппарха** с константой, добавленной к долготам”. См. также Педерсен (1974, с. 254).

10. Boll (1901, см. Evans 1987, с. 156) заявил, что количество звезд в каталоге Птолемея на 175 больше, чем у **Гиппарха**[18]. Впрочем, это утверждение было впоследствии поставлено под вопрос (там же, с. 158).

11. Фогт (1925) сравнил координаты более ста звезд, определенных **Гиппархом** и Птолемеем. Он (с. 22 – 26) обнаружил, что разности ни широт, ни долгот вовсе не совпадают, но что в нескольких случаях Птолемей почти несомненно перенял значения у Гиппарха. Фогт, конечно же, не мог сравнивать каталоги непосредственно, потому что труд Гиппарха утерян; он использовал комментарий Гиппарха к Аратусу (прим. 315 – прим. 245 до н. э., автор серьезной астрономической поэмы), см. Manitius (1894). Хуже, что он не применил уже существовавших тогда элементов корреляционного анализа и (Грассхоф 1990, с. 60 и 105 – 106) недостаточно подробно описал свои вычисления.

Грассхоф (с. 110 – 115) попытался проверить при помощи этого анализа независимы ли координаты звезд у Птолемея от Гиппарха, но и он не описал свое исследование достаточно подробно, а его пояснения не всегда понятны[19]. Во всяком случае, он (с. 115) решил, что либо Птолемей заимствовал данные Гиппарха, либо наблюдения их обоих были искажены одной и той же систематической погрешностью. Он (с. 122 – 128) подтверждает свой вывод сравнением разностей долгот звезд в *Альмагесте* и средневековом астрологическом трактате *Liber Hermetis Trismegisti*, звездные координаты в котором, как считается, по меньшей мере частично заимствованы из списка Гиппарха, но и здесь мы не смогли понять его.

12. Р. Р. Ньютон (1977, с. 379) назвал Птолемея “самым успешным обманщиком в истории науки”, см. также п. 3.7. По отношению к

координатам звезд каталога Птолемея его основной довод касался дробных долей градусов. Во-первых, распределения этих долей для широт и долгот не совпадали. Во-вторых, доли градусов долгот не были распределены так, как следовало бы у непосредственного материала наблюдений. Р. Р. Ньютон полагает, что наблюденные долготы были исправлены добавлением некоторого числа градусов плюс 40′, притом известно, что, по Птолемею, долготы звезд за время от **Гиппарха** до него возросли на 2° 40′.

13. В 1980 – 1981 гг. в журнале *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* последовала оживленная и интересная дискуссия между Джинджерихом и Р. Р. Ньютоном, но проблема каталога Птолемея не была решена[20]. Не менее важным оказался комментарий Свердлова (1979), который серьезно возразил последнему (но не изучал распределения дробных долей градусов) и, видимо, опровергнул обвинения Птолемея в мошенничестве.

В частности, Свердлов разумно утверждал, что вероятностные вычисления его противника ничего не доказывали. Действительно, желая выяснить, было ли вызвано совпадение двух наблюденных величин или большое расхождение между ними оправданной случайностью или обманом, Р. Р. Ньютон основал свои заключения на вероятностях этих предположений, которые в свою очередь зависели от некоторых ограничительных предположений[21].

Впрочем, мы не можем согласиться с безграмотным утверждением Свердлова (с. 529) о том, что вероятность и статистика могут доказать всё, что угодно, что несуразность можно в равной мере выражать словами и числами [обоснованными числами!].

14. Грассхоф опубликовал диссертацию (1986), посвященную истории звездного каталога Птолемея, а в 1990 г. выпустил в свет ее английский вариант. И здесь, в дополнение к № 11, мы приведем две выдержки из этого варианта (с. 4 и 147).

> *Существенная часть звездного каталога Птолемея основана на тех наблюдениях **Гиппарха**, которые тот использовал для составления* […] *своего Комментария к Аратусу. Действительно выполненные Птолемеем наблюдения* […] *не могли* [служить основанием] *более, чем половины его каталога.*
>
> *Остается неизвестным, взяты ли* [координаты] *звезд в <u>Альмагесте</u> у Гиппарха, или же наблюдения большого числа из нескольких сотен звезд* […] *были выполнены другими астрономами.*

15. Evans (1987) попытался обобщить накопленные комментарии, заявив (с. 158), что он при этом “прольет новую тьму [!] на происхождение каталога Птолемея”. Он обсудил несколько возможных пояснений проблемы, возникшей с долями градусов (№ 12), и заключил (с. 267), что “по всей вероятности Птолемей использовал лишь четыре опорные звезды”, долготы трех из которых содержали дробную часть градуса, равную 2/3 = 40′.

Он (с. 161 – 165) применил свой анализ и к исследованию звезд каталога Ал-Суфи (прим. 964 г.) и **Улугбека** (1437 г.), которые были заимствованы, как заявил Р. Р. Ньютон (№ 12), у Птолемея. Относительно первого каталога это было известно и ранее, а по поводу второго Эванс несколько раньше опровергнул его утверждение, но заметил, что Улугбек возможно произвел свои наблюдения или бóльшую их часть до 1437 г. и затем соответственно исправил долготы звезд.

16. Ефремов и Павловская (1987; 1989) устанавливали дату составления каталога Птолемея по изменениям расстояний между звездами во времени. Они вычислили расстояния между парами звезд и по каталогу Птолемея, и по современным данным на различные эпохи; определили среднюю квадратическую разность между результатами обоих вычислений, снова на различные эпохи; аналогично исследовали каталоги **Улугбека**, Тихо, **Гевелиуса** и **Тобиаса Майера**. Авторы исходили из 13 групп звезд из каждого данного созвездия, по 6 – 12 звезд в каждой, из которых одна обладала значительным собственным движением, и заключили, что каталог Птолемея был в основном составлен при жизни **Гиппарха**. Впрочем, их вывод не вполне убедителен: исходя из минимума упомянутой средней квадратической разности, они ввели ограничительные условия об ошибках положения звезд. Так, они предположили, что случайные составляющие ошибок каждой координаты были нормально распределены, а систематические ошибки – одни и те же по всему каталогу. Авторы (с. 189) особо заключили, что с очень высокой вероятностью каталог Птолемея не является средневековой подделкой, объяснив необходимость этого вывода (с. 176) утверждениями (см. № 17) о том, что события [притом не только научные] “приписанные древности, на самом деле произошли в период 900 – 1650 гг.”

17. Указанные утверждения публикует с 1981 г. А. Т. Фоменко. Так, он и др. (1989, с. 223) заявили, что каталог Птолемея был составлен в период 600 – 1300 гг. Они определили эпоху, для которой случайные ошибки эклиптических долгот восьми (из 12) именованных звезд оказались по абсолютной величине меньше 10′. И их исследование включало отождествление звезд в *Альмагесте*, а также оценку и учет систематических ошибок, которые они посчитали одинаковыми для каждого данного созвездия.

Несколько звезд они (с. 210) не смогли отождествить, и, поскольку выводы Ефремова и Павловской (№ 16) существенно зависели от одной из них, они отвергли заключения своих предшественников. Фоменко и др. провели аналогичные вычисления относительно четырех других списков звезд и для каталога **Улугбека** (1437) на с. 227 указали эпоху 700 – 1400.

Восьми дуговых минут оказалось достаточным, чтобы опровергнуть систему Птолемея, но трудно поверить, что по восьми именованным звездам можно похерить громадный промежуток времени. И заметим в скобках, что статья Фоменко и др. написана на скверном английском языке, пользуется ошибочной (английской) терминологией, искажена опечатками и снабжена неупорядоченной библиографией. О высокоученых изысканиях Фоменко и его соавторов см. Новиков (1997; 2000), Маврина (1999) и Зализняк (2000). Вот общее утверждение Новикова (2000, с. 159): Фоменко

Претендует […] *на опровержение всей мировой и русской истории древности и средних веков.* […] *Зализняк прав, что при* ***Колмогорове*** *этого не могло бы случиться.* […] *Что же случилось с математикой, если в ней большую роль заняла подобная чушь?*

Вскоре Новиков (2002, с. 352) назвал изыскания Фоменко “фантомом” и “псевдоисторией”. И укажем, наконец, что опус Носовского и Фоменко (2004) называется *Царь славян*, а на его обложке – рисунок Христа. Внутрь заглядывать и не надо …

18. Шевченко (1988; 1990) заметил, что распределение дробных частей долгот звезд меняется у Птолемея от одного созвездия к другому; или, точнее, что и зодиакальные, и прочие созвездия могут быть разбиты на две группы с различными распределениями этих частей. Он попытался объяснить этот факт (который в любом случае опровергает довод Р. Р. Ньютона), предположив, что Птолемей основывал свои вычисления по каждому созвездию на различных опорных звездах, или по меньшей мере заменял одну из опорных звезд другой через каждые несколько созвездий. Кроме того, оказалось, что поведение систематических ошибок долгот в зодиакальных созвездиях аналогично.

19. Britton (1992) заключил, что Птолемей перенял параметры у **Гиппарха** для составления и своих таблиц, и каталога звезд. В Предисловии к своей книге он привел обстоятельное рассуждение о трудах Птолемея вообще.

20. Dambis & Efremov (2000) кратко описали мнения своих предшественников (придав слишком большой вес Грассхофу) и сообщили о своей собственной работе, – о продолжении исследований Ефремова и Павловской (№ 16). Они заключили, что наблюдения звезд были в основном (но не полностью!) выполнены за три столетия до Птолемея; что под некоторыми своими наблюдениями Птолемей мог понимать грубую проверку наблюдений **Гиппарха**; и, совсем неожиданно, что вряд ли наблюдения были в основном выполнены самим Гиппархом.

21. Как и Грассхоф (№ 11), Duke (2002) сравнил *Альмагест* с комментарием **Гиппарха** к поэме Аратуса, также применив корреляционный анализ, но, в отличие от своего предшественника, пояснил свое исследование. Он заключил, что независимость каталога Птолемея маловероятна, и можно заметить, что реферат на его статью опубликовал Джинджерих (*Math. Rev*, 2003g:010007).

4. Леви Бен Гершон (1288 – 1344)

4.1. Погрешности наблюдений. Леви хорошо знал об особом подходе древних астрономов (п. 3.3). Он (Гольдштейн 1985, с. 28) заявил, что “все предшественники **Птолемея** предпочитали” наблюдать простым глазом; что наблюдения с инструментом, “изобретенным Птолемеем”, были подвержены ошибкам, вызванными “трудностью его изготовления”, что инструмент мог становиться негодным и при работе с ним, и, наконец, что он был просто не в состоянии верно определять расстояния между звездами.

Аналогичные замечания Леви высказал по поводу инструментов вообще, указал (с. 29) на “существенные ошибки изготовления, приводящие к ошибкам примерно до 1°”, а также на ошибки “второго рода, вызванные малостью градуса” [малостью делений круга]. Леви (с. 28 – 29) знал, что малые погрешности наблюдения могут вызвать крупные ошибки в вычислениях положений звезд, но почему-то приписал этот факт ошибкам “третьего рода”.

Леви (с. 80) обсуждал влияние неблагоприятных метеорологических условий на наблюдения и заявил (с. 80 – 81), что наблюдения следует производить так, чтобы “даже крупные ошибки” мало влияли на результаты. И он (с. 29) пытался “изобрести такой инструмент, который окажется безошибочным и по своей конструкции, и при наблюдениях с ним” Не входя в подробности, он продолжал: “мы начали наблюдать с ним”, стараясь вывести “истинную модель, которая позволила бы согласовать движения звезд с наблюдениями”.

4.2. Регулярные наблюдения. Леви (Гольдштейн 1985, с. 29, 93 и 109) несколько раз упомянул регулярные наблюдения:

В величине параллакса Луны существуют серьезная путаница и сомнения, что стало нам ясно на основе многих наблюдений.

Чтобы установить, что эти противоречия [между наблюдениями и моделями **Птолемея**] […] *не вызваны указанными причинами, требуется обстоятельный довод и большое число наблюдений.*

Леви перечислил эти причины, которые включали ошибки в его собственных определениях координат опорной звезды.

Рабинович (1974, с. 356 – 358) описал некоторые высказывания Леви из его комментария к Книге притчей Соломоновых. Леви заметил, что теоретические предубеждения могут исказить истолкование наблюдений и что опыты следует повторять “столько раз, сколько потребуется”. Кроме того, он указал, что следует иметь в виду условия (например, метеорологические), которые могут повлиять на наблюдения.

5. Кеплер (1571 – 1630)

Мы приводим многочисленные ссылки на его фундаментальный труд (1609/1992).

5.1. Ошибки наблюдений и их влияние

1. Кеплер, конечно же, знал, что ошибки неизбежны. Вот его, не доведенное, правда, до завершения высказывание о наблюдениях **Тихо** (с. 201/63), относящееся, видимо, к случайным ошибкам. “В самих наблюдениях окажется неопределенность в несколько минут, если только не соблюдать исключительной осторожности и не применять все возможные средства”. Так, значения прямого восхождения Марса, выведенные по двум различным звездам, “часто” расходились на три минуты.

В нескольких следующих случаях по поводу собственных наблюдений (с. 215/71; с. 611/305; с. 286/113), он, как можно считать, также описывает случайные ошибки и их неизбежность, а термину неопределенность (uncertainty), как и выше, в первоначальном латинском тексте соответствовало выражение *incertitudo*.

2. “Параллакс Марса не превышает 4′, которые являются неопределенностью инструмента. Более вероятно, что параллакс очень мал …” В другом месте Кеплер (с. 621/311) заметил, что “[точность] наблюдения не доходит до двух или трех минут”.

3. “Я полагаю, что […] в моих инструментах много неопределенности, ибо на моем квадранте нелегко различить две минуты”. Ошибки отсчета были, видимо, одними из наибольших.

4. “Неопределенность, или (как говорят) latitudo наблюдений …” Приведенный латинский термин безусловно означает разность между крайними наблюдениями, которая весьма скверно оценивает неопределенность: она стремится возрастать с увеличением числа наблюдений.

5. *Этим наблюдениям присуща некоторая степень неопределенности (равная по меньшей мере двум минутам) ввиду небольшого, но ощутимого диаметра Марса, рефракции и параллакса, которые* [?] *еще не известны в полной мере.*

Здесь (с. 276/110) неопределенности (uncertainty) соответствовало латинское *ambiguitate*, и можно было бы подумать, что Кеплер имел в виду систематические ошибки, но во всяком случае порядок их величин был тот же, что и в предыдущих случаях.

6. “Если […] принять среднее […], как бы говоря, что в этих двух наблюдениях […] были какие-то небольшие ошибки […] противоположных знаков …” Здесь (с. 520/254) виден подход к обоснованию среднего арифметического, хотя только в простейшем случае двух наблюдений. Об этом среднем см. п. 5.4.1.

Высказывания Кеплера на той же с. 520/254 и страницах 524/256 и 533/261 относились к влиянию ошибок.

7. “Все три наблюдения были сделаны, когда Марс был на востоке, и ни одного – когда Марс был на западе […]. И поэтому будет безопаснее …”

8. Два найденных положений Марса находятся “по разные стороны от истины, что придает уверенность …”

9. О решении сферических треугольников: “ Расстояниям нельзя доверять, потому что углы слишком малы”. Да, малая ошибка таких углов приводит к крупной погрешности.

10. Кеплер рекомендовал определенные меры предосторожности для исключения систематических ошибок при наблюдении солнечных затмений (Шейнин 2007b, с. 100).

5.2. Используй все наблюдения

11. Кеплер (с. 494/239) признался, что вначале действовал слишком поспешно: “Вместо того, чтобы обождать общего суждения всех наблюдений, […] мы немедленно ухватились за некоторое их число …”

12. Он (с. 523/256) повторил эту мысль:

Поскольку первое и третье положения Марса […] *согласуются друг с другом довольно хорошо, некоторые менее мыслящие лица подумали бы, что его* [окончательное положение] *следует установить по ним, а другие как-то приводить в соответствие с ними. И я сам довольно долго пытался добиться этого, но поскольку* [это мне не удалось], [*их пришлось также учесть*].

5.3. Проверяй согласованность модели. Кеплеру пришлось выбирать между двумя и даже тремя системами мира.

13. В конце концов он (Введение, с. 49) заявил:

И, наконец, […] *я рассматриваю некоторые иные наблюдения, не менее надежные, чем предшествовавшие, и такие, которым их* [сторонников системы **Тихо**] *старый метод не мог соответствовать, но которым мой метод соответствует самым прекрасным образом.*

14. И вот его знаменитое высказывание (с. 286/113): наблюдения Тихо "устанавливают ошибку в 8′ в этом вычислении по **Птолемею**. […] Поскольку ими нельзя пренебречь, [они] указали путь к преобразованию всей астрономии …".

15. На с. 276/110 Кеплер упомянул проверку своих вычислений по избыточным наблюдениям. Джинджерих (1973) исследовал подобные случаи и из рассматриваемого нами сочинения, и, в основном, из неопубликованных источников и заключил (с. 314), что такую проверку Кеплер проводил регулярно[25].

Сильная проверка модели возможна по методу минимакса [III, п. 8.2], и мы полагаем, что Кеплер воспользовался его элементами, в частности при своем выборе системы мира.

16. Очень возможно также, что Кеплер пользовался и элементами статистического моделирования, т. е. искажал наблюдения небольшими "поправками" с тем, чтобы согласовать их друг с другом. Вот его предостережение по этому поводу (с. 334/143):

Можно, однако, полагать сомнительной такую свободу введения небольших изменений в наблюдения. […] *Но пусть каждый, кто так считает, попробует применить этот метод, и, сравнив свои результаты с моими, решит, остались ли вычисления в пределах точности наблюдений.*

Успех в таких случаях существенно зависит от выбранных "небольших изменений". Видимо, Кеплер учитывал свойства "обычных" случайных ошибок и, соответственно, вносил примерно поровну изменений каждого знака и уменьшал их число с увеличением их абсолютных величин.

Заметим, что Кеплер был крайне доволен своей (разумеется, надуманной) моделью солнечной системы с правильными многогранниками, вставленными между орбитами планет, и по контексту (Шейнин 2007b, с. 102) следовало, что он был удовлетворен тем, что невязки его модели примерно подчинялись этим свойствам.

5.4. Уравнивание наблюдений

5.4.1. Прямые наблюдения. В п. 5.1 № 6 мы заметили, что Кеплер выбрал среднее арифметическое в случае двух наблюдений. Ту же оценку он применял или косвенно рекомендовал и в других случаях (с. 200/62; 645/326). Тем не менее, мы должны сказать о ней подробнее. Кеплер (с. 200/63) имел в своем распоряжении 4 наблюдения прямого восхождения Марса и окончательно принял некоторое среднее, ограничившись замечанием, что оно являлось *medium ex aequo et bono*. Оказалось (Шейнин 2007b, с. 101), что его среднее было обобщенным (т. е. с назначенными апостериорными весами) средним арифметическим.

Латинская фраза, которая попала в учебник для студентов-юристов (Розенталь и Соколов 1956, с. 126), означала среднее “по добру и справедливости”[26]. Эти же авторы (с. 113) привели в оригинале отрывок из сочинения **Цицерона** *Pro A. Caecina*, § 65, из которого следовало, что указанная фраза имела подтекст: *А не в соответствии с буквой закона*. Мы предполагаем, что Кеплер знал это сочинение Цицерона (недаром его цитировали даже в 1956 г.), и под *буквой закона* подразумевал ставшее таковой обычное среднее арифметическое. Напомним (Шейнин 2007b, с. 97), что **Бируни** вполне мог и не применять среднее арифметическое.

5.4.2. Косвенные наблюдения. Применение метода минимакса трудно считать уравниванием наблюдений, поскольку он не обладает никакими вероятностными свойствами.

Кеплер (с. 521 – 524/255 – 256) определял положение Марса (M), или, точнее, его расстояние от Солнца (S), по наблюдениям в четырех пунктах (A_1, A_2, A_3, A_4)[27], рассматривая для этого сферические треугольники A_iSM. И ему, конечно же, пришлось учитывать движение Марса: наблюдения соответствовали моментам его местоположения в одной и той же точке. Впрочем, Кеплер указал, что это условие не вполне соблюдалось.

Методы уравнивания косвенных наблюдений были разработаны лишь в XVIII в. [III, п. 8], и он применил элементы метода статистического моделирования. Можно заметить, что его разумные соображения всё-таки зависели от формы треугольников A_iSM, и неясно, как бы он поступил при существенно иных значениях измеренных углов при вершинах A_i. Вот соответствующее мнение Джинджериха (1973, с. 314):

> *Метод обработки избыточных наблюдений у Кеплера в основном сводился к настойчивости при возрастающем понимании неопределенности, присущей данным наблюдения.*

5.5. Добавление к п. 5.4.1. Оказывается (Donahue, см. Кеплер (1609/1992, с. 201, прим. 6), что, впрочем, неудивительно, что Кеплер перенял 4 положения Марса у **Тихо** (*Opera omnia*, т. 13, с. 221), и что сам Тихо по меньшей мере однажды принял обобщенное среднее арифметическое. Имея 24 наблюдения прямого восхождения звезды α Arietis, он разделил их попарно, вычислил среднее по каждой паре и вывел общее среднее из этих частных средних и из добавленных к ним трех отдельных наблюдений, назначив равные веса всем 15 таким образом полученным значениям. Оно оказалось равным (если исключить градусы) 0′ 28″.9; если придать половинный вес отдельным наблюдениям, то общее среднее окажется равным 28″.2, т. е. практически не изменится. Следовало как-то пояснить метод вычислений, но во всяком случае из текста следовало, что Тихо подбирал пары так, чтобы исключить из частных средних систематические ошибки. Ему это удалось; так, первое отдельное наблюдение доставило 0′ 44″, а составляющие первой пары отличались от него на 3′ 32″ и – 4′ 21″ соответственно. Образование пар не изменило окончательного результата, но, видимо, Тихо хотел таким образом (качественно) оценить и систематические влияния, и остаточные погрешности[28]. Эти вычисления описал Плакетт (1958/1970, с. 122 – 123).

Имеется также свидетельство о регулярном применении среднего арифметического (правда, обычного, а не обобщенного) в мореходной астрономии. Bourne (1963, с. 208) привел следующую выдержку из сочинения 1574 г.:

Чтобы определить истинную высоту Солнца (если астролябия не висит вертикально), делай так. Если астролябия верно градуирована, отметь расхождение, и зная его, вычти его половину из наибольшей высоты, или же прибавь эту половину к меньшей высоте …

Интересно, что среднее арифметическое применялось еще в глубокой древности (Вайман 1961, с. 204), правда, в основном для компенсации неточности принятой модели, притом не в астрономии, а в землеустройстве. При измерении площадей земельных участков, близких по форме к прямоугольникам, их площадь принимали равной произведению полусумм противоположных сторон. Возможно, что одновременно имели в виду учет систематического лишь по направлению неравного искажения длин сторон рельефом.

Подобная практика существовала в Индии в XII в. при определении объемов земляных выемок (Bhascara; Colebrooke 1817, гл. 7, §§ 217 – 218, с. 97). В комментарии (Ganeza, XVI в.) сказано, что “чем больше число мест [измерений размеров выемки], тем точнее среднее измерение окажется к истине”.

Примечания

1. Нейгебауер (1975, с. 644) заметил, что “как только дело доходило до чистой геометрии, и **Аристарх**, и **Архимед** начинали действовать беспощадно, полностью пренебрегая практической значимостью задачи”.

2. Ср. утверждение Нейгебауера (1975, с. 145): “Если более высокая точность приводила бы к слишком тяжелым численным вычислениям, **Птолемей** […] обращался к простым аппроксимациям”. Эту выдержку привела и Giora Hon (1989, с. 146).

3. В письме Местлину 1601 г. **Кеплер** (Koyré 1961/1980, с. 398) положительно упомянул **Гиппарха**: “**Тихо Браге** сделал то, что сделал Гиппарх. Он заложил основу здания и выполнил громадную работу”.

4. Ссылка должна была быть на *Альмагест* (V 14, с. 252; H 417). В издании 1984 г., на который мы и будем ссылаться (опуская название *Альмагест*), текст несколько иной.

5. Его труд является “восхитительным достижением, прекрасным объединением трактата по теоретической астрономии с практическим пособием по вычислению эфемерид” (Gingerich 1980, с. 253). Но вот иное мнение, весьма подходившее к нравам тех лет (Чеботарев 1958, с. 579): “Система [**Птолемея**] держала в духовном плену человечество в течение 14 веков”.

6. Действительно (Нейгебауер 1950, с. 252), *Числа несомненно улучшались для облегчения вычислений, что видно на бесчисленных примерах греческой и вавилонской астрономии. Часто заметно округление промежуточных результатов, равно как и важных параметров, что нередко лишает нас всякой надежды точно воспроизвести исходные данные.*

И он же (1975, с. 107):

По всей древней астрономии непосредственные наблюдения и теоретические соображения безнадежно переплетены […]. *Неизбежно имеющие место числовые неточности и произвольные округления* […] *то и дело имеют тот же порядок, что и исследуемые величины.*

7. По данным в *Альмагесте* (VII 3) Fotheringham (1915; 1923) оценил точность водяных часов, которые “обычно применялись” в древности. Введя несколько предположений, он заключил, что вероятная ошибка этих часов составляла 7.6 минут в час. **Бируни** (Шейнин 2007b, с. 96) указал, что от них в конце концов отказались.

8. Wesley (1978, с. 52) заявил, что **Тихо** “был первым, кто понял, что […] необходимы длинные ряды наблюдений, чтобы уравновесить случайные, инструментальные и личные ошибки наблюдения”. С точки зрения теории ошибок эта фраза безграмотна, хоть и понятна. Возможно, что Тихо придерживался программы наблюдений, которая обеспечивала некоторое выравнивание различного рода ошибок, однако регулярные наблюдения проводились и в древности, что мы и обсуждаем в основном тексте.

Wesley (с. 51) также заметил, что Тихо сочетал результаты наблюдений на многих инструментах и что это было весьма благоприятным. Верно, хоть и с оговоркой: явно неравноточные наблюдения осреднять опасно. Кроме того, если хоть один инструмент временно выходит из строя, то средние значения по остальным инструментам могут оказаться смещенными относительно прежних данных.

9. В нескольких местах своего трактата, а в одном случае (III 1, с. 136; H 201) именно в связи с длиной тропического года, **Птолемей** заявил, что объяснение явлений простейшими предположениями (постоянством этой длины) представлялось ему “хорошим принципом”. Подобный же принцип косвенно рекомендовал **Маймонид** (1135 – 1294), а **Ньютон**, как известно, сформулировал его в качестве первого правила “философствования” (т. е. умозаключений в физике), см. Шейнин (2007b, с. 37).

10. То же повторил Бриттон (1992).

11. Этот источник был посвящен астрологии. **Птолемей** (например, I 2 и I 3) полагал, что влияние небесных тел проявляется как склонность, а не как неизбежность, и потому его астрология была в какой-то степени основана на качественной корреляции. Thorndike (1923, с. 115) утверждал, что в Средневековье указанное сочинение имело “громадное влияние”. И заметим, что подход **Бируни** к астрологии был тем же самым (Шейнин 2007b, с. 94).

12. И в то же время введенный авторами термин удачен в том, что отражает основное отличие древней (в основном качественной) науки от современной. В нашем контексте можно указать на введение климатических зон в древности, но, конечно же, без всяких измерений температуры воздуха, тогда как **Гумбольдт** в 1817 г. установил те же зоны, но уже на основе этого параметра.

Заметим, что географ и историк **Страбон** (64 или 63 – 23 или 24 до н. э.) не вполне понятно заявил (1969, 2.1.11), что "Во многих случаях простой глаз представляет вещи и согласование всех свидетельств более надежно, чем инструмент". А в Средневековье (Price 1955, с. 6) "многие карты вполне могли составляться, исходя из общего знания местности, без каких бы то ни было измерений или глазомерных оценок землеустроителем".

Страбон (1969, 2.3.7) кроме того явно переоценил влияние случайности:

Распределение животных, растений и климатов, подобное существующему, не является результатом предначертания, равно как и различия в расах или в языках, но скорее вызвано случаем.

13. Если даже окончательный результат при этом не изменится, оценка точности результата окажется неверной. **Беббедж** (1874) назвал эту процедуру *trimming* (усечением), т. е. отбраковкой крайних наблюдений. Он также упомянул подделывание и произвольный отбор наблюдений.

14. Несмотря на возможные ошибки, более вероятными в этом случае могут оказаться выдающиеся достижения: "Опасности и беспокойная ненадежность порождает силу, которая подвигает человечество на новые и более возвышенные начинания" (Isaac Asimov, *The End of Eternity*, 1972, chapter 18).

Происхождение видов **Дарвина** служит прекрасным примером представления громадного, но математически сырого материала, который преобразил отрасль науки. Следовало ли ему отложить свою публикацию, привлечь кого-нибудь себе на помощь и т. д.? Вряд ли. Описав градусное измерение VIII в. в Китае, Beer и др. (1961, с. 26) заявили, что некоторые материалы, зарегистрированные как результаты измерений, были на самом деле вычислены, и что "вероятно" считалось, что тем самым была достигнута намного более высокая надежность. Collinder (1968, с. 23) не согласился с ними. Во-первых, точность результатов, которую он оценил по внутренней сходимости, была в то время возможна; и, во-вторых, китайские астрономы не имели возможности вычислить желаемые величины. Второе возражение, однако, не исключает возможности фальсификации (с благими намерениями).

Здесь же можно описать косвенно относящееся к делу замечание **Гаусса** из его письма **Ольберсу** 31.12.1814 (1900/1976, т. 4-1, с. 567) по поводу одного мемуара Лапласа:

До сих пор я неизменно представлял себе, что для геометров первого ранга вычисления всегда являлись лишь одеянием того, что они устанавливали одними лишь размышлениями.

Редактор первоначального издания (Шумахер) привел ссылку на т. 6, с. 581 собрания сочинений Гаусса (на его рецензию на мемуар **Лапласа** об отсутствии гиперболических комет).

15. Лурье (1934, с. 37) заметил, что со времени **Платона** приближенные вычисления начали относить не к геометрии, а к области низшей, прикладной науки, недостойной включения в научную математику. Более того (Хартнер 1977, с. 3): “По меньшей мере до 1600 г. дроби обычно округлялись по прихоти вычислителя”.

16. В то же время (Джинджерих 1983, с. 146) **Птолемей** объединил две таблицы с единым входом каждая, что оказалось “одним из самых искусных методов практической математики древности”.

17. Мы часто упоминаем **Деламбра** и поэтому скажем несколько слов о нем. Нейгебауер (1946, с. 86, Прим.) указал, что книга Деламбра (1817) “до сих пор не превзойдена и даже не достигнута [другими сочинениями] ввиду ее непосредственной связи с первоисточниками”. Но изыскания Деламбра не менее девяти раз отрицательно упоминались в переписке **Гаусса** (шесть раз – им самим). В письме Шумахеру 1 марта 1845 г. Гаусс (1863/1975, т. 5-2, с. 411 – 412) назвал Деламбра *мошенником* (Schächer). В 1829 г. **Бессель** опубликовал отрицательную рецензию на книгу Деламбра (1827) и на с. 184 отметил, что тот “пытается приписать своему соотечественнику **Пикару** часть открытия аберрации света, которая до сих пор принадлежала одному лишь **Брадлею**”.

Впрочем, и Гаусс, и его корреспонденты, и Бессель видимо обошли описание Деламбром каталога **Птолемея** (наш п. 3.9), равно как и оптические исследования Птолемея. По поводу последних Деламбр (1812, с. 382) заявил, что в них “можно найти хорошо произведенные физические опыты, что было беспримерным для древних”. Современное описание этих исследований см. Smith (1982). Но совсем скверно, что Деламбр (1810, с. 182) заявил, что “метод **Лежандра**” состоял в том, чтобы “свести к нулю сумму квадратов всех ошибок” [всех остаточных свободных членов исходных уравнений], замечено Стиглером (1986, с. 140, Прим.).

18. Palter (1970, с. 126) упомянул 150 новых звезд, но не обосновал этого утверждения.

19. Так (с. 110),

> *Каждая точка означает моделированную ошибку в координате звезды, посредством которой случайно назначенные числа представляют разности между широтами по* ***Гиппарху*** *и* ***Птолемею*** *и точными положениями звезды.*

Грассхоф (1990, с. 80) также полагает, что для любой плотности распределения (в современных обозначениях) $P(|\xi - \bar{x}| < \sigma) = 2/3$.

20. Укажем любопытную подробность, относящуюся к округлениям. Gingerich & Welther (1984, с. 422) считают, что “округление 25′ в сторону уменьшения и 55′ в сторону увеличения”, которое практиковал **Птолемей** по утверждению Р. Р. Ньютона, “произвольно”, и что для подобного предположения “не было никаких причин”. Примерно в 1949 г. нас, студентов Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, учили, со ссылкой на **Гаусса**, округлять именно таким образом, т. е. оставлять нуль и четные числа без изменения, а единицы и нечетные числа увеличивать (4.45 ≈ 4.4, 9.55 ≈ 9.6). Найти подобное правило у Гаусса нам не удалось, но точно то же рекомендовал Tukey (1977, с. 4).

21. Wilson (1984) опубликовал рецензию на другую книгу Р. Р. Ньютона, *The Origins of Ptolemy's Astronomical Parameters*, 1982, и заметил, что тот сформулировал новые доводы и повторил, что **Птолемей** был обманщиком.

22. Об инструментах **Птолемея** и их точности см. Collinder (1968, с. 12 – 18).

23. Аналогичное рассуждение имеется в комментариях **Леви** к Книге притчей Соломоновых, см. п. 4.2.

24. Рабинович (1973, с. 77) привел выдержку из сочинения Леви, которая видимо означает, что неопределенность существует во всех случаях, т. е. что подобный инструмент невозможен [как и вечный двигатель]:

> *Совершенное знание чего-то означает знание того, как оно есть* […], *т. е. того, что в нем есть определенного и ограниченного, а также какова его неопределенность.*

25. Описав принцип этих вычислений, **Кеплер** (с. 256/95) попросил читателей сжалиться над ним:

> *Если этот утомительный метод преисполнил тебя отвращением, то ты тем более должен отнестись ко мне с состраданием, потому что мне пришлось применить его по меньшей мере 70 раз и затратить на это уйму времени.*

26. Кеплер (с. 262/99) применил то же выражение по меньшей мере еще один раз, причем Donahue опять ошибся, переведя его как "среднее из равного и доброкачественного (т. е. принимать интерполяцией)". В указанном месте Кеплер указал, что, поскольку 31′ приводит к 18′, одна и четыре пятых минуты приведут к числу, близкому 1′ [31:18 = 1.72]. В немецком издании сочинения Кеплера 1929 г. латинское выражение оба раза неверно переведено как "среднее из хорошего и плохого".

27. Ср. вычисления **Кеплера** (Джинджерих 1973, с. 311): "Он отбирал все тройки наблюдений, чтобы отыскать негодные данные". См. также [III, п. 8.2] по поводу вычислений **Тихо** и **Бошковича** соответственно. Уравнения Кеплера не были ни линейными, ни даже алгебраическими; именно в связи с этими вычислениями Кеплер просил читателей сжалиться над ним (Прим. 25).

28. Кеплер сам (с. 357/157) заметил, что его работа схожа с вычислением *засечек* землеустроителями и указал, что будет "доверять в основном тем наблюдениям", при которых базис для косвенного определения искомого расстояния больше. "Ибо при обычном методе определения расстояний предметов на Земле это расстояние устанавливается более точно, когда точки стояния расположены дальше друг от друга".

По поводу обычных засечек утверждение Кеплера не было совсем верным, но важнее спросить: имеет ли значение местоположение точки наблюдения на Земле при громадных расстояниях до Марса и Солнца?

Библиография

Бируни А. Р. (1976), *Канон Масуда,* Книги 6 – 11. *Избр. Произв.*, т. 5-2. Ташкент.

Вайман А. А. (1961), *Шумеро-вавилонская математика III – I тысячелетия до н. э.* М.

Ефремов Ю. Н., Павловская Е. Д. (1987), Датировка *Альмагеста* по собственным движениям звезд. *Докл. АН СССР*, т. 294, № 2, с. 310 – 313.

--- (1989), Определение эпохи звездного каталога *Альмагеста* по анализу собственных движений звезд. *Историко-астрономич. исследования*, вып. 21, с. 175 – 192.

Зализняк А. А. (2000), Лингвистика по А. Т. Фоменко. *Успехи математич. наук*, т. 55, с. 162 – 188.

Лурье С. Я. (1934), Приближенные вычисления в древней Греции. *Архив истории науки и техники*, № 4, с. 21 – 46.

Маврина Т. В. (1999), Проблемы борьбы с лженаукой. *Вестник Росс. АН*, т. 69, № 10, с. 879 – 892.

Новиков С. П. (1997), Математики и история. *Природа*, № 2, с. 70 – 74.

--- (2000), Псевдоистория и псевдоматематика: фантастика в нашей жизни. *Успехи математич. наук*, т. 55, с. 159 – 161.

--- (2002), Вторая половина XX в. и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе. *Историко-математич. исследования*, вып. 7(42), с. 326 – 356.

Носовский Г. В., Фоменко А. Т. (2004), *Царь славян.* СПб.

Розенталь И. С., Соколов В. С. (1956), *Учебник латинского языка.* М.

Чеботарев А. С. (1958), *Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей.* М.

Шевченко М., Shevchenko M. (1988), Звездный каталог Клавдия Птолемея: специфика астрометрических наблюдений в древности. *Историко-астрономич. исследования*, т. 20, с. 167 – 186.

--- (1990), An analysis of errors in the star catalogues of Ptolemy and Ulugh Beg. *J. Hist. Astron.*, vol. 21, pp. 187 – 201.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1973), Mathematical treatment of astronomical observations. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 11, pp. 97 – 126.

--- (1994), Gauss and geodetic observations. Там же, т. 46, с. 253 – 283.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк.* Берлин. Также www.sheynin.de.

--- (2007a), *История теории ошибок.* Берлин. Также www.sheynin.de.

--- (2007b), *Статьи по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также www.sheynin.de.

Aaboe A., De Solla Price D. S. (1964), Qualitative measurements in antiquity. В книге *L'Aventure de la science. Mélanges A. Koyré*, t. 1. Paris, pp. 1 – 20.

Archimedes (1925), Die Sandzahl. В книге автора *Über schwimmende Körper und Sandzahl.* Leipzig, pp. 67 – 82.

Aristarchus (1959), On the sizes and distances of the Sun and Moon. В книге Heith Sir Thomas, *Aristarchus of Samos*. Oxford, pp. 353 – 414.

Babbage C. (1874), Of observations. *Annual Report Smithsonian Instn* за 1873, pp. 187 – 197.

Beer A. и др. (1961), An 8th century meridian line … *Vistas in Astronomy*, vol. 4, pp. 3 – 28.

Berggren J. L. (1991), Ptolemy's map of earth and the heavens: a new interpretation. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 43, pp. 133 – 144.

Bessel F. W. (1829), Рецензия на Delambre (1827). *Jahrbücher f. wiss. Kritik*, Bd. 2, pp. 161 – 168, 177 – 200.

Bhascara (середина XII в.), *Lilavati.* В книге Colebrooke (1817).

Boll F. (1901), Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemäus. *Bibl. Math.*, ser. 3, Bd. 2, pp. 185 – 195.

Bourne W. (1963), *A Regiment for the Sea and Other Writings on Navigation*. Cambridge.

Boyle R. (1772), A physico-chymical essay. *Works*, vol. 1. Sterling, Virginia, 1999, pp. 359 – 376.

Britton J. P. (1992), *Models and Precision: the Quality of Ptolemy's Observations and Parameters.* New York.

Colebrooke H. T. (1817), *Algebra and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London. [Wiesbaden, 1973.]

Collinder P. (1968), On the accuracy of astronomical observations in antiquity. *Univ. Gothenburg Astron. Notes*, No. 10, pp. 3 – 36.

Dambis A. K., Efremov Yu. N. (2000), Dating Ptolemy's star catalogue through proper motions: the Hipparchan epoch. *J. Hist. Astron.*, vol. 31, pp. 115 – 134.

Delambre J. B. J. (1810), *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel.* Paris. [Amsterdam, 1966.]

--- (1812), Die Optik des Ptolemäus … *Ann. Phys.*, Bd. 40, pp. 371 – 388. Перераб. [L. W.] Gilbert по *Bibl. Brit.* [t. 48], Nov. 1811 [, pp. 195 – 217].

--- (1817), *Histoire de l'astronomie ancienne*, tt. 1 – 2. New York – London, 1965.

--- (1827), *Histoire de l'astronomie du dix-huitième siècle*. Paris. [Paris, 2004.]

Donahue W. H. (1988), Kepler's fabricated figures: covering up the mess in the *New Astronomy*. *J. Hist. Astron.*, vol. 19, pp. 217 – 237.

Dreyer J. L. E. (1918), On the origin of Ptolemy's catalogue of stars, 2nd note. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 78, pp. 343 – 349.

Duke D. W. (2002), Associations between the ancient catalogues. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 56, pp. 435 – 450.

Euler L., Mayer T., Эйлер Л., Майер Т. (1959), Переписка [1751 – 1755]. *Историко-астрономич. исследования*, т. 5, с. 271 – 444. Немецкий оригинальный текст с переводом.

Evans J. (1987), On the origin of the Ptolemaic star catalogue. *J. Hist. Astron.*, vol. 18, pp. 155 – 172, 233 – 278.

Fomenko A. T., Kalashnikov V. V., Nosovsky G. V. (1989), When was Ptolemy's star catalogue in *Almagest* compiled in reality? *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 17, pp. 203 – 229.

Fotheringham J. K. (1915 – 1923), The probable error of a water-clock. *Classical Rev.*, vol. 29, pp. 236 – 238; vol. 37, pp. 166 – 167.

Ganeza (XVI в.), Комментарий к Bhascara (середина XII в.). В книге Colebrooke (1817, гл. 7, §§ 217 – 218, с. 97).

Gauss C. F. (1900 – 1909), *Briefwechsel zwischen Gauss und Olbers. Werke, Ergänzungsreihe*, Bde 4-1, 4-2. Hildesheim, 1976.

--- (1860 – 1865), *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher*. Там же, тт. 5-1, 5-2. Hildesheim, 1975.

Gingerich O. (1973), Kepler's treatment of redundant observations … *Intern. Kepler-Symposium. Weil-der-Stadt 1971*. Hildesheim, pp. 307 – 314.

--- (1980), Was Ptolemy a fraud? *Q. J. Roy. Astron. Soc.*, vol. 21, pp. 253 – 266.

--- (1983), Ptolemy, Copernicus, and Kepler. В книге *The Great Ideas Today.* Редакторы M. J. Adler, J. van Doren. Chicago, pp. 137 – 180.

Gingerich O., Welther Barbara L. (1984), Some puzzles of Ptolemy's star catalogue. *Sky & Telescope*, vol. 67, pp. 421 – 423.

Goldstein B. R. (1985), *The Astronomy of Levi ben Gerson (1288 – 1344).* New York.

Grasshoff G. (1986), *Die Geschichte des Ptolemäischen Sternkataloges.* Диссертация. Hamburg.

--- (1990), *The History of Ptolemy's Star Catalogue*. Автор не упоминает исходный источник 1986 г. Ссылки в Указателе доведены до 1984 г. Одиннадцать ссылок на источники 1982 – 1987 упомянуты в Библиографии, но не включены в Указатель.

Hartner W. (1977), The role of observations in ancient and medieval astronomy. *J. Hist. Astron.*, vol. 8, pp. 1 – 11.

Hon Giora (1989), Is there a concept of experimental error in Greek astronomy? *Brit. J. Hist. Sci.*, vol. 22, pp. 129 – 150.

Kepler J. (1609, латин.), *New Astronomy.* Cambridge, 1992. Перевод W. H. Donahue.

Koyré A. (1956, франц.), Pascal-Savant. В сборнике автора *Metaphysics and Measurement*. Cambridge, Mass., 1968, pp. 131 – 156.

--- (1961, франц.), *The Astronomical Revolution: Copernicus – Kepler – Borelli*. London, 1980.

Lalande J. J. (1757), Sur les equations séculaires … *Mém. Math. et Phys. Acad. Roy. Sci.*, pp. 411 – 470.

Laplace, P. S., Лаплас П. С. (1796, франц.), *Изложение системы мира.* Л., 1982.

Lloyd G. E. R. (1979), *Magic, Reason and Experience*. Cambridge.

--- (1982), Observational error in later Greek science. В книге *Science and Speculation*. Редакторы J. Barnes и др. Cambridge, pp. 128 – 164.

Manitius K., редактор (1894), *Hipparchi in Arati et Eudoxi phaenomena commentaria*. Leipzig.

Neugebauer O. (1946), The history of ancient astronomy: problems and methods. В книге автора (1983, pp. 33 – 98).

--- (1947), The waterclock in Babylonian astronomy. Там же, с. 239 – 245.

--- (1948), Mathematical methods in ancient astronomy. Там же, с. 99 – 127.

--- (1950), The alleged Babylonian discovery of the precession of the equinoxes. Там же, с. 247 – 254.

--- (1951), *The Exact Sciences in Antiquity*. Providence, R. I., 1957.

--- (1956), Notes on Hipparchus. В книге автора (1983, pp. 320 – 324).

--- (1975), *History of Ancient Mathematical Astronomy*, pts 1 – 3. Berlin. Сквозная нумерация страниц.

--- (1983), *Astronomy and History. Sel. Essays*. New York.

Newcomb S. (1878), *Researches of the Motion of the Moon*, pt. 1. *Wash. Observations* за 1875, Appendix 2.

Newton R. R. (1977), *The Crime of Claudius Ptolemy*. Baltimore – London.

--- (1980), Комментарии к статье Gingerich (1980). *Q. J. Roy. Astron. Soc.*, vol. 21, pp. 388 – 399.

Palter R. (1970), An approach to the history of early astronomy. *Studies in Hist. and Philos. Sci.*, vol. 1, pp. 93 – 133.

Pannekoek A., Паннекук А. (1961), *History of Astronomy.* London. [New York, 1989. *История астрономии*. М., 1966.]

Pedersen O. (1974), *A Survey of the Almagest.* Odense, Denmark.

Peters C. A. F., Knobel E. B. (1915), *Ptolemy's Catalogue of Stars. A Revision of the Almagest. Carnegie Instn of Washington Publ. No. 86.*

Plackett R. L. (1958), The principle of the arithmetic mean. *Biometrika*, vol. 45, pp. 130 – 135. В сборнике *Studies in the History of Statistics and Probability*. Редакторы E. S. Pearson & M. G. Kendall. London, 1970, pp. 121 – 126.

Price D. J. (1955), Medieval land surveying and topographical maps. *Geogr. J.*, vol. 121, pp. 1 – 10.

Ptolemy (1984), *Tetrabiblos*. London. Греч. и англ.

--- (1984), *Almagest.* London. Перевод G. J. Toomer.

Rabinovich N. L. (1970), Rabbi Levi ben Gershon and the origins of mathematical induction. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 6, pp. 237 – 248.

--- (1973), *Probability and Statistical Inference in Ancient and Medieval Jewish Literature*. Toronto.

--- (1974), Early antecedents of error theory. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 13, pp. 348 – 358.

Smith A. M. (1982), Ptolemy's search for a law of refraction. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 26, pp. 221 – 240.

Stigler S. M. (1986), *History of Statistics*. Cambridge, Mass.

Strabo (1969), *Geography*, vol. 1. London – Cambridge, Mass.

Swerdlow N. M. (1979), Ptolemy on trial. *Amer. Scholar*, vol. 48, pp. 523 – 531.

Thorndike L. (1923), *History of Magic and Experimental Science*, vol. 1. New York.

Toomer G. J. (1974), Hipparchus on the distances of the Sun and Moon. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 14, pp. 126 – 142.

Tukey J. M., Тьюки Дж. (1977), *Exploratory Data Analysis.* Reading, Mass. *Анализ результатов наблюдений.* М., 1981.

Vogt H. (1925), Versuch einer Wiederherstellung von Hipparchs Fixsternverzeichnis. *Astron. Nachr.*, Bd. 224, pp. 17 – 54.

Wesley W. G. (1978), The accuracy of Tycho Brahe's instruments. *J. Hist. Astron.*, vol. 9, pp. 42 – 53.

Westfall R. S. (1973), Newton and the fudge factor. *Science*, vol. 179, No. 4075, pp. 751 – 758.

Wilson C. (1968), Kepler's derivation of the elliptical path. *Isis*, vol. 59, pp. 5 – 25.

--- (1984), The sources of Ptolemy's parameters. *J. Hist. Astron.*, vol. 15, pp. 37 – 47.

V

К истории статистического метода в астрономии

Часть вторая

6. Солнечные пятна

6.1. Открытие. Гумбольдт считал весьма вероятным, что солнечные пятна издавна наблюдались невооруженным глазом во время особых метеорологических условий (например, песчаных бурь), и оказалось, что об этом китайские астрономы действительно сообщили **Марко Поло** в последней четверти XIII в. (Шейнин 2007b, с. 261 – 262). Несколько авторов без точных ссылок указывали, что пятна стали известны за много веков до этого.

Науке нового времени солнечные пятна стали известны с 1611 – 1612 гг., в течение которых их наблюдали несколько астрономов (там же), в том числе **Галилей**. Он (1613) смог отделить периодическое вращение пятен вместе с диском Солнца от их собственного перемещения и тем самым определить период обращения Солнца около своей оси. О наблюдениях Галилея и других астрономов, в первую очередь Шейнера, см., например, Shea (1970) и Daxecker (1996).

Брошюра последнего – это резюме латинской книги Шейнера 1630 г., в которой несколько раз указывался период обращения пятен, равный "примерно 26 дням" (с. 34) и "26 – 27 дням" (с. 52), т. е. тот же, что и у Галилея. На с. 37 автор воспроизводит четкое заявление Шейнера о вращении Солнца, а на с. 44 цитирует его особое высказывание: "Тысяча изощренных доводов не имеет никакого значения по сравнению с одним-единственным наблюденным фактом". Заметим еще, что Шейнер обращал должное внимание на методику наблюдений.

6.2. Периодичность пятен заподозрил Хорребоу в 1776 г. (Wolf 1877, с. 654), а Литтров (1836, с. 851) счел периодичность возможной: "Они [пятна] обычно видны в большом количестве и как будто периодичны, но иной раз Солнце в течение длительного времени свободно от них".

Швабе (1838) опубликовал свои наблюдения пятен за 1826 – 1837 гг.[1], но ни в тот раз, ни в своих последующих ежегодных сообщениях в том же журнале ничего не сказал о периодичности, а затем (1843, с. 283) даже заявил, что "потребуется еще много точных наблюдений, пока не станет возможным мало-мальски уверенно заключить об их [пятен] сущности"[2]. И вдруг через год он (1844, с. 233 – 234) указал, что "уже из моих [из его] прежних наблюдений […] выказывалась определенная периодичность солнечных пятен, и вероятность достоверности этого возросла после наблюдений нынешнего года".

Составив сводку всех своих наблюдений за 1826 – 1843 гг., он указал, что период примерно равен 10 годам, но добавил (с. 235), что "будущее должно установить, окажется ли этот период устойчивым". Никакого формального анализа он не производил, но вряд ли можно было строго выводить примерно 10-летний период по данным за 18 лет.

Труды Швабе не замечали. Во всяком случае, **Дж. Гершель** (1847, с. 435), указав на важность систематического наблюдения пятен, не упомянул его, а Clerke (1885/1893, с. 156) заявила, что на солнечные пятна обратили серьезное внимание только после того, как **Гумбольдт** (1850, т. 3, с. 401) описал наблюдения Швабе. Вот строки из его описания; мы воспользовались английским переводом Гумбольдта (т. 4, 1858, с. 85):

> *Ни один нынешний астроном, как бы восхитительны ни были его инструменты, не смог бы уделять внимание этой теме так неизменно, как Швабе, который часто в течение 24 долгих лет исследовал диск Солнца более 300 дней в году. Его наблюдения за 1844 – 1850 гг. еще не были опубликованы, но я в такой степени воспользовался нашей дружбой, что попросил его сообщить мне о них и кроме того ответить на некоторые вопросы.*

Далее Гумбольдт (с. 85 – 87) цитирует ответ Швабе, который мы и перескажем. По крайней мере с 1826 по 1850 гг. появление пятен происходило с периодом 10 лет, но Швабе согласен с тем, что он может оказаться переменным (что же это за период?). Невооруженному глазу видны только пятна, диаметром превышающие 50″. Влияния пятен на давление или температуру воздуха Швабе не обнаружил, но полагал, что соответствующее исследование должно проводиться во многих регионах Земли.

Wolf (1856 – 1859, p. 12)[3] ввел “относительное число пятен”

$$R = k(f + 10g).$$

Здесь f – полное их число, а g – число их групп. Вряд ли его формула имела какой-либо особый статистический смысл.

В следующие годы наиболее известными стали его же наблюдения (1859). Он собрал все данные с середины XVIII в., определил эпохи экстремумов количества пятен и вывел период, равный 11.1 лет. Вернувшись к этой теме, он (Faye 1882) собрал наблюдения уже за 120 лет и вычислил периодичность пятен (Т), испробовав 19 гипотез: Т = 9 лет 6 мес.; 9 лет 8 мес.; 9 лет 10 мес.; … 12 лет 6 мес. и заключил, что существовало два периода, $T_1 = 10$ лет и $T_2 = 11.3$ года; наименьшее общее кратное этих чисел равно, как он заметил, 170 годам. В качестве критериев он принял размах разностей “общее среднее годичных чисел пятен минус годичные средние” и их среднюю квадратическую величину.

Исследования пятен продолжалось. **Ньюком** (1901a) рассмотрел 26 периодов наблюдений (1610 – 1889) и определял периодичность максимумов и минимумов пятен и двух промежуточных фаз. Самих вычислений он не привел, но в любом случае они не были шаблонными. Он заключил, что (с заведомо завышенной точностью) Т = 11.13 года, ср. Прим. 20. В настоящее время (Bray & Loughhead 1964, § 6.3.2) полагают, что строгой периодичности нет и в помине.

6.3. Влияние на геомагнитные явления и климат. У. Гершель (1801) попытался на основе наблюдений 1650 – 1717 гг. выявить связь между количеством пятен и ценой пшеницы, т. е., косвенно, между пятнами и метеорологическими условиями. Впрочем, его работа вряд ли привлекла внимание, но заметим, что много позже подобную заметку опубликовал Chambers (1886).

Через 50 лет после Гершеля **Гумбольдт** (1850, т. 3, с. 388) описал первые (неудачные) попытки установления связи температуры воздуха с экстремальными количествами солнечных пятен и заметил, что картину затемняют изменения погоды. О трудностях подобных исследований сообщил Meadows (1975).

Влияние солнечных пятен (и вообще солнечной активности) на геомагнетизм стало всеобще признанным[4], но в прежние времена оно представлялось сомнительным. Faye (1873) упомянул периодичности в появлении пятен и в изменениях магнитного склонения и видимо считал их совпадение установленным фактом[5]. Он же (1878) впоследствии заметил, что эти периоды различаются на 0.66 года[6] и даже указал, что указанные явления не связаны друг с другом и что

> *Сочетание благоприятных обстоятельств, которое воспроизводится каждые 176 лет* [ср. выше наименьшее общее кратное двух предположенных периодов, равное 170 годам], *привело к мысли о связи этих двух явлений.*

И, наконец, он (1882) вообще не упомянул подобной связи.

Ту же связь исследовал Вольф (1881). Он вывел эмпирическое соотношение между изменениями относительного числа пятен (п. 6.2) и магнитным склонением и заявил, что его формула “замечательно” согласуется с исходными данными.

Meldrum (1872) указал на возможную связь циклонов с солнечными пятнами и заявил, что “трудно избежать вывода о том, что […] метеорология, магнетизм и физика Солнца тесно связаны”. Вскоре он (1875) продолжил свое исследование и заметил (с. 218), что

> *Не только количество циклонов, но их продолжительность, охват территории и энергия также намного значительнее* [в годы максимума] *чем* [в годы минимума количества пятен] *и* […] *имеется высокая вероятность, что эти колебания в* [параметрах] *циклонов в общем совпадали с аналогичными изменениями в количестве дождевых осадков по всей Земле.*

Почти в то же время аналогичное мнение высказал известный астроном-любитель Lockyer (1873), а Blanford (1880) указал на связь атмосферного давления с солнечными пятнами. Таким образом было установлено существенное влияние солнечной активности по меньшей мере на некоторые элементы геомагнетизма и метеорологические явления. Однако, упомянутые авторы лишь качественно сравнивали соответствующие данные, и никто из них не произнес ни единого слова о необходимости новой статистической теории, – теории корреляции.

7. Правило Тициуса – Боде

Первым сформулировал его C. Wolff в 1723 г., затем, в 1766 г., Тициус, но всеобще известным оно стало после работ Боде 1772 г. (Nieto 1972). В соответствии с этим правилом величины, пропорциональные расстояниям планет от Солнца, можно представить формулой

$$a_1 = 4,\ a_n = 4 + 3 \cdot 2^{n-2},\ n = 2, 3, 4, 6, 7, 8.$$

Здесь n – номер планеты, начиная от ближайшей к Солнцу (от Меркурия), а пропущенное значение $n = 5$ относилось к малым планетам. По вычислениям Боде (1778a, с. 635; 1778b, с. 362) расхождение действительных расстояний планет (выраженных в тех же единицах, что и величины a_n) от правила оказались либо нулями (Марс и Сатурн), либо положительными числами, возрастающими до 5 единиц (Уран). Заметим, что Боде (1792) рассматривал и параметры комет и (основных) планет. В случае комет он сравнивал распределение каждого параметра их орбит с равномерным распределением и сформулировал качественные выводы.

Мнения о смысле правила Тициуса – Боде противоречивы, но во всяком случае этой проблеме было посвящено специальное исследование (Nieto 1972), которое почему-то не учло мнение **Гаусса** (1802):

> *Странно, что так называемый закон* […] *Тициуса хотели привести в качестве довода против обеих* [новооткрытых малых] *планет. Вопреки сути любой истины, которая заслуживает имя закона, эта зависимость соблюдается лишь совсем случайно, и, что видимо никто еще не заметил, вовсе не имеет места для Меркурия. И мне представляется весьма очевидным, что последовательность*
>
> $$4,\ 4 + 3,\ 4 + 12,\ 4 + 24,\ 4 + 48,\ 4 + 96,\ 4 + 192,$$
>
> *с которой расстояния должны совпадать, вовсе не является непрерывной* (continuirliche).

Сославшись на *Мистерию* **Кеплера**, Гаусс заключает: “Никак не следует порицать попыток отыскивать в природе подобные приблизительные совпадения”. В этом контексте упоминание надуманной попытки Кеплера объяснить структуру Солнечной системы существованием пяти правильных многогранников означало, что никакого закона он не установил (что, впрочем, стало совершенно ясно после открытия Урана).

8. Задача Мичелла

8.1. Мичелл был известным естествоиспытателем, см. Hardin (1966), McCormmach (1968), Gower (1982). Первый из них указал, в частности, что Мичелл повлиял на **Гершеля**. Нас интересует его исследование (1767a) возможной близости звезд друг к другу. Предположив, что звезды распределены по небу “чисто случайно”, он (с. 429) счел, что вероятность двум звездам находиться в пределах 1° друг от друга равна 1/13 131 и что (с. 428)

> *Существует наивысшая вероятность, что* [звезды] *в некоторых частях пространства собраны вместе в громадном числе, в других же частях их очень мало или совсем нет.*

Свою вторую статью Мичелл (1767b) начал с утверждения, что двойные звезды в своем большинстве являются физически-двойными и решил, что системы звезд подвержены существенному влиянию взаимного притяжения. Он первым упомянул действие притяжения за пределами Солнечной системы.

Вот его вероятностное рассуждение (1767a). Пусть площадь поверхности сферического сегмента, соответствующего расстоянию в 1° между двумя точками на сфере радиуса R, равна s, а площадь поверхности сферы – S. Тогда[7]

$$p = \frac{s}{S} = \frac{1}{4\cdot 57.296^2} = \frac{1}{13131} = 0.000076.$$

Многие комментаторы заметили, что дальнейшие вычисления Мичелла ошибочны, см., например, наш п. 8.4. Следуя **Фишеру** (1956, с. 38), см. также **Хальд** (1990, с. 73) и наш п. 8.5, можно в соответствии с распределением **Пуассона** указать, что вероятность существования хотя бы одной двойной звезды равна

$$P = 1 - (a^0/0!)e^{-a} - (a/1!)\ e^{-a} = 1 - e^{-a}(1 + a),$$

где $a = pn$. При $n = 5000$, $a = 0.3808$ и $P = 0.056$. Эта вероятность достаточно низка, но вот **Гершель** впоследствии обнаружил несколько сот визуально-двойных звезд, расположенных ближе чем на 1° друг от друга.

Произошло ли некоторое событие по предначертанию (т. е. по необходимости) или случайно? Философы и естествоиспытатели задавали себе этот вопрос по крайней мере начиная с **Аристотеля** [I, п.5] и, следуя обычаю своего времени (там же, п. 9.1), Мичелл (как и последующие авторы) отождествлял случайность с “равномерной” случайностью.

8.2. Уильям Гершель (1802, с. 203) решал ту же задачу:

> *Поверхность сферы состоит из 34 036 131 547* [$\approx 3.404 \cdot 10^{10}$] *круговых пространств диаметром 5″ каждое* […] *и для каждой из 686 звезд* [седьмой величины] *будет иметься 49 615 357* [*49 615 352* $\approx 4.961 \cdot 10^7$] *таких пространств, в которых она может быть расположена. Но из всего этого количества лишь одно будет надлежащим местом, в котором эта звезда сможет образовать пару с любой из 450 данных звезд* [между шестой и пятой величинами].

И Гершель решил, что вероятность “случайного” существования такой двойной звезды окажется ниже, чем $1/75.5 \cdot 10^6$, и что вообще (с. 204)

Случайные расположения не могут объяснить многочисленности двойных звезд. […] *Их существование должно быть следствием какого-то общего закона природы.*

Приведенное вычисление ошибочно. Во-первых, число поверхностей указанного диаметра равно

$$\frac{4\pi R^2}{\pi R^2} \cdot 57.296^2 \left(\frac{60 \cdot 60}{2.5}\right)^2 = 13131 \left(\frac{60 \cdot 60}{2.5}\right)^2 = 2.7228 \cdot 10^{10} = \frac{3.4036 \cdot 10^{10}}{1.25}$$

и мы не можем объяснить отсутствие у Гершеля коэффициента 1/1.25 (или даже примерно равного ему числа $\sqrt{2/\pi}$ = 1/1.2533). Во-вторых, дробь $1/75.5 \cdot 10^6 = 450/3.404 \cdot 10^{10}$, а это означает, что он не принял во внимание числа звезд седьмой величины.

8.3. Форбс (1849) усомнился в выводах Мичелла:

Равномерное рассеивание звезд по всему небу […] *гораздо менее согласно с полным отсутствием Закона или Принципа, чем наличие пространств со сравнительным сгущением звезд,* […] *равно как и областей, в которых они весьма малочисленны.* […]

Попытки установить численное значение априорной вероятности любого заданного расположения скученности сомнительны.

Можно неплохо представить звезды и их распределение разбрызгивая белую клейкую краску […] *на темный фон* […] *Подобная искусственная галактика покажет каждую разновидность группировки* [звезд] *с бесчисленным количеством двойных и тройных точек.*

8.4. Форбс (1850) повторил свои прежние доводы и спросил себя (с. 420), какое распределение можно считать случайным. Теория вероятностей того времени не могла дать удовлетворительного ответа на этот вопрос (а математическая статистика просто еще не существовала). В принципе же комментаторы размышляли о возможных уклонениях эмпирической плотности распределения от теоретической.

Сославшись на *математического друга*, Форбс (с. 425) заметил, что вычисления Мичелла были ошибочными и что при броске n p-гранных костей ($p > n$) вероятность выхода несовпадающих друг с другом количеств очков на них будет равна

$$P = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{p^n}.$$

Числитель этой формулы равен числу размещений соответствующих элементов, знаменатель – общему числу возможных случаев. Требовался ли *математический друг*?

Пусть, продолжал Форбс, $n = 230$ – число звезд некоторой величины и $p = 4\ 254\ 603$ [$\approx 4.255 \cdot 10^6$] – число сферических сегментов диаметром 3.′2 каждый. Тогда вероятность полного отсутствия двойных звезд, расположенных ближе, чем на 3.′2 друг от друга, будет равна $1 - P$. Он далее оценил P.

На самом деле (п. 8.1) число сегментов равно

$$13131\left(\frac{60 \cdot 60}{3.2}\right)^2 = 4.617 \cdot 10^6 = 1.085p.$$

Наконец, Форбс (с. 411 – 415) изучил распределение зерен риса, падающих сквозь сито на квадраты шахматной доски. Он заявил, что результаты этого опыта подтвердили его прежние выводы (п. 8.3) и что Мичелл, стало быть, ничего не доказал. Он мог бы сослаться на **Бюффона** (1777, § 23).

8.5. Ньюком (1859 – 1861/1860, с. 137 – 138) вычислил вероятность s звездам из N, разбросанных “случайно” по небесной сфере, находиться ближе, чем на расстоянии 1° друг от друга. Применив распределение **Пуассона**, он получил

$$P = \left(\frac{Nl}{h}\right)^s \frac{e^{-Nl/h}}{s!}.$$

Здесь h – число соответствующих поверхностей, а l (смысл которого Ньюком не разъяснил), видимо, площадь одной из них. Во всяком случае, он решил, что

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{41253} = \frac{1}{13131\pi},$$

но вот появление делителя π мы не можем объяснить.

Теперь естественно следовало, что вероятность хотя бы одной поверхности содержать s звезд равна 41 253 P и Ньюком решил, что Мичелл дал неверный ответ для случая $s = 6$ и что его рассуждение было логически несовершенным. Далее Ньюком (с. 138) заявил, что опыт Форбса (п. 8.3) оказался “столь же решающим, как попытка опровергнуть теорему **Пифагора** измерением квадратов, описанных на сторонах треугольника, не то прямоугольного, не то нет”. Наконец, он (с. 139) указал, что случайным является распределение взаимно независимых элементов (звезд). Впрочем, такие элементы могут быть расположены и хаотично (не иметь никакой функции распределения).

8.6. Ньюком (продолжение). Некоторые доводы, описанные выше, содержатся и в другой его статье (1860b). Он (с. 436) повторил свое определение случайного распределения и указал (с. 438), что “в качестве результата случайного распределения следует ожидать некоторую вычислимую меру нерегулярности или группировки”.

Он (с. 439) пояснил, как при помощи распределения **Пуассона** можно установить эту нерегулярность и заметил (с. 437), что Форбс (п. 8.4) фактически “возражает против самого математического определения слова *вероятность*”. Значительную часть статьи Ньюком посвятил логической стороне приложения теории вероятностей[8], но, как и во многих других случаях, его изложение недостаточно ясно.

8.7. Проктор (1874). Отправляясь от задачи Мичелла, он (с. 99) заявил, что хотел бы “определить, какие особенности распределения можно ожидать для некоторого числа точек, рассеянных на плоскости совершенно случайно”. Открывая наугад таблицу логарифмов, Проктор “опускал острие карандаша на страницу таблицы” и отмечал полученную цифру. Каждые 4 такие цифры определяли координаты точки в единичном квадрате; так, цифры 7, 3, 2 и 4 означали точку (0.73; 0.24). Всего он (с. 100) набрал более тысячи таких точек, распределенных “совершенно случайно”, и заявил, что обнаруженные им закономерности в системе примерно тысячи звезд нельзя обосновать капризами случая. Его подход, без всяких ссылок на теоремы теории вероятностей, был всё-таки недостаточно хорош, а случайность набранных им цифр несколько сомнительна. Во-первых, выбор страницы книги “наугад” мог оказаться не вполне случайным; во-вторых, гораздо лучше было бы ограничиваться только последними цифрами мантисс.

8.8. Клейбер (1887, с. 440) опровергнул некоторые выводы Форбса (п. 8.4):

> *Это распространенная ошибка – смешивать случайный разброс с равномерным распределением.* […] *Наиболее вероятным распределением случайно разбросанных точек по поверхности является равномерное, но оно* [всё же] *весьма маловероятно.*

Случайный разброс, видимо, следует понимать как теоретически равномерный. Упрек Клейбера относился к нему самому, хотя только частично, см. ниже.

Клейбер исследовал опыт Форбса. Пусть n точек разбросано по m конгруэнтным квадратам ($n > m$). Тогда вероятность того, что в точности i точек окажутся в одном и том же квадрате, будет, очевидно, равна

$$P = C_n^i\,(\frac{1}{m})^i\,(1-\frac{1}{m})^{n-i} = p_i.$$

Сравнивая “вероятные” (на самом деле – ожидаемые) количества таких квадратов с результатами опыта Форбса, Клейбер предположил (естественно, без количественных оценок), что расхождения были допустимыми, см. также наш п. 12. Сформулировав, далее (с. 443), малопонятное утверждение об экспериментальном образовании “более равномерного, чем случайного распределения”, он сообщил о своем собственном исследовании распределения двух последних цифр семизначной таблицы логарифмов. Вот его заключение. Теория вероятностей “достаточно хорошо описывает возможные неправильности распределений, подобные описанным […] Форбсом или же тех, которыми обладают звезды”.

8.9. Струве. Его исследование двойных звезд хорошо известно. Обсуждая число звезд в звездных системах (не обязательно физических), он (1837a, с. 36 – 39) применил простые вероятностные соображения и (1837b/1929, с. 212) сформулировал свое мнение о подобном подходе:

До сих пор мы применяли два довода для установления физической связи в двойных звездах. Один из них состоял в низкой вероятности чисто визуальной связи, другой зависел от их общего собственного движения. Эти доводы, хоть и очень сильны, всё же являются косвенными[9].

Струве (1827, с. xxxvii – xxxix) действительно определял вероятности близкого расположения двух или трех звезд друг к другу, и, в частности, вероятность того, что третья звезда находится не далее заданного расстояния от двух близко расположенных друг к другу звезд.

8.10. Расстояние между двумя случайными точками на сфере. Его оценка родственна задаче Мичелла, и начало положили здесь **Даниил Бернулли** (Шейнин 1972/2007b, с. 119 – 120) и **Лаплас** (1812/1886, с. 261), см. также **Тодхантер** (1865, § 987) и Шейнин (1973a, с. 286 – 287). Допустив, что все возможные наклонения орбит планет равновероятны, Лаплас определял, случайно ли расположены эти орбиты друг относительно друга.

Рассмотрим два случайных больших круга на сфере. По Лапласу, вероятность расстоянию ξ ($\xi < 90°$) располагаться в интервале $[n; m]$ градусов равна

$$P(n \le \xi \le m) = (m - n)/90.$$

Курно (1843, § 148), однако, посчитал, что

$$P(\alpha \le \xi \le \alpha + d\alpha) = \varphi(\alpha) = k \sin\alpha$$

(k – коэффициент пропорциональности, а α – центральный угол, соответствующий расстоянию ξ). Пусть полюс одного из больших кругов находится в некоторой точке A, тогда полюс другого круга окажется в любой точке B малого круга, плоскость которого перпендикулярна радиусу сферы OA, и дуга $AB = \xi$. Длина окружности этого малого круга пропорциональна $\sin\alpha$, что и объясняет смысл утверждения **Курно**.

Наконец, **Ньюком** (1861a) заявил, что формула Лапласа неверна и предложил взамен соотношение

$$P = \cos n - \cos m,$$

т. е. вероятность, равную площади поверхности шарового слоя, образованного двумя соответствующими малыми кругами единичной сферы. Впоследствии Ньюком (1904, с. 13) заметил, что его формула означает, что cosα распределен равномерно на интервале [0°; 90°], что можно проверить, определив распределение случайной величины $\eta = \cos\xi$ при заданном распределении $\varphi(x) = \sin x$ величины ξ.

Сказанное выше заставляет вспомнить знаменитую задачу **Бертрана** (1888/1972, с. 4 – 5) о длине хорды данного круга. Не ссылаясь ни на кого, он повторил решения предыдущей задачи по Лапласу и Курно и разумно заявил, что выражение *случайно* следует уточнять, в частности (с. 7), при формулировке задачи Мичелла. Несколько соответствующих возможностей он указал на с. 170 – 171.

9. Уильям Гершель

Гершелю посвящен также п. 8.2, и он же упомянут в п. 6.3. Различаясь в то время только по величине, звезды представлялись ему элементами одной и той же (статистической) совокупности[10].

Здесь же укажем, что Гершель составил три каталога двойных звезд и обнаружил и систематизировал более 2500 новых туманностей и созвездий. Эта громадная работа безусловно имела серьезную статистическую составляющую.

9.1. Протяженность звездной системы. Именно Гершель начал изучать ее, и вот как он (1784, с. 162) впервые описал свои исследования:

> *Он* [метод исчерпывания] *состоит в регулярных подсчетах чисел звезд в десяти полях зрения* [телескопа], *расположенных весьма близко друг к другу. Складывая эти числа и отбрасывая в полученной сумме последнюю цифру, мы устанавливаем среднее содержание неба* [звезд в небе] *во всех его таким образом исследованных частях.*

Гершель (с. 159) также упомянул охваты (sweeps), объяснив этот термин в другом месте (1786, с. 261):

> *Я водил* [телескоп] *таким образом, чтобы он* […] *совершал как бы очень медленные колебания в 12 или 14° в одной и той же горизонтальной плоскости*[11] […]. *После каждого колебания я* […] *записывал всё, что пришлось увидеть.* [После этого] *я либо опускал, либо поднимал инструмент примерно на 8 или 10' и проделывал следующее колебание.* […] *И обычно я продолжал эту работу до 10, 20 или 30 колебаний* […] *и всё это вместе взятое называлось охватом.*

Колебания, видимо, состояли из отдельных черпков.

Возможно ли, что Гершель распределял эти черпки случайно? Или случайно распределял охваты по небу? Короче, не был ли его метод *исчерпывания неба* каким-либо вариантом выборочного исследования? Видимо, нет. Во-первых, Гершель (1784, с. 163;

1785, с. 223) собирался плотно охватить всё небо [его видимую часть] или по меньшей мере весь Млечный путь:

Было бы небезопасным начать применение этих […] *черпков,* […] *пока они не окажутся достаточно продолженными и не покроют все небо*[12].

Я теперь рассмотрел и исчерпал [Млечный путь] *почти в каждом направлении.*

Во-вторых, Гершель, кажется, лишь однажды применил зачаток выборочного метода[13], а по поводу собственно черпков он (1785, с. 227) указал, что "в [каждом] охвате неизменно строго придерживался закономерного распределения полей зрения снизу доверху"[14]. Он мог бы всё же случайным образом выбирать поле зрения для первого черпка некоторой серии, но ничего подобного не указал.

В третьих, много позже Гершель (1817, с. 575) заявил, что

Структура неба с определением действительного положения каждого небесного тела может быть точно установлена только, если каждому из них будет назначено положение в трех измерениях.

Упомянем два дополнительных обстоятельства (Гершель 1785, с. 227 и 246):

Там, где звезды оказывались расположенными необычно плотно, я подсчитывал [их число] *не более, чем в половине поля зрения, а иногда даже в его четверти*, –

и затем, конечно же, удваивал или учетверял это число.

Там, где звезды были расположены необычно плотно, или же их не хватало [по сравнению с обычными областями], *я заменял черпки другими формами исследования, как например, граничными черпками или черпками по расстоянию* (border-gage, distance-gage) *и т. д. Я еще найду случай объяснить и эти виды черпков, и способ их применения*[15].

Подобного объяснения мы не нашли.

Хорошо известно, что Гершель применил свои подсчеты звезд для установления расстояний до конечной (как он долгое время полагал) Вселенной[16]. Полагая, что звезды распределены равномерно, он вычислял кубические корни из чисел звезд, т. е. величины, пропорциональные расстояниям. Естественно предположить, что он менее точно устанавливал более далекие расстояния.

Со временем Гершель усомнился в равномерном распределении звезд (ср. п. 9.2), а затем перестал считать свой метод исчерпывания достаточно точным. Более того, он понял, что его телескоп не проникает до границ звездной системы, т. е. что его вычисления расстояний до них было просто ошибочными, см. Hoskin (1959) и **Струве** (1847). Последний (с. 39) привел слова Гершеля 1811 и 1817 гг. и заключил на с. 41:

> *Система Гершеля об устройстве Млечного пути, высказанная в 1785 г., обрушилась во всех частях благодаря дальнейшим исследованиям ее автора* […] *и сам Гершель ее полностью оставил.*

9.2. Пространственное распределение звезд. Гершель (1817, с. 577) предложил модель равномерного распределения звезд каждой величины ($i - 1$), $i = 3, 4, \dots, 8$, между концентрическими сферами i и ($i - 1$), см. Табл. 1.

Таблица 1. Модель пространственного распределения звезд (Гершель 1817, с. 577)

1	2	3	4	5	6
2	3	1	17	26	–9
3	5	2	57	98	–41
4	7	3	206	218	–12
5	9	4	454	386	68
6	11	5	1161	602	559
7	13	6	≥ 6103	866	≥ 5237
8	15	7	6146	1178	4968

Н*аименование столбцов*. 1. Номера шаровых колец (i). 2. Радиусы внешних сфер (r_i). 3. Величины звезд ($i - 1$). 4. Количества звезд по каталогу Боде. 5. Разности ($r_i^3 - r_{i-1}^3$). 6. Расхождения.

Примечания. 1. Радиус кольца (точнее, сферы) № 1 условно равен единице и оно включает только одну звезду (Солнце).

2. Столбец 5 не учитывает сомножителя 4π/3, что равносильно введению звездной плотности 3/4π.

Радиусы сфер Гершель выбрал в соответствии со своим ранее предположенным правилом (1782, с. 52): звезды второй, третьей, четвертой, … величины вдвое, втрое, вчетверо, … дальше звезд первой величины. Он хорошо представлял себе, что это правило было в лучшем случае верно лишь в среднем; более того, принятая модель нарушила его, поскольку допускала случайное распределение звезд в пределах соответствующего шарового кольца.

Гершель не попытался улучшить свою модель ни изменением радиусов сфер, ни введением иной звездной плотности (см. Прим. 2 к Табл. 1) или различных плотностей. Но подобные меры ухудшили бы согласованность модели с действительным распределением звезд первых четырех величин без существенного улучшения для последующих величин.

Гершель заметил, что его модель обеспечивала хорошее представление действительности для звезд первых четырех величин, взятых в целом[17] (сумма расхождений равнялась шести), однако для звезд тех же величин, рассматриваемых по отдельности, расхождения были слишком велики. Тем не менее, идею о случайном распределении звезд в пределах данного кольца молчаливо применил **Струве** (пп. 10.2 – 10.4).

9.3. Движение Солнечной системы. Гершель (1783, с. 120) впервые определил апекс движения Солнца:

> *Мы должны* […] *выделить общее для всех звезд* […] *в единое действительное движение Солнечной системы, поскольку оно будет соответствовать известным фактам, и придать каждой данной звезде лишь собственное движение, являющееся уклонением от общего закона, которому звезды, видимо, следуют*.

Таковы, он добавил, *правила философствования* (рассуждения в физике)[18].

Затем Гершель (с. 120 – 127) применил свой принцип к графическому определению собственных движений семи, а затем 12 звезд. Вернувшись к этой теме и исходя из своих собственных наблюдений, он (1805) образовал избыточную систему (неалгебраических) уравнений и решил ее методом последовательных приближений. На каждом шагу вычислений он графически определял апекс так, чтобы свести к минимуму сумму движений. После нескольких приближений его систему можно было бы (по крайней мере в принципе) линеаризировать, и поэтому его метод уравнивания можно сравнить с соответствующим методом **Бошковича** [III, п. 8.2], ср. замечание Гершеля о пригодности его модели распределения звезд в п. 9.2.

Далее, определяя скорость движения Солнца, Гершель (1806, с. 342) сопоставил среднее арифметическое и медиану:

> *Есть два способа осреднения движения звезд; один из них, как можно сказать, приводит к норме, второй – к рангу. Так, число, равное средней норме из* […] *2, 6, 13, 15, 17 и 19, будет 12* [будет средним арифметическим], *но то, которое должно обладать средним рангом между тремя наибольшими и тремя наименьшими*, […] *оказывается равным 14* [равным медиане].

Заметив, что разность между этими оценками невелика [всегда ли?], он (с. 358) заявил, что следует выбирать медиану. Снова, опять же без обоснования, но ссылаясь на *учение о случае*, он указал, что "какой-то средний ранг [какая-то порядковая статистика] должен (должна) оказаться наилучшим выбором".

В 1774 и 1781 гг. **Лаплас** (Шейнин 1977, §§ 2 и 3) рассматривал несколько возможных оценок подобного рода, в том числе и особого рода медиану, но Гершель на него не сослался, теперь же известно, что ни среднее арифметическое, ни медиану нельзя безоговорочно считать предпочтительнее.

9.4. Размер звезд. Гершель (1817, с. 579) указал, что, поскольку имеется более 14 тысяч звезд первых семи величин, то

Можно полагать, что любая звезда, случайно выбранная […] *из подобного их числа, вряд ли будет намного отличаться* [по своим размерам] *от некоторого общего среднего размера.*

Размеры звезд были в то время совершенно неизвестны, и никакие выводы не могли исходить из незнания. Первым, кто прямо так и заявил, был Эллис (1850/1863, с. 57), который также добавил: *Ex nihilo nihil.* Вообще же звезды, в отличие от серии доброкачественных наблюдений, в сильнейшей степени отличаются друг от друга по своим физическим характеристикам и потому чудовищно различны по размерам, никак не образуя единую статистическую совокупность. Только при этом невыполненном условии можно было бы оценивать по не известному в то время неравенству **Бьенеме – Чебышева** уклонения возможных значений случайной величины от своего среднего значения.

10. В. Я. Струве

Струве был одним из виднейших астрономов XIX в.; мы упоминаем его и в п. 8.9 и 11.3. Он же руководил прокладкой громадного градусного измерения, а Орлов (1953, с. 187), не обосновав, к сожалению, своего утверждения, указал, что Струве был одним из первых в России, читавшим лекции по теории вероятностей (в Дерпте, нынешнем Тарту, т. е. до 1839 г.).

В своем основном сочинении Струве (1847) описал исследования **Гершеля** и последующих астрономов[19], равно как и свою собственную работу (1846). Представляется, однако, что этот труд был написан несколько торопливо; следить за изложением затруднительно, и не все пояснения достаточны. Подчеркнем (примечание редактора перевода и переводчика на с. 124 *Этюдов*), что Струве был зачинателем звездной статистики. И всё-таки добавим: после Гершеля.

10.1. Полнота звездных каталогов. Сравнивая друг с другом три перекрывающихся каталога, Струве (1847, с. 56 – 62) оценивал полноту одного из них и устанавливал общую численность звезд первых восьми величин в исследованной им зоне. Погрешность своей оценки, вызванную неполнотой двух других каталогов, он не определял. Тот же вопрос Струве (1846, с. xxv – xxvii) рассматривал ранее, а в своих *Этюдах* (1847, с. 59 – 60) использовал эти прежние результаты для подсчета числа звезд девятой величины в той же зоне. Соответствующих исходных данных он не привел.

Пусть (Струве 1846) некоторая зона содержит z_1 звезд яркости μ_1 и z_2 звезд яркости μ_2 (z_1 известно, z_2 – нет); пусть, далее, зона разбита на 5 областей, которые исследовались 1, 2, …, 5 раз соответственно с наблюдением неизвестного числа звезд α_i яркости μ_1 и $x\alpha_i$ звезд яркости μ_2, так что $z_2 = xz_1$, где x также неизвестно. Наконец, Струве ввел коэффициенты полноты каталога для каждой из обеих яркостей и после неприятных вычислений определил x, а потому и z_2. Никаких вероятностных предпосылок или следствий своего исследования он не указал, хотя в принципе его результаты должны были относиться к ожидаемым величинам.

Струве снова сформулировал эту задачу в *Этюдах* (1847, прим. 71), но привел только ее окончательное решение. На свою прежнюю работу (1846) он не сослался и даже не указал, что различные области зоны исследовались неравное число раз. В лучшем случае читатели могли бы догадаться об этом.

10.2. Максимальные расстояния звезд. Основываясь на нестрогой, как он сам указал (1847, прим. 72), предпосылке равномерного пространственного распределения звезд, он вычислил их максимальные расстояния. Пусть некоторая область неба содержит a звезд первых пяти и b звезд первых шести величин. Тогда радиус сферы звезд шестой величины будет равен $\sqrt[3]{a/b}$, причем за единицу принят радиус сферы звезд шестой величины[20]. Как и **Гершель** (п. 9.2), он допускал случайное расположение звезд в пределах соответствующих сфер. Аналогичный подход можно заметить и в других местах *Этюдов* (пп. 10.3 и 10.4).

10.3. Пространственное распределение звезд. Исходя из данных **Гершеля**, Струве (1847, с. 64 – 65 и 75 – 76) указал некоторые закономерности этого распределения. На с. 76 – 77 он ввел эмпирическую функцию типа

$$z = \frac{a + b_1\cos 2\varphi + c_1\cos 4\varphi}{1 + b_2\cos 2\varphi + c_2\cos 4\varphi} \qquad (1)$$

для количества звезд, видимых в 20-футовый телескоп Гершеля под углом φ к основной плоскости звездной системы, но всё же представляется, что можно было бы ограничиться одним лишь числителем дроби.

Исходя из своей формулы, Струве (с. 77) также вывел формулу для относительной плотности звезд в зависимости от их расстояния от основной плоскости

$$\rho = \frac{1 + e_1x^2 + f_1x^4 + g_1x^6 + h_1x^8}{(1 + e_2x^2 + f_2x^4)^2},\ 0 \le x \le 0.8660 = \sin 60°$$

и Ерпылев (1958, с. 113) заметил, что интегральное уравнение, которое Струве численно решил при этом, было первым в своем роде, появившимся в звездной статистике.

Аналогично Струве рассмотрел звезды каталога Weisse (см. Струве 1846), сравнил полученные результаты и заявил, что его формулы оказались достаточно надежными. И всё же он, видимо, стремился представить лишь самую общую картину звездной системы. Более того, коэффициенты формулы (1) он вычислил по пяти точкам с абсциссами $\varphi = 0(15)60°$, т. е. не привлекая избыточных измерений. Впрочем, в те времена введение эмпирических формул еще не стало общепринятым[21].

10.4. Средние расстояния звезд. Струве (1847) кроме того заново вычислил максимальные и средние расстояния звезд с учетом звездной плотности. Как и раньше (1827, с. xxxiv – xxxv), он (с. 85) предположил, что среднее расстояние звезд определенной величины равно радиусу сферы, которая включала бы все более яркие звезды и половину звезд той же величины[22]. В пределах этой сферы звездные расстояния, стало быть, предполагались равномерно распределенными, а на отождествление среднего и медианы следовало указать.

Петерс (1849, с. 201) заметил, что основное предположение Струве об одном и том же расстоянии всех звезд данной яркости “может оказаться весьма ошибочным”, см. также наше Прим. 23 и п. 13.4. Петерс также доказал, что если для каждой звезды все яркости в некотором интервале [0; *a*] равновероятны, а распределение звезд “случайно” [равномерно], то среднее расстояние звезд *i*-й величины окажется пропорциональным кубическому корню из общего числа звезд всех величин до этой же величины включительно. Условия его предложения были весьма ограничительны, но попытка определить соотношение между яркостью звезды и ее расстоянием опередила свое время на несколько десятилетий.

10.5. Поглощение света. Отправляясь от статистических данных и основываясь на существенных предположениях о структуре звездного мира[23], Струве (1847, с. 87 – 98) попытался доказать, что, как указал Ольберс в 1823 г., межзвездное пространство поглощает свет. **Newcomb** (1861b, с. 377; 1901b, с. 412) заявил, что его попытка не была убедительной, однако сам факт поглощения света был в конце концов установлен.

10.6. Мнения об *Этюдах.* Энке (1848) опубликовал первый комментарий к этому труду. Он заявил, во-первых, что Струве не сформулировал своих предположений о структуре звездной системы и даже отрицал их введение. И, во-вторых, что фактически принятые допущения, а потому и его основные выводы неосновательны.

По меньшей мере некоторые предположения, например, лежащие в основе его формулы (1), Струве всё же указал, но вот его утверждение (с. 85), на которое сослался Энке, было неудачным:

> *Таблица* [относительных расстояний] *заключает всё то, что дало нам наше исследование по отношению к расстояниям звезд последовательных классов блеска; исследование, основанное только на наблюдении, без употребления какой-либо произвольной гипотезы.*

22 октября 1847 г. Шумахер (1863/1975, Bd. 5-3, p. 379) сообщил **Гауссу** о предстоящей публикации рецензии Энке: “Энке хочет показать, что всё построение Струве было карточным домиком, воздвигнутым на недостаточно обоснованном предположении”. Отвечая Шумахеру 27 октября (с. 384), и сославшись на эту рецензию (которую он, видимо, видел в рукописи), а затем 7 ноября (с. 393), Гаусс указал:

> *Вам известно, что я с давних пор вовсе не сторонник допущения в науку малообоснованных предположений.*

В общем, я был бы снисходителен к подобным играм воображения и не допускаю их лишь в научную астрономию. […] *К этому классу, однако, относятся также космогонические гипотезы Лапласа*.

К тому времени Гаусс, как он сообщил, ознакомился с *Этюдами* лишь бегло.

Во времена Струве параллаксы были измерены лишь для небольшого числа звезд (он сам измерил их для 28 звезд), измерение радиальных составляющих собственных движений звезд только начиналось, и всё еще было в ходу понятие среднего расстояния звезд данной величины, и поэтому сравнительно скоро стали известны новые существенные результаты. И всё же сочинение Струве успело оказать сильное влияние на астрономию XIX в., хотя качественные исследования распределения звезд продолжали появляться (Easton 1895) по меньшей мере до конца XIX в.

В конце века **Каптейн** (1893, с. 129) заметил, что “расположение звезд в пространстве [по Струве] не согласуется с действительным”, а еще позже Schouten (1918, с. 6) даже весьма односторонне заявил, что “метод и результаты [Струве] имеют лишь историческое значение”. Напротив, De Sitter (1932, с. 49) счел, что в *Этюдах* “материал обсуждается весьма тщательно, что является образцом здравого научного критического подхода”. Никаких возражений против допущений Струве он не привел и к тому же заметил (с. 50), что **Гершель** также не смог обойтись без предположений.

Баттен (1988, с. 152 – 153) опубликовал следующие выдержки из переписки Струве с Королевским астрономом и Президентом Королевского астрономического общества **Эйри**, хранящейся в Гриничской обсерватории.

1) Февраль 1848 г., Эйри

Я прочел возражения мистера ***Энке*** *и считаю их в особенной степени поверхностными. Ваше умелое исследование основано на предпосылке о том, что, хоть и имеются существенные неправильности распределения* [звезд, их] *общее распределение вполне можно выразить некоторым законом. Энке не думает ни о чем, кроме неправильностей. Я подозреваю, что параллаксы не могут быть столь определенными, как Вы предполагаете. Надеюсь, что Вы НЕ будете отвечать Энке.*

2) Апрель 1848 г., Струве

До сих пор я не отвечал Энке. Я вполне разделяю Ваше мнение, что он не понял или не захотел понимать моей книги и потому весьма склонен последовать Вашему совету и вовсе не отвечать [ему]. *Ваше сообщение Королевскому астрономическому обществу о моих* <u>*Этюдах*</u> *– это честь, оказанная мне Вашей доброжелательностью, и я искренне благодарю Вас за это. Надеюсь при первой возможности ознакомиться с сутью Вашего сообщения в годичном докладе.*

3) Декабрь 1848 г., Струве

Я должен особо поблагодарить Вас за любезную манеру, в которой Вы упомянули мои Этюды в годичном отчете Астрон. обществу, и я считаю его образцом (spesimen)[24], *который полностью освободил меня от ответа на поверхностные возражения Энке. Я собираюсь вновь* [?] *вернуться к общим законам распределения звезд в небе, имея в виду те важные данные, которые доставил* ***Дж. Гершель*** *своими наблюдениями на мысе Доброй Надежды* [1847]. *Но я не буду этим заниматься, пока не закончу некоторую серию исследований по указанной теме, используя наш большой телескоп, и тем самым закончу каталог зонных звезд* ***Бесселя*** *и Аргеландера.*

Баттен там же описывает и позднейшую и гораздо более мягкую критику *Этюдов* Дж. Гершелем.

11. Собственные движения звезд

В 1830 – 1840-е годы звездная астрономия начала изучать собственные движения звезд, в частности для проверки обнаруженного **Гершелем** движения Солнца (п. 9.4) и более точного его установления[25].

11.1. Аргеландер (1837, с. 581) принял во внимание 580 звезд с ощутимым собственным движением и, ввиду вычислительных трудностей, разбил их на три класса (с. 586) сообразно со скоростью их движения. Предположив, что расстояния звезд в общем обратно пропорциональны их движениям, он определил направление движения Солнца по отдельности для каждого из своих трех классов[26].

11.2. О. Струве (1842; 1844) определил собственные движения четырехсот звезд первых семи величин, см. Табл. 2.

Табл. 2. Собственные движения звезд
(О. Струве 1842, с. 54 – 56; 1844, с. 71 – 72)

1	2	3	4	5
1	1	36."1	43."2	–7."1
2	1.71	10.9	25.3	–14.4
3	2.57	11.0	16.8	–5.8
4	3.76	8.4	11.5	–3.1
5	5.44	6.7	8.0	–1.3
6	7.86	5.5	5.5	-
7	11.34	4.5	3.8	0.7

Наименования столбцов. 1. Звездные величины. 2. Относительные расстояния звезд. 3 – 4. Собственные движения звезд за 70 лет. 3. Наблюденные. 4. Вычисленные. 5. Расхождения.

Примечания. 1. О. Струве принял звездные расстояния по **В. Я. Струве** (1827, с. xxxv),т. е. пропорциональными кубическому корню из числа звезд, см. пп. 10.2 и 10.4.

2. Он предположил, что для самой многочисленной группы звезд 6-й величины вычисленные собственные движения совпадают с наблюденными. Для звезд остальных величин движения

установлены в соответствии с их расстояниями. Так, для звезд 5-й величины (столбец 4) 8.0 = 7.86 · 5.5 : 5.44.

3. Он частично объяснил крупные расхождения (столбец 5) неравномерным пространственным распределением звезд.

За указанную работу 1842 г. Королевское астрономическое общество присудило О. Струве золотую медаль, см. *Адрес* Эйри Годичному собранию Общества (*Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 19, pp. 271 – 283).

11.3. Дальнейшие результаты. Итак, О. Струве фактически утверждал, что в целом более яркие звезды обладают более значительным собственным движением. **Гумбольдт** (1850, с. 267), однако, сославшись на **Бесселя** и **Араго**, высказал противоположное мнение: “Более яркие звезды в основном движутся […] медленнее, чем звезды 5-й – 7-й величин”.

В примечании к своему переводу Гумбольдта Гусев (с. 555 – 557) указал на ошибочность этого мнения. Он сослался на **Струве** (см. ниже) и на свою собственную “почти законченную” работу, к которой он приступил в 1852 г. по совету того же Струве. Второй вариант своего исследования он действительно опубликовал тогда же (1857).

Струве (1852, с. clxxxii – clxxxv) изучил собственные движения 1662 звезд, см. Табл. 3, и определил скорость движения Солнца (с. clxxxvii), посчитав ее равной 0.5 – 0.8 среднего пекулярного движения 736 звезд, и Ерпылев (1958, с. 77) даже заявил, что исследование собственных движений звезд по существу начал Струве.

Табл. 3. Собственные движения звезд

(Струве 1852, с. clxxxii)

		α	δ
180	1 – 4.5(3.15)	4."64	4."58
206	4.5 – 7(5.66)	1.87	1.41
1276	> 7 (7.34)	1.12	0.82

Наименование столбцов. 1. Количество звезд. 2. Звездные величины; средние звездные величины. 3. Собственные движения за 30 лет.

Федоренко (1857, с. 84) заметил, что “по оценкам астрономов, средние движения звезд обратно пропорциональны их средним величинам”. Он (1858; 1865, с. 13) повторил это утверждение и в первом случае сослался на Mädler, *Dorpater Beobachtungen* за 1856 г. Федоренко (1865, с. 7) также вычислил собственное движение 2590 звезд величиной 4.5 – 9.25, но его утверждение было всё же неверным, и первым ему возразил Гусев (1857).

Конечно же, ни он, ни предшествовавшие авторы не могли учитывать радиальных составляющих собственных движений, но основным доводом против результатов Федоренко и других астрономов (см. выше и п. 11.2) относительно средних собственных движений звезд данной величины служит малый смысл самого этого понятия.

Петерс (1853, с. 50) попытался определить средний параллакс звезд второй величины, однако принял во внимание 35 звезд с величинами вплоть до 4.5, а затем вычислил параллаксы звезд с величинами 1(0.5)6. Такую экстраполяцию трудно обосновать. Впрочем, Струве (1847, с. 110) на основе его исследования установил в первом приближении движение Солнца в зависимости от радиуса земной орбиты.

11.4. Пекулярные движения звезд и нормальное распределение. Начиная с **Гершеля** (п. 9.4), астрономы полагали, что пекулярные движения звезд случайны и **Струве** (1842, с. 132 – 133) так и сказал: они “для нас как бы случайны”. **Эйри** (1860, с. 147) заметил, что вероятность различных направлений пекулярных движений данной звезды одна и та же, а Федоренко (1865, с. 8) даже заявил, также без доказательства, что собственные (пекулярные?) движения распределены “в соответствии с законом случайных ошибок”[27].

Много позже, в популярной лекции, **Каптейн** (1906a, с. 400) ввел “основное предположение”[28] о пекулярных движениях: они

> *Направлены случайно, т. е. не выказывают предпочтения никакому определенному направлению. Следовательно, сумма проекций* [этих движений] *на любую прямую* […] *должна равняться нулю*.

Он (с. 418) даже назвал распределение движений, удовлетворяющих его допущению, *нормальным*[29]. Позже Каптейн (1922, с. 310) предположил, что “движения, исправленные за движения Солнца и звездных потоков [см. ниже], с некоторым грубым приближением являются максвелловыми”.

Обозначим пекулярные движения через v_i, тогда их проекции на произвольную ось L будут равны $v_i \cos\varphi_i$, где φ_i – углы между направлениями движения и L. Для случайных ошибок классическая теория ошибок полагает, что при неограниченном возрастании числа наблюдений их среднее арифметическое следует считать “истинным значением” измеряемой константы (Шейнин 2007d). Иначе говоря, что среднее арифметическое случайных ошибок (но не их сумма!) стремится к нулю.

Ньюком (1902a, с. 166) ввел “простейшее” предварительное предположение: проекции собственного движения звезд на произвольную ось распределены по нормальному закону. Без доказательства он указал, что плотности распределения этих проекций на произвольную плоскость, равно как и сами эти движения, подчинены, как можно теперь сказать, законам, связанным с распределением хи-квадрат[30].

Таким образом, интуитивное мнение о случайности пекулярных движений оставалось в силе, а некоторые астрономы, никак не обосновывая своего мнения, считали его нормальным (или связанным с нормальным).

12. Малые планеты

Мы не останавливаемся на хорошо известной истории открытия первых малых планет, см., например, Шейнин (2007b, с. 145).

12.1. Ньюком посвятил несколько статей малым планетам. В первой из них он (1860a) указал по поводу теории их общего происхождения:

> *Другой метод* [испытания этой теории] *дает нам метод* [!] *вероятностей; будь астероиды достаточно многочисленны, его результаты могли бы, наверное, оказаться очень близкими к уверенности. Он основан на допущении, что исследуемое предположение приведет к высокой вероятности какого-либо общего соотношения между орбитами малых планет.*

Некоторые статьи Ньюкома слишком кратки и проверка его рассуждений затруднительна. Представляется, что, качественно изучая распределение долгот узлов, перигелиев, эксцентриситетов и наклонений первых 57 астероидов, он (1861c) интуитивно пришел к теореме Г. Вейля (1916) о равномерном распределении дробных частей последовательности $\{nx\}$ при иррациональных x и $n = 1, 2, \ldots$ (но не сформулировал ее).

В следующей статье Ньюком (1862) вывел законы распределения перигелиев и узлов орбит астероидов. Далее, он (1869) сравнил теоретические параметры орбит малых планет, вычисленные на основе равномерного распределения, с действительными, но, конечно же, не смог должным образом оценить свои результаты.

Много позже Ньюком (1900) вернулся к этой теме, но на этот раз изучал движение малых планет:

> *Кажется Кирквуд* [1888; впервые частично замечено им в 1857 г.] *впервые указал, что если расположить средние движения астероидов по их величине, то между значениями, которые находятся в простых соизмеримых отношениях со средним движением Юпитера, обнаружатся провалы.*

Ньюком выбрал $m = 354$ планет со средними движениями μ $(600'' \le \mu \le 1000'')$ и разделил их на $n = 40$ групп с движениями $\mu = 600 - 610, 610 - 620, \ldots, 990 - 1000''$. Приняв биномиальный закон распределения движений

$$\varphi(x) = \frac{m!}{x!(m-x)!}\left(\frac{1}{n}\right)^x\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-x}$$

(но не записав его), он заявил, что $n\varphi(x)$ является вероятным [средним] числом групп, имеющих в своем составе x планет. Качественно сравнив расхождения между полученным результатом и действительностью, Ньюком в основном согласился с Кирквудом и заключил, что полученные расхождения “не могли бы появиться в группе астероидов, когда-то распределенных равномерно”.

12.2. Пуанкаре (1896/1912, с. 163 – 168; перевод 1999 г., с. 134 – 138) оценил количество малых планет N, полагая, что известны лишь M из них и что ежегодно наблюдается n планет, из которых m было известно ранее. После некоторых рассуждений он получил

$$\mathrm{E}N \approx \frac{M}{m} n,$$

что можно было бы выписать сразу. Единственным интересным моментом в его исследовании было фактическое признание неизвестного числа астероидов случайной величиной, но вот средние значения таких величин он, как и Ньюком, неверно называл вероятными.

Не сославшись на **Ньюкома** (п. 12.1), Пуанкаре (Шейнин 1991, с. 157 – 159) доказал, что долготы узлов и перигелиев равномерно распределены по эклиптике. Он мог бы заменить свои сложные рассуждения, упомянув эргодическое свойство однородных цепей Маркова, но он вообще не ссылался не только на **Чебышева, Маркова** и **Ляпунова**, но и на **Лапласа** и **Пуассона**.

13. Статистический метод

Для **Гершеля** (п. 9.1) звезды (или по меньшей мере звезды одной и той же величины) были элементами единой статистической совокупности, а его модель пространственного распределения звезд (п. 9.2) оставляла место случайности. То же можно сказать о **Струве** (пп. 10.2 – 10.4), который кроме того применил статистический метод к решению специальных задач (пп. 10.1 и 10.5) и который предложил несколько более обоснованную модель пространственного распределения звезд.

Впрочем, почти все его выводы в *Этюдах* были детерминированными, и это относилось, например, к его исследованию полноты звездных каталогов, с чем мы не согласились (п. 10.1), а потому и к, видимо, методологическому подсчету максимальных расстояний звезд данной величины (п. 10.2). Струве не упоминал никаких законов распределения в вероятностном смысле, не было у него и намека ни на математические ожидания, ни, тем менее, на средние квадратические ошибки. Вероятностный подход начался с **Ньюкома** и **Каптейна** (пп. 13.1, 13.3), хотя статистические закономерности звездной систем начал изучать уже **Гершель**.

Первое упоминание о статистическом методе в астрономии мы находим у **Курно** (1843, § 145):

> *Если есть область естествознания, в которой можно было бы надеяться на успешное применение теории вероятностей, так это несомненно астрономия.* […]
>
> *Звездная статистика, если допустить такое сочетание слов, станет когда-нибудь образцом для других применений статистического познавания.*

Его книга носила частично популярный характер и появилась в *смутное время* между **Пуассоном** и **Чебышевым**. Она вряд ли заинтересовала астрономов, потому что он сам применил вероятностные рассуждения для изучения планетных и кометных орбит и не касался звездных систем, а звездная статистика (если не сам термин) к тому времени уже начала утверждаться (пп. 10 и 11).

К концу XIX в. появились общие утверждения о звездной статистике (Clerke 1890, с. 9): “Звезды в своих сочетаниях требуют исследования не меньше, чем сами по себе […]. Нужна статистика расстояний и движений тысяч, – нет, миллионов звезд”. Она (с. 311) сослалась на обширную статью Hill & Elkin (1884), которые еще более четко заявили (с. 191):

> *Ждущие ответа громадные космические вопросы состоят не столько в том, каков точный параллакс той или иной звезды, а каковы средние параллаксы звезд первой, второй, третьей и четвертой величин соответственно по сравнению со звездами меньших величин.* [И] *какая связь существует между параллаксом звезды и величиной и направлением ее собственного движения, или же можно доказать, что никакой связи не существует.*

В п. 11.3 мы уже косвенно указали, что звезды одной и той же величины нельзя считать единой совокупностью.

13.1. Ньюкома мы уже упоминали в пп. 6.2, 8.5, 8.6, 11.4, 12.1 и 12.2, и он еще встретится нам в п. 13.2 и 13.3. Он был одним из крупнейших американских ученых своего времени. Не имея никаких вычислительных средств кроме таблицы логарифмов, он исследовал более 62 тысяч наблюдений Солнца, Луны. Этот труд потребовал и проверки древних астрономических результатов, так что Ньюком оказался и историком астрономии; вопреки большинству комментаторов, он поверил в добросовестность Птолемея [IV, п. 3.9, № 9].

Помимо сказанного выше, Ньюком исследовал колебания широт, но, главное, проделал громадную работу по пересмотру всей системы астрономических постоянных. Сравнивая при этом наблюдения, выполненные на главных обсерваториях мира, ему пришлось позаботиться о назначении весов (иногда по отдельности учитывающих систематические и случайные ошибки), об отбраковке уклоняющихся наблюдений и о нестандартных методах уравнивания. Он ввел в качестве универсального (что было ошибочным) закона распределения ошибок наблюдений смесь нормальных законов с различными дисперсиями, появляющимися с некоторыми вероятностями. Мера точности таким образом оказалась дискретной случайной величиной, а параметры смеси приходилось выбирать субъективно. Позднее выяснилось, что предложенный обобщенный закон не был нормальным и что при введенных Ньюкомом упрощениях он приводил к принципу наибольшего правдоподобия.

Следуя **Гауссу**, Ньюком допускал приближенное составление нормальных уравнений, а после решения одной системы с 89 исходными уравнениями и пятью неизвестными вернулся к этим уравнениям и каким-то образом решил их заново, видимо имея в виду исключить систематические ошибки. Его переписка с **Пирсоном** (1904 – 1907 гг.) свидетельствует о его желании (неосуществившимся) овладеть зарождавшейся математической статистикой. Обо всем этом см. Шейнин (2002)[31].

13.2. Проктор (о котором см. также п. 8.7) отрицал статистический метод. Он (1872) составил атлас 324 тысяч звезд первых шести величин с указанием их собственного движения и заявил (с. 147 – 148), что открыл звездные потоки[32]. Вряд ли он имел возможность проверить это утверждение аналитически.

Проктор (1873b, с. 544) сравнил свой графический труд со статистическими исследованиями:

> *Я не могу представить себе никакого общего статистического метода, совершенно свободного от предположений. Статистику можно успешно применять в исследованиях, подсказанных другими, менее обманчивыми явлениями. Но мы можем начинать подсчеты только в соответствии с каким-либо заранее разработанным планом, который по необходимости должен будет быть основан на предположении.*
>
> *Так,* ***Струве*** *(1847, с. 62) подсчитал количества звезд, приходящиеся на различные часы прямого восхождения, но его результаты имели смысл только в предположении, что подобное распределение что-то означает.*

Да, статистические работы (и, в частности, при выборочных исследованиях) требуют изощренности[33], но без них естествознание не смогло обойтись. С другой стороны, допущения требуются и, например, при составлении дифференциального уравнения, описывающего какой-либо физический процесс.

Проктор (с. 545 и 547) гордо указал, что обошелся без всяких теорий о структуре звездной системы, – но создал ли он какую-либо ее модель? И кроме того, составление атласа должно было потребовать от него некоторых предварительных усилий, в том числе и статистических.

Наконец, Проктор (1873a) благоприятно, хотя и весьма косвенно, отозвался о выборочном методе, быть может не подозревая этого:

> *Большая точность в перечислениях вовсе не обязательна.* […]. *Требуется полный, но быстро осуществляемый обзор, так же относящийся к действительному картографированию звезд, как рекогносцировка участка местности относится к тригонометрической съемке.*

Тригонометрическая съемка – это всё-таки триангуляция, следовало сказать *относится к его картографированию*. В принципе же Проктор, стало быть, придерживался *количественного метода*, который особо проявился в медицине в 1825 – 1850 гг. (Шейнин 2007b, с. 51 – 57). Его суть действительно состояла в количественной характеристике параметров различных явлений (например, болезней) с минимальным применением вероятностных методов. Он же, однако, оказался крайне нужным в астрономии, например, для составления каталогов и ежегодников; его же фактически применял еще **Гершель** (п. 9.1), но сам по себе он был явно недостаточен.

13.3. Каптейн попытался статистически описать звездную систему как единое целое. В своих популярных докладах (1906a; 1909) он ярко изобразил звездную вселенную при помощи законов распределения параллаксов и пекулярных движений звезд, – тем самым считая эти величины случайными. Каптейн (1906a, с. 397) так пояснил свой подход:

> *Так же, как физик* […] *не может надеяться проследить за движением каждой данной молекулы* [газа], *но всё же в состоянии вывести важные следствия, как только установит среднюю скорость всех молекул и частость определенных уклонений отдельных скоростей от этой средней, – так* […] *и наша главная надежда будет заключаться в вычислении средних и частот.*

Он мог бы добавить, что ни физик, ни даже (иногда) астроном не нуждается в изучении изолированных элементов своих систем. **Ньюком** (1902b, с. 302) верно оценил тогдашнее положение:

> *В последнее время развивается то, что можно назвать новой отраслью астрономической науки, которая стремится к единству структуры по всей звездной сфере. Это то, что мы называем наукой звездной статистики.* […] *В области звездной статистики миллионы звезд упорядочиваются так, будто каждая из них в отдельности означает не больше, чем один житель Китая в масштабе социолога. Можно сказать, что статистика звезд началась с гершелевских черпков неба.*[…] *Эта дисциплина впервые проявилась как безграничное поле для исследования, когда Каптейн в 1893 г. представил статью в Амстердамскую академию наук.*

И вот его вывод (с. 303): "Из результатов Каптейна следует, что мы можем описывать [известную в то время] вселенную как единый объект […]."

Каптейн продолжал свои исследования еще добрых 12 лет и одним из его важных достижений (1906b) стал составленный им план выборочного изучения звездного неба. Вот как он (с. 14) описал свой замысел:

> *Все спрошенные мной астрономы согласны с условием равномерного распределения доброй доли* [исследуемых] *участков, однако некоторые хотели бы полностью ограничиться этим, поскольку только такой план, как можно ожидать, ознакомит нас с общими законами, управляющими структурой звездной системы, притом эти законы необходимо установить до изучения уклонений от правила. Другие утверждали, что подобный образ действий исключает* […] *как раз наиболее интересную часть неба.*

Каптейн (с. 67) опубликовал и письмо, полученное им от одного из братьев **Пикеринг** в 1904 г., автор которого заявил:

Как при нанесении горизонталей на [топографическую] *карту, мы могли бы определить отметки точек в вершинах квадратов со стороной в 100м, но мы должны были бы установить также отметки вершины каждого холма, дна каждого озера* […] *и других особых точек.*

Каптейн не сослался на выборочные исследования населения, которые начали проводиться в начале XX в., но характеристики слабых звезд в настоящее время устанавливаются в основном на протяжении некоторых равномерно распределенных площадей и дополнительно в особо интересных местах, т. е. по схеме расслоенной выборки, – как бы и в вершинах квадратов, и в особых точках.

Каптейн (1904) также опубликовал брошюру о приложении асимметричных распределений в биологии, в которой критиковал пирсонову теорию этих распределений за то, что она не затронула связи между введенными им кривыми и действием случайных причин. Там же он пояснил действие центральной предельной теоремы, но только качественно и не сослался ни на **Лапласа**, ни на **Пуассона** или **Чебышева**, и создается впечатление, что он не был достаточно хорошо знаком с теорией вероятностей. Последовала дискуссия с Пирсоном (Пирсон 1905; Каптейн 1906с, с. 216), на которой мы уже не останавливаемся.

Мы не рассматриваемым позднейших работ Зеелигера, о которых см., например, Пауль (1993).

13.3.1. Коэффициент корреляции. Каптейн (1912) не был удовлетворен статистическим коэффициентом корреляции[34], который начали применять, например, биологи, и количественно оценил связь между двумя функциями, зависящими от частично совпадающих аргументов, – результатов наблюдения с соответствующими погрешностями α_i, β_i, γ_i, подчиняющимися нормальному закону.

Сославшись на Браве (1846) и вряд ли справедливо назвав его зачинателем теории корреляции[35], Каптейн вывел двумерное распределение погрешностей исследуемых функций

$$\varphi(a_1; a_2; \dots a_k; b_1; b_2; \dots), \psi(a_1; a_2; \dots a_k; c_1; c_2; \dots).$$

Ограничившись первыми членами разложений функций в степенные ряды, он получил формулы

$$d\varphi \approx G_1\alpha_1 + G_2\alpha_2 + \dots + G_k\alpha_k + B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + \dots,$$
$$d\psi \approx H_1\alpha_1 + H_2\alpha_2 + \dots + H_k\alpha_k + C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 + \dots,$$

правые части которых также оказались нормально распределенными.

В простейшем случае введенный им коэффициент (нормальной) корреляции оказался равным отношению числа общих аргументов к числу всех аргументов обеих функций, что Каптейн счел весьма интересным. Его нововведение, видимо, осталось незамеченным, тем не менее нам хорошо известно, что именно по указанному отношению аргументов геодезисты интуитивно оценивали меру зависимости двух функций. Пример: если две цепи триангуляции из 14 треугольников каждая имеют 2 общих треугольника, то мера взаимозависимости этих цепей равна 2/14 = 1/7 (хотя и не 2/28).

Сошлись Каптейн на **Гаусса**, его статью уж наверное приметили бы. И **Лаплас** (Шейнин 1977, с. 11), и Гаусс (1809, § 175; 1823, § 15) по нескольку раз указывали, что наблюдения должны быть независимыми, и еще **Муавр** (Шейнин 2005, с. 66) упомянул независимость событий в связи с теоремой умножения вероятностей. Но именно Гаусс уточнил свое мнение.

Он (1823, § 18) указал, что если одно и то же наблюдение использовано для составления двух функций нескольких наблюдений каждая, то ошибки этих функций "не будут полностью независимы одна от другой". Гаусс (1828, § 22) также заметил, правда, косвенно, что излишние условные уравнения (связывающие наблюдения) следует исключать [в противном же случае полученные из них нормальные уравнения окажутся линейно зависимыми]. Там же (§ 14) Гаусс подошел к введению линейной зависимости: если величины ξ, η, ζ зависимы, а α, β, γ – "некоторые определенные числа", то

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \equiv 0.$$

Обратное предложение определило бы линейную зависимость[36].

Укажем (теорема **Стьюдента – Фишера**), что при нормальном распределении среднее арифметическое и дисперсия независимы, хотя обе эти статистики определяются из одних и тех же наблюдений.

13.4. Пирсон. В начале XX в. он без особого успеха пытался внести теорию корреляции в астрономию. Он представил статью Gibson (1906), написанную в этом направлении, а затем (1908) опубликовал совместную статью с ней. Там, на с. 415, авторы указали, что Гибсон впервые применила современные статистические методы для установления численного соотношения между различными параметрами звезд. Цель нынешней статьи они видели в выводе дальнейших подобных соотношений и в рассмотрении некоторых из прежних на основе более обширных материалов.

Там же (с. 447 – 448) они добавили, что имели в виду "указать направление, следуя по которому можно выявить более тесные соотношения [между параметрами звезд]". Статья Гибсон (1906) оказалась предметом дискуссии между Пирсоном и астрономом A. H. Hinks. Пирсон (1907, с. 517 – 518) заявил, что

> *Астрономы изрядно виновны в мышлении по порочному кругу. Они начинают с предположения о том, что величины* [звезд] *очень тесно связаны с параллаксами, а когда статистик устанавливает, что* […] *параллаксы не выказывают непрерывного соотношения с величинами, они обращают свои доводы и говорят: "Да, но мы выбрали наши звезды потому, что они обладают существенным собственным движением". Они таким образом совершенно*

скрывают, что фундаментальное предположение о том, что более яркие звезды расположены намного ближе, еще ожидает статистического доказательства. […]

Я бы спросил, не могут ли масса, химический состав и история жизни звезды, поскольку это устанавливается спектроскопически, быть намного более тесно связаны с величиной, чем только ее расстояние?

При всем том, Пирсон не был достаточно знаком с астрономической литературой; он, например, не указал, что астрономы уже давно усомнились в связи между расстояниями и величинами звезд, см. п. 10.4 и Прим. 53.

Продолжая дискуссию, Пирсон (с. 613 – 615) сообщил о своих отношениях со специалистами других отраслей науки:

Из общения с биологами, краниологами, метеорологами и врачами (которые теперь иногда посещают биометриков по ночам!), что первое введение современных статистических методов в установившуюся науку несведущие встречают характерным презрением. Но я дожил до того, что вижу, как многие из них молчаливо восприняли те самые методы, которые они вначале осуждали.

С 1908 по 1910 г. Пирсон опубликовал шесть совместных статей в астрономических журналах *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* и *Observatory*. Две из них были написаны в ответ на критику (Plummer 1909a; 1909b). Plummer (1909a, с. 349) указал, что астрономы “наверняка не прельстятся современными методами статистики, если из их результатов нельзя будет вывести никаких полезных следствий”.

Во второй статье он (с. 5) усомнился в выводах, достигаемых статистиками:

Дают ли они новые и полезные сведения, которые в противном случае ускользнули бы от нас? […] *А метод рассуждения,– обеспечивает ли он им строгую достоверность, которую нельзя достичь без них?*

Белл исследовала связь между цветом звезд и их спектральными классами (1908) и величинами (1909). В первой статье она заметила, что “корреляция является лишь одной и не очень длинной главой в полной теории ассоциации. Более полезной часто окажется глава о сопряженности признаков”. Она (1909) возможно одной из первых применила критерий согласия Пирсона.

Пирсон (1910) вывел правило для проверки равномерности пространственного распределения звезд. Пусть некоторая совокупность звезд имеет величины до *m* включительно. Тогда (с. 61) при равномерном распределении звезд стандартное уклонение величины не будет зависеть от *m*, а если равномерность всё же имеет место, то либо звездные расстояния связаны со светимостью, либо существует поглощение света. Последняя оговорка оказалась излишней (поглощение действительно существует, хотя и было доказано много позже (Прим. 23), и правило Пирсона поэтому представляется бесполезным.

Пирсон и его соавторы часто применяли негауссовы плотности, а в одном случае (Пирсон и Белл 1910, с. 534) – кривую типа VII. Можно пожалеть, что их статья по меньшей мере вначале не была замечена, а указание о возможных новых направлениях [в самой астрономии] (Гибсон и Пирсон, см. выше), явно осталось невостребованным.

Каптейн, например, не поддерживал Пирсона, а в одном случае (конец п. 13.3.1) поспорил с ним. В то же время коэффициент корреляции Каптейна (п. 13.3.1) явно не годился для изучения связи между параметрами звезд. И, наконец, после 1910 г. Пирсон совсем оставил астрономию; у него, как известно, и так всегда было слишком много работы.

Признательность. Проф. Г. М. Идлис просмотрел рукопись исходного английского варианта этой статьи и высказал дельные замечания. Прим. 21 написано по мысли М. В. Чирикова, который также заметил, что история звездной статистики иллюстрирует формирование идей теории распознавания образов.

Примечания

1. Он начал публиковать свои астрономические и геофизические наблюдения в 1830 г., а всего, включая посвященные физике и геологии, он оставил 109 статей, см. многотомный *Catalogue of Scientific Literature*. Royal Society.

2. Вот общий подход Швабе (там же) к исследованиям: “Я старался действовать как можно беспристрастнее и не допускать влияния каких-либо предположений”.

3. Наблюдения в этом источнике собраны в хронологическом порядке; относящиеся к 1856 г. находятся на с. 27. Bray & Loughhead (1964, § 1.4) безосновательно утверждают, что Вольф ввел *относительное число* пятен в 1848 г.

4. Sabine (1852, с. 121), см. также Clerke (1885/1893, с. 158), был, видимо, первым, обратившим внимание на

> *То поразительнейшее обстоятельство, что период и эпохи минимума и максимума* [… количества солнечных пятен], *как установил Швабе, точно совпадают с величинами, которые мы указали для* [вариаций магнитного склонения].

5. Он добавил: “Эти поразительные соответствия […], не оправдывают ли они всецело заглавия моей статьи, которая в то же время воздает почесть работам месье Вольфа и памяти Донати”.

Донати вспоминается в основном в связи с кометой, названной в его честь. Трудно сказать, почему автор упомянул его, но во всяком случае Донати опубликовал несколько работ по метеорологии.

6. Данные, относящиеся к каждому из указанных явлений, он по отдельности уравнял по методу наименьших квадратов.

7. Заметим, что Мичелл применил геометрические вероятности, которые встретились еще в рукописи **Ньютона**, но окончательно и “официально” в теорию вероятностей их внес **Бюффон** (1777), см. Шейнин (2005, с. 44 – 45).

8. Ньюком (1904, с. 13) указал, что “случайное распределение [звезд] будет всегда практически более или менее отличаться от равномерного”. Здесь же он применил выражение “чисто случайное распределение”, и можно вспомнить высказывание **Буля** (1851/1952, с. 256), обусловленное задачей Мичелла:

> *Случайное распределение, т. е. распределение, соответствующее закону или методу, о последствиях которого мы должны быть в полном неведении. Таким образом, положение звезды в одной или другой точке неба окажется для нас равновероятным. Всякое иное распределение мы позволим себе назвать указующим.*

Мы бы сказали – информативным.

9. В письме 1845 г. **Гаусс** (Biermann 1965) высказал сходную мысль о вероятностном доказательстве суточного вращения Земли.

10. Ср. De Sitter (1932, с. 35): “**Гершель** первым пришел к мысли о том, что звезды образуют систему с некоторой структурой”.

11. Впоследствии, как **Гершель** указал там же, он начал применять охваты “с вертикальным движением”.

12. По меньшей мере один раз **Гершель** (1800, с. 51) применил перекрывающиеся охваты.

13. На одном участке Млечного пути размером 30 кв. градусов блеск “восхитительного множества” звезд помешал **Гершелю** (1784, с. 158) сосчитать их. Он поэтому сосчитал звезды лишь в шести полях зрения диаметром $d = 15'$, выбранных “случайно”, и принял среднее число звезд в качестве оценки для всего участка, который, как он заявил, “вряд ли содержал менее пятидесяти тысяч звезд”.

Его сосчитанными числами были 110, 60, 70, 90, 70 и 74 (среднее из них равнялось 79). Тогда

$$\frac{30\ \text{квадратных градусов}}{\pi d^2/4} = 661.2;\ 79 \cdot 611.2 = 48\ 245.$$

Не принимая в расчет явных округлений и полагая числа безошибочными, мы получим среднюю квадратическую ошибку среднего, равную 7.3, которую следует умножить на 611.2. Произведение 4462 подсказывает, что исследуемый участок вряд ли содержал менее *сорока* тысяч звезд.

Гершель дополнительно подсчитал число звезд “в самом малочисленном месте” [поле зрения], которое содержало 63 звезды. Умножая и это число на 611.2, получим произведение 38 500, которого Гершель не указал.

14. Ср. мнение **Дж. Гершеля** (1847, с. 374): При выборе точек для черпков “было желательно обеспечить полную беспристрастность, а она могла быть достигнута только, будь они выбраны заранее”. Мнение **У. Гершеля**, видимо, было примерно таким же.

15. Там же **Гершель** (с. 223) ярко обрисовал соотношение между фактами и предположениями в астрономии (а фактически – вообще в экспериментальной науке):

> *Если мы предадимся причудливому воображению и начнем строить воздушные замки, то не должны будем удивляться существенному отступлению от пути истины и природы.* […] *С другой стороны, если мы станем накапливать наблюдения не пытаясь вывести из них не только достоверных, но даже предположительных заключений, то согрешим против той самой цели, для которой только и должны производиться наблюдения. Я постараюсь придерживаться надлежащего среднего, но уж если сверну в сторону, то не хотел бы впасть в последнюю ошибку.*

Уместно здесь же упомянуть его общую мысль (1785, с. 225):

> *Мы, наверное, должны воспринимать* […] *разрушение звезд, иногда происходящее в течение тысяч веков, как именно то средство, при помощи которого сохраняется и обновляется целое.*

Гершель неоднократно упоминал внутривидовые вариации, и можно добавить, что известный ботаник **Адансон** заявил в 1772 г. (Шейнин 1980, с. 334), что уродства и вариации “несомненно необходимы для равновесия вещей”.

16. Удивляться не следует. Вот слова **Ньюкома** (1897, с. 8): “Собранные данные наводят на мысль, что мы действительно видим границу нашей вселенной” [нашей галактики? Тоже неосновательно].

17. Гершель таким образом применил основное условие **Бошковича** для уравнивания косвенных наблюдений [III, п. 8.2]. Ср. также уравнивание движений звезд в п. 9.4.

18. Ср. Правило философствования № 1 **Ньютона** (1687/1936, с. 502): “Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений”. Много позже **Гершель** (1805, с. 324) высказался в том же смысле.

19. Струве (с. 107 – 113) сообщил также о фундаментальном, но еще не законченном исследовании параллаксов звезд (Петерс 1853) и уделил особое внимание движению Солнца.

20. В те времена было принято вычислять с заведомо избыточным числом значащих цифр (конец п. 3.5) и **Струве** выписал $r = 0.7126$.

21. Эпициклы, присоединяемые один за другим к птолемеевой системе мира, были равносильны введению эмпирических поправочных членов в теорию.

22. Каптейн (1909, с. 310) заключил, что понятие среднего расстояния звезд данной величины не имеет смысла, **Струве** же поместил все звезды 5-й величины (почему только 5-й?) на одном и том же расстоянии “не имея никаких других данных”. Второе замечание неточно: следовало сказать Струве установил для этих звезд среднее расстояние.

Не сославшись на Струве, Клейбер (1890) определил среднее расстояние (r_0) звезд, “случайно” расположенных внутри сферы Ω радиуса R:

$$r_0 = \iiint\limits_{\Omega} r dv : \iiint\limits_{\Omega} dv = \frac{3}{4}R.$$

Он применил свою формулу для оценки среднего параллакса звезд.

23. Струве (с. 91) полагал, что эти предположения вряд ли могли быть ошибочны (“не вижу никакого другого объяснения”). На с. 217 редактор перевода и переводчик указали, что поглощение света было доказано лишь в 1930 г. и даже позже.

24. Ошибочное правописание позволяет утверждать, что **Струве** (как, разумеется, и **Эйри**) написал свои письма по-английски.

25. Астрономы не могли не понимать существенного научного значения исследований движения Солнца. **Струве** описывал достижения своих современников именно с этой точки зрения, см. Прим. 19. Он сам (1852) определял скорость движения Солнца при установлении собственного движения звезд, см. п. 10.3.

26. Ср. замечание **Дж. Гершеля** (1850, с. 585):

Имеется только две возможности: Либо подразделить расстояния звезд по их величинам или видимой яркости и исследовать каждый класс по отдельности и независимо друг от друга; […] *либо подразделить их по наблюденным видимым собственным движениям в предположении, что те звезды, которые, как представляется, движутся быстрее всего, действительно расположены ближе всех других.*

27. Намного раньше О. Струве (1842, с. 51) сформулировал подобное утверждение более четко:

До сих пор значение постоянной прецессии выводилось в предположении, что в целом собственные движения звезд входят в вычисления как случайные ошибки наблюдения и потому их влияние при достаточно большом числе звезд должно было бы уничтожаться.

См. также ниже. Однако, продолжал автор, это предположение все ещё, – т. е. после исследования Аргеландера (1837), – оставалось в силе, хотя лишь в отношении пекулярных движений.

28. Вполне в духе **Лапласа** (Шейнин 1977, с. 5) он (с. 412) заметил, что это “временное” предположение следует вводить “при отсутствии лучшего”.

29. В той же лекции **Каптейн** (с. 416, 418, 419) сообщил, что графическое исследование пекулярных движений звезд при помощи звездных карт и небесного глобуса привело его к мысли о существовании двух звездных потоков. Это предположение теперь оставлено. О термине *нормальный* см. Прим. 30.

30. **Ньюком** почему-то не сослался на свое исследование (1896), в котором он, в отличие от Федоренко и **Каптейна**, заметил существенные расхождения между распределением вековых собственных движений звезд по склонению и нормальным законом. Он при этом применил сравнительно новые термины *нормальный закон* (или *нормальная кривая*) ошибок. Kruskal (1978, с. 99) указал, что второй из этих терминов появился впервые у **Пирса** (1873, с. 206), затем у **Пирсона** (1894, с. 72).

31. Мимоходом укажем, что **Гельмерт** завершил построение классической теории ошибок и внес существенный вклад в уравнивание триангуляции, тем самым – и в обработку градусных измерений, см. Приложение к данной книге, Реферат VI. Об истории теории ошибок (и. в частности, о Гельмерте) см. также Шейнин (2007c).

32. Проктор (1869) сообщил об этом намного раньше **Каптейна** (см. Прим. 29). Он (1872, с. 147) также заключил, что “среднее собственное движение более ярких звезд едва равно этому движению звезд трех меньших величин”, см. п. 9.3. Проктор активно популяризировал науку, и, в частности, опубликовал большое число статей о теории вероятностей и ее приложениях (1882). В то же время его знание этой дисциплины было поверхностным. Так, исследуя разность между числами северных и южных “ярких” звезд, он (1871) непосредственно подсчитал суммы соответствующих биномиальных коэффициентов разложения $(1 + 1)^n$, где n было общим числом этих звезд. Нормальной аппроксимации биномиального распределения он не применил.

Ньюком опубликовал рецензии на некоторые сочинения Проктора и отметил, что тот был умелым математиком, склонным, однако, к ошибкам и подчас поверхностным автором, а в письме 1871 г. назвал одно из таких сочинений смехотворным (Шейнин 2002, с. 143 и 163, Прим. 7).

33. Ср. **Ньюком** (1902b, с. 303): “Все научные выводы из статистических данных требуют критического исследования того основания, на котором они [?] покоятся”.

34. Напомним о количественном корреляционном исследовании Л. Зейделя 1865 – 1866 гг. (Шейнин 2007b, с. 83 – 85).

35. Не упомянув **Каптейна, Пирсон** (1920) оспорил это мнение (которого он сам ранее придерживался), указав, что Браве не представлял себе сути корреляции.

36. В статье, посвященной работе вдовьей кассе, **Гаусс** (рукопись 1845 г./1873) назвал независимость “важным условием”, которое “иногда очень трудно проверить и которое требует глубокого проникновения в суть задачи; если же [о его выполнении] имеется сомнение, то вес результата нельзя будет обосновать”.

Гаусс (1826/1957, с. 147; 1828, § 3) высказал и иное соображение: независимые наблюдения, если они связаны условиями (например, углы треугольника должны в сумме составлять 180° плюс сфероидический избыток), следует считать зависимыми.

Библиография

Сокращения
AN = *Astron. Nachr.*
MNRAS = *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*
Phil. Mag. = *London, Edinb. and Dublin Phil. Mag.*

В. Я. Струве, F. G. W. Struve

(1827), *Catalogus novus*. Dorpati [Tartu].

(1837a), *Über Doppelsterne etc*. Petersburg.

(1837b, p. cxxi), On the motion of double stars. В книге Shapley H., Howarth H. E. (1929), *Source-Book in Astronomy*. New York – London, pp. 212 – 215. Из *Stellarum duplicium et multiplicium, etc*. Petropolis, 1837. Названия этого латинского источника и (1837a) не совпадают.

(1837c), Über die eigne Bewegung des Sonnensystems … von F. Argelander. *Bull. Scient. Acad. Imp. Sci. Petropol*., t. 2, pp. 113 – 123, 129 – 137.

(1842), Рецензия на O. Struve (1842). Там же, t. 10, No. 9 (225), pp. 129 – 139.

(1846), Praefatio editoris к книге Weisse M. *Positiones mediae stellarum fixarum*. Petersburg.

(1847, франц.), *Этюды звездной астрономии*. Б. м., 1953. Перевод М. С. Эйгенсона под ред. А. А. Михайлова.

(1852), *Stellarum fixarum* […] *positiones mediae etc*. Petersburg.

W. Herschel

Указаны перепечатки статей в *Scientific Papers*, vols 1 – 2. London, 1912, 2003.

(1782), On the parallax of the fixed stars. 1, pp. 39 – 57.

(1783), On the proper motion of the Sun, etc. 1, pp. 108 – 130.

(1784), Account of some observations, etc. 1, 157 – 166.

(1785), On the construction of the heavens. 1, pp. 223 – 259.

(1786), Catalogue of one thousand new nebulae, etc. 1, pp. 260 – 303.

(1800), On the power of penetrating into space by telescopes. 2, pp. 31 – 52.

(1801), Observations tending to investigate the nature of the Sun, etc. 2, pp. 147 – 180.

(1802), Catalogue of 500 new nebulae, etc. 2, pp. 199 – 237.

(1805), On the direction and motion of the Sun, etc. 2, pp. 317 – 331.

(1806), On the quantity and velocity of the solar motion. 2, pp. 338 – 359.

(1817), Astronomical observations and experiments tending to investigate the local arrangement of celestial bodies in space, etc. 2, pp. 575 – 591.

J. C. Kapteyn

(1893), Over de verdeeling van de sterren in de ruimte. *Versl. Zitt. Wiss. Natuurkund. Afd. Akad. Wetenschappen Amsterdam* 1892 – 1893, pp. 125 – 140.

(1904), *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics.* Groningen. Второе издание в соавторстве с M. J. van Uven (1916).

(1906a), Statistical methods in stellar astronomy. [Repts] *Intern. Congr. Arts and Sci. St. Louis – Boston 1904*. Б. м., vol. 4, pp. 396 – 425.

(1906b), *Plan of Selected Areas*. Groningen.

(1906c), Reply to Prof. Pearson's criticisms. *Rec. Trav. Botaniques Néerl.*, vol. 2, pp. 216 – 222.

(1909), Recent researches in the structure of the universe. *Annual Rept Smithsonian Instn* за 1908, pp. 301 – 319.

(1911), *Report on the Progress of the Plan of Selected Areas*. Groningen.

(1912), Definition of the correlation-coefficient. MNRAS, vol. 72, pp. 518 – 525.

(1922), First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system. *Astrophys. J.*, vol. 55, pp. 302 – 328.

S. Newcomb

(1859 – 1861), Notes on the theory of probability. *Math. Monthly*, vol. 1, pp. 136 – 139, 233 – 235, 331 – 335; vol. 2, pp. 134 – 140, 272 – 275; vol. 3, pp. 119 – 125, 343 – 349.

(1860a), [Abstract of a] paper on the secular variation and mutual relations of the orbits of the asteroids. *Proc. Amer. Acad. Arts and Sciences*, vol. 4 за 1857 – 1860, pp. 417 – 418.

(1860b), [Discussion of the principles of probability theory.] Там же, с. 433 – 440.

(1861a), Solution of problem. *Math. Monthly*, vol. 3, pp. 68 – 69.

(1861b), Modern theoretical astronomy. *North Amer. Rev.*, vol. 93, pp. 367 – 390.

(1861c), On the secular variations and mutual relations of the orbits of the asteroids. *Mem. Amer. Acad. Arts and Sci.* New ser., vol. 8, pt. 1, pp. 123 – 152.

(1862), Determination of the law of distribution of the nodes and perihelia of the small planets. AN, Bd. 58, No. 1382, pp. 210 – 220.

(1869), Comparison of the actual and probable distribution in longitude of the nodes and perihelia of 105 small planets. Там же, Bd. 73, p. 287.

(1896), On the solar motion as a gauge of stellar distributions. *Astron. J.*, vol. 17, No. 6 (390), pp. 41 – 44.

(1897), *The Problems of Astronomy*. Univ. Pennsylvania.

(1900), On the distribution of the mean motions of the minor planets. *Astron. J.*, vol. 20, pp. 165 – 166.

(1901a), On the period of the solar spots. *Astrophys. J.*, vol. 13, pp. 1 – 14.

(1901b), the problem of the Universe. *Intern. Monthly*, vol. 5, pp. 395 – 417.

(1902a), On the statistical relations among the parallaxes and the proper motions of the stars. *Astron. J.*, vol. 22, pp. 165 – 169.

(1902b), The Universe as an organism. В книге автора *Sidelights on Astronomy*. New York – London, pp. 300 – 311. Также *Science*, new ser., vol. 17, 1903, pp. 121 – 129.

(1904), On the Position of the Galactic. Carnegie Instn of Washington, Publ. No. 10.

R. A. Proctor

(1869), Preliminary paper on certain drifting motions of the stars. *Proc. Roy. Soc.*, vol. 18, No. 116, pp. 169 – 171. Также *Phil. Mag.*, vol. 39, No. 262, 1870, pp. 381 – 383.

(1871), The laws according to which the stars […] are distributed over the heavens. MNRAS, vol. 31, No. 1, pp. 29 – 32.

(1872), On star-grouping, etc. *Proc. Roy. Instn Gr. Brit.*, vol. 6, pp. 143 – 152.

(1873a), Further notes on star-gauging, etc. MNRAS, vol. 33, No. 9, pp. 535 – 536.

(1873b), Statement of views respecting the sidereal universe. Там же, pp. 539 – 552.

(1874), *The Universe, etc*. London.

(1882), *Familiar Science Studies*. London. Перепечатка популярных статей автора.

Другие авторы

Гусев М., Gussew M. (1857), Beitrag zur Untersuchung der eigenen Bewegung der Fixsterne. AN, Bd. 45, No. 1068, pp. 177 – 182.

Ерпылев Н. П. (1958), Развитие звездной статистики в России в XIX в. *Историко-астрономич. исследования*, т. 4, с. 13 – 249.

Клейбер И., Kleiber J. (1887), On “random scattering” of points on a surface. *Phil. Mag.*, vol. 24, No. 150, pp. 439 – 445.

--- (1890), Über die Zahl der Sterne mit messbaren Parallaxen. AN, Bd. 124, No. 2955, pp. 37 – 40.

Орлов Б. А. (1953), В. Я. Струве. В книге Струве (1847/1953, с. 171 – 208).

Федоренко И. И., Fedorenko J. (1857), Über die eigene Bewegung der Fixsterne. AN, Bd. 45, No. 1062, pp. 81 – 86.

--- (1858), Aus einem Schreiben […] an den Herausgeber. Там же, Bd. 48, No. 1135, pp. 107 – 108.

--- (1865), *Разыскание средних собственных* […] *движений звезд*. Петербург.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1973a), Finite random sums. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 9, pp. 275 – 305.

--- (1973b), Mathematical treatment of astronomical observations.Там же, vol. 11, pp. 97 – 126.

--- (1977), Laplace’s theory of errors. Там же, vol. 17, pp. 1 – 61.

--- (1980), On the history of the statistical method in biology. Там же, vol. 22, pp. 323 – 371.

--- (1984), On the history of the statistical method in astronomy. Там же, vol. 29, pp. 151 – 199.

--- (1991), Poincaré’s work on probability. Там же, vol. 42, pp. 137 – 171.

--- (1993), The treatment of observations in early astronomy. Там же, vol. 46, pp. 153 – 192.

--- (1995), The introduction of statistical reasoning into astronomy: from Newton to Poincaré. В книге *Planetary Astronomy from Renaissance to the Rise of Astrophysics*, vol. 2B. Редакторы R. Taton, C. Wilson. Cambridge, pp. 191 – 197.

--- (2002), Simon Newcomb as a statistician. *Hist. Scientiarum*, vol. 12, pp. 142 – 167.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007a), *Третья хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007b), *Статьи по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de. Мы ссылаемся на статьи о Данииле Бернулли, об истории медицинской статистики и принципа наименьших квадратов и о раннем обнаружении солнечных пятен.

--- (2007c), *История теории ошибок*. Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007d), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Hist. Scientiarum*, vol. 17, pp. 38 – 48.

Airy G. B. (1860), On the movement of the solar system, etc. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 28, pp. 143 – 171.

Argelander F. (1837), Über die eigene Bewegung des Sonnensystems. *Mém. présentés à l' Acad. Imp. Sci. St.-Pétersb. par divers savans* (*Mém. savans étrangers*), t. 3, No. 5 – 6, pp. 501 – 605. Также AN, 1839 – 1840, Bd. 16, No. 363 – 364, pp. 43 – 55; Bd. 17, No. 398, pp. 209 – 215.

Batten A. H. (1988), *Resolute and Undertaking Characters: The Lives of Wilhelm and Otto Struve*. Dordrecht.

Bell Julia (1908), Note on spectral class and stellar colours. MNRAS, vol. 69, No. 2, pp. 108 – 109.

--- (1909), Note on Mr Franks' analysis of the colours and magnitudes of 3630 stars. Там же, No. 5, pp. 420 – 421.

Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités*. New York, 1972.

Biermann K.-R. (1965), Aus der Entstehung der Fachspräche der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 39, No. 5, pp. 142 – 144.

Blanford H. F. (1880), On the barometric see-saw, etc. *Nature*, vol. 21, pp. 477 – 482.

Bode J. E. (1778a), *Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels*. Berlin – Leipzig.

--- (1778b), *Erläuterung der Sternkunde, etc*, Tl. 1. Berlin, 1808.

--- (1792), Considérations générales sur la situation et la distribution des orbites de toutes les planètes et comètes, etc. *Mém. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres Berlin*, Cl. Philos.-Expér., 1786 – 1787, pp. 341 – 362.

Boole G. (1851), On the theory of probabilities and in particular on Michell's problem, etc. В книге автора *Studies in Logic and Probability*. London, 1952, pp. 247 – 259.

Bravais A. (1846), Analyse mathématique des probabilités, etc. *Mém. présentés par divers savants à l'Acad. Roy. Sci. Inst. France*, Sci. math. et phys., t. 2, pp. 255 – 332.

Bray R., Loughhead R. (1964), *Sunspots*. London.

Buffon G. L. L., Бюффон Ж. Л. Л. (1777), Essai d'arithmétique morale. *Oeuvr. Philos.* Paris, 1954, pp. 456 – 488. Частичный перевод: Опыт моральной арифметики. В книге Шейнин (2007a, с. 93 – 125).

Chambers F. (1886), Sun-spots and prices of Indian food-grains. *Nature*, vol. 34, pp. 100 – 104.

Clerke Agnes M., Кларк А. (1885), *Popular History of Astronomy, etc*. London, 1893. [London, 1902; *История астрономии в XIX в.* Одесса, 1913.]

--- (1890), *The System of the Stars*. London. [London, 1905.]

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970.

Daxecker F. (1996), *Das Hauptwerk des Astronomen P. Christoph Scheiner SJ* [Societas Jesu, т. е. член ордена иезуитов] *Rosa Ursina Sive Sol* [1630], *eine Zusammenfassung*. Innsbruck.

De Sitter W. (1932), *Kosmos*. Cambridge, Mass. [The Hague, 1934, голл.]

Easton C. (1895), Sur la distribution apparente des étoiles, etc. AN, Bd. 137, No. 3270, pp. 81 – 90.

Ellis R. L. (1850), Remarks on the alleged proof of the method of least squares. *Phil. Mag.*, ser. 3, vol. 37, pp. 321 – 328, 462. В книге автора *Mathematical and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 53 – 61.

Encke J. F. (1848), Рецензия на Struve (1847). AN, Bd. 26, No. 622, pp. 337 – 350.

Faye [H. A. E.] (1873), Météorologie cosmique. Sur les Astronomische Mittheilungen du Dr. R. Wolf. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 77, pp. 853 – 855.

--- (1878), Taches du Soleil et mágnetisme. Там же, t. 86, pp. 909 – 916.

--- (1882), Sur un récent mémoire de R. Wolf. Там же, t. 95, pp. 1245 – 1250.

Fisher R. A. (1956), *Statistical Methods and Scientific Inference*. Edinburgh – London. [В книге автора *Statistical methods, Experimental Design and Scientific Inference.* Oxford, 1990.]

Forbes J. D. (1849), On the alleged evidence for a physical connection between stars, etc. *Phil. Mag.*, vol. 35, pp. 132 – 133.

--- (1850), То же название. Там же, vol. 37, pp. 401 – 427.

Galilei G. (1613, итал.), History and demonstrations concerning sunspots and their phenomena. В книге автора *Discoveries and Opinions*. Garden City, N. Y., 1957, pp. 88 – 144.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1802), Pallas Olbersiana. *Werke*, Bd. 6. 1874, Göttingen, pp. 230 – 231.

--- (1809, латин.), Теория движения небесных тел и т. д., кн. 2, раздел 3. В книге автора (1957, 89 – 109).

--- (1823, латин.), Теория комбинации наблюдений и т. д. Там же, с. 17 – 57.

--- (1826, нем.), Автореферат статьи Гаусс (1828). Там же, с. 147 – 150.

--- (1828, латин.), Дополнение к Гаусс (1823). Там же, с. 59 – 87.

--- (опубл. 1860 – 1865), *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher*. Ergänzungsreihe, Bd. 5-3. Hildesheim, 1975.

--- (1845), Nachlass. (Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen.) *Werke*, Bd. 4. Göttingen, 1873, pp. 119 – 183.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Gibson Winifred (1906), Some considerations regarding the number of the stars. MNRAS, vol. 66, pp. 445 – 468.

Gibson Winifred, Pearson K. (1908), Further considerations on the correlations of stellar characters. MNRAS, vol. 68, pp. 415 – 448.

Gower B. (1982), Astronomy and probability: Forbes versus Michell on the distribution of stars. *Annals of Science*, vol. 39, pp. 145 – 160.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Hardin C. L. (1966), The scientific work of […] Michell. *Annals of Science*, vol. 22, pp. 27 – 47.

Herschel J. F. W., Гершель Дж. (1847), *Results of Astronomical Observations* […] *at the Cape of Good Hope*. London.

--- (1850), *Outlines of Astronomy*. London. *Очерки астрономии*. М., 1861 – 1862.

Hill D., Elkin W. L. (1884), *Heliometer-Determinations of Stellar Parallax, etc. Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 48, pt. 1. Весь выпуск.

Hoskin M. A. (1959), *William Herschel*. New York.

Humboldt A., Гумбольдт А. (1850), *Kosmos*, Bd. 3. Stuttgart – Augsburg. Перевод ч. 2 этого тома (М. М. Гусев): М., 1857. Англ. перевод т. 4: Нью-Йорк, 1858.

Kirkwood D. (1888), *The Asteroids or Minor Planets between Mars and Jupiter*. Philadelphia.

Kruskal W. (1978), Formulas, numbers, words: statistics in prose. В книге *New Directions for Methodology of Social and Behavioral Science, etc*. San Francisco, 1981, pp. 93 – 102.

Laplace P. S. Лаплас П. С. (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl.,* t.7. Paris, 1886.

Littrow J. J. (1836), Sonnenflecken. В книге *Gehler's Phys. Wörterbuch*, Bd. 8. Leipzig, pp. 851 – 865.

Lockyer J. N. (1873), The meteorology of the future. *Nature*, vol. 7, pp. 98 – 101.

McCormmach R. (1968), J. Michell and H. Cavendish: weighing the stars. *Brit. J. Hist. Sci.*, vol. 4, No. 14, pp. 126 – 155.

Meadows A. J. (1975), A hundred years of controversy over sunspots and weather. *Nature*, vol. 256, pp. 95 – 97.

Meldrum C. (1872), On a periodicity in the frequency of cyclones, etc. *Nature*, vol. 6, pp. 357 – 358.

--- (1875), On cyclone and rainfall periodicities in connection with the sunspot periodicity. *Rept 44th Meeting Brit. Assoc. Advancement Sci.* 1874, pp. 218 – 240.

Michell J. (1767a), An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars, etc. *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. 12, 1809, pp. 423 – 438.

--- (1767b), On the means of discovering the distance […] of the fixed stars, etc. Там же, pp. 465 – 477.

Newton I., Ньютон И. (1687, латин.), *Математические начала натуральной философии.* Перевод А. Н. Крылова. Книга составляет т. 7 его *Собрания сочинений*. М. – Л., 1936.

Nieto M. M. (1972), *The Titius – Bode Law, etc*. Oxford.

Paul E. R. (1993), *The Milky Way Galaxy and Statistical Cosmology 1890 – 1924.* Cambridge.

Pearson K. (1894), On the dissection of asymmetrical frequency curves. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A185, pp. 71 – 110.

--- (1905), "Das Fehlergesetz […]". A rejoinder. *Biometrika*, vol. 4, pp. 169 – 212.

--- (1907), On correlation and the methods of modern statistics. *Nature*, vol. 76, pp. 517 – 518, 613 – 615, 662.

--- (1910), On the improbability of a random distribution of stars in space. *Proc. Roy. Soc.*, vol. A84, pp. 47 – 70.

--- (1920), Notes on the history of correlation. *Biometrika*, vol. 13, pp. 25 – 45. Перепечатка в книге Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in History of Statistics and Probability*. London, pp. 185 – 205.

Pearson K., Bell Julia (1910), On the mass-determination of parallaxes. MNRAS, vol. 70, No. 7, pp. 532 – 538.

Peirce C. S. (1873), On the theory of errors of observations. В источнике Peirce B., *Rept of the Superintendent, US Coast Survey,* за 1870, Appendix 21, pp. 200 – 224.

Peters C. A. F. (1849), Über Prof. Mädler's *Untersuchungen*, etc. *Bull. Acad. Imp. Sci. St.-Pétersb.*, Cl. Phys.-Math., t. 7, No. 12 – 13 (156 – 157), pp. 180 – 202.

--- (1853), Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes. *Mém. Acad. Imp. Sci. St.-Pétersb.*, Sixième sér., Sci. Math. et Phys., t. 5 (7), pp. 1 – 180.

Plummer H. C. (1909a), On correlation and the characters of variable stars, etc. MNRAS, vol. 69, No. 5, pp. 348 – 354.

--- (1909b), То же название. Там же, vol. 70, No. 1, pp. 4 – 12.

Poincaré H., Пуанкаре А. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912, 1923, 1987. *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.

Sabine E. (1852), On periodical laws, etc, pt. 2. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, pp. 103 – 124.

Schouten W. J. A. (1918), *On the Determination of the Principal Laws of Statistical Astronomy*. Amsterdam.

Schwabe H. (1838), Über die Flecken der Sonne. AN, Bd. 15, No. 350, pp. 243 – 248.

--- (1843), Die Sonne. AN, Bd. 20, No. 473, pp. 283 – 286.

--- (1844), Sonnen-Beobachtungen in Jahre 1843. AN, Bd. 21, No. 495, 233 – 236.

Shea W. R. (1970), Galileo, Scheiner and the interpretation of sunspots. *Isis*, vol. 61, pp. 498 – 519.

Struve O. (1842), *Bestimmung der Constante der Präcession*. Petersburg.

--- (1844), То же название. *Mém. Acad. Imp. Sci. St.-Pétersb.*, Sixième sér., Sci. Math., Phys. et Natur., t. 3 (5), pp. 17 – 124.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Weyl H. (1916), Über der Gleichverteilung von Zahlen mod. 1. *Ges. Abh.*, Bd. 1. Berlin, 1968, pp. 563 – 599.

Wolf R. (1856 – 1859), *Astronomische Mittheilungen*, I – X. Aus der *Vierteljahrsschrift Naturforsch. Ges. Zürich*. Zürich.

--- (1859), Schreiben an den Herausgeber. AN, Bd. 50, No. 1185, pp. 141 – 144.

--- (1877), *Geschichte der Astronomie.* München. [Leipzig, 1933.]

--- (1881), Sur les relations entre les taches solaires et les variations mangnétiques. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 92, pp. 861 – 862.

Приложение: рефераты статей

Мы приводим рефераты некоторых наших английских статей, опубликованных в 1971 – 2007 гг. и указываем источники, в которых можно отыскать дополнительные сведения о темах соответствующих статей.

Шейнин О. Б. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк.* Берлин. Также www.sheynin.de

--- (2007), *Третья хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также www.sheynin.de

I. **Вклад Эйлера в теорию вероятностей и статистику**

Euler Reconsidered. Tercentenary Essays.
Kendrick Press. Heber City, UT, 2007, pp. 281 – 316.
Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 9, 1972, c. 45 – 56;
Шейнин (2005, с. 85 и 94 – 95)
Шейнин (2006, с. 232 – 236, 254 – 267)

Эйлер (1707 – 1783) внес вклад во все тогдашние приложения теории вероятностей, – в азартные игры, математическую обработку наблюдений, статистику населения и страхование жизни. Он исследовал ряд азартных игр (не все из них впервые), в том числе сложную игру фараон, лотерею с утешительными призами для проигравших, разорение игрока, петербургскую игру с заменой математического ожидания иной величиной, но не моральным ожиданием. Его результаты лишний раз свидетельствовали о его аналитическом таланте.

Для уравнивания прямых наблюдений Эйлер предложил метод, который практически сводился к арифметической средине, но эвристически предвосхитил принцип наименьших квадратов в его окончательной форме (Гаусс, 1823 г.). Именно, он заявил, что следует приводить к максимуму сумму квадратов *степеней доброкачественности* наблюдений, и не хватало только перехода от одного неизвестного к нескольким.

При уравнивании косвенных наблюдений Эйлер не пользовался жесткими правилами и, возможно, действовал не всегда лучшим образом. Но он разумно применил принцип максимина, т. е. добивался наименьшего абсолютного значения наибольшего остаточного свободного члена исходных уравнений, – не для их оптимального решения, а для проверки согласованности этих уравнений с теорией, на которой они были основаны.

В статистике самым известным является соавторство Эйлера и Зюссмильха. Ими написана глава “О скорости возрастания и периоде удвоения [населения]” *Божественного порядка* Зюссмильха (2-е изд. 1761 – 1762 гг.). Оказалось, что население возрастало в геометрической прогрессии, и этот вывод в общем сохранил силу.

Разумно не вводя никаких теоретико-вероятностных законов, Эйлер оставил в статистике населения элегантные и методически важные рассуждения, а его математическая теория смертности была усовершенствована лишь в середине следующего века.

Эйлер также заложил основу математического страхования жизни. Его формулы оставались в ходу по крайней мере до начала XIX в., и он усилил внимание общества к институту страхования. В частности, он исследовал практику назначения пожизненных рент и предложил обобщенную форму взаимного страхования, – в принципе весьма интересную, но не получившую распространения.

II. Исследования Бошковича по теории вероятностей

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 9, 1973, с. 306 – 324. ТВ 97 – 99, 126, 129
Шейнин (2005, с. 97 – 99, 126, 129)

В 1750 – 1753 гг. Бошкович (1711 – 1787) совместно с другим ученым проложил градусное измерение в Италии, а затем вывел параметры земного эллипсоида на основе нескольких (n) таких измерений. При их уравнивании он наложил на остаточные свободные члены исходных уравнений два условия: их сумма должна была равняться нулю, а сумма их абсолютных значений оказаться минимальной. Первое условие приводило к исключению одного из неизвестных, второе было связано с выбором медианы.

Метод Бошковича впоследствии применил Лаплас. Гаусс заметил, что если число неизвестных равно m ($m < n$), то основное условие Бошковича означало, что в точности m остаточных свободных членов окажутся равными нулю. Таким образом, ему была известна важная теорема линейного программирования.

Для уравнивания прямых наблюдений Бошкович применил окольный путь, – вычислил среднее не из них, а из полусумм всех сочетаний наблюдений по два. Возможно, что он поступил по аналогии с принятым в то время (в частности и им самим до того, как он предложил описанный выше способ) методом уравнивания косвенных наблюдений с двумя неизвестными: решались все подсистемы пар уравнений, и полученные частные решения осреднялись. В XIX в. было доказано, что при надлежащем взвешивании (чего никто не делал) окончательное решение совпадет с решением по методу наименьших квадратов.

В одной из своих рукописей (дата ее написания неизвестна) Бошкович вычислил вероятность ошибки суммы наблюдений, искаженных равновероятными ошибками в – 1, 0 и 1. Его исследование было крайне элементарным, но возможно, что оно предшествовало первому опубликованному приложению теории вероятностей к обработке наблюдений (Симпсон, 1756 и 1757гг.). Другая его элементарно написанная рукопись 1765 г. была посвящена вычислениям, относящимся к сравнительно простой лотерее.

В *Теории натуральной философии* 1758 г. Бошкович возможно намекнул на неравенство скоростей “точек материи” (§ 481), а в § 385 (как и Мопертюи в 1756 г.) предвосхитил знаменитое изречение Лапласа о всеведущем уме, которому доступно прошлое и будущее.

III. Исследования Ламберта по теории вероятностей

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 7, 1971, с. 244 – 256.
Шейнин (2005, с. 80 – 81, 85, 86, 88 – 89, 92)

Ламберт (1728 – 1777) исследовал логические и философские проблемы теории вероятностей и понятия случайности, связывая последнюю с беспорядком. Пытаясь определить бесконечную случайную последовательность (что в то время было невозможно), он эвристически подошел к понятию нормального числа.

Его демографические исследования носили методический характер. Он изучал продолжительность браков, детскую смертность от оспы и распределение количества детей в семьях, многократно выравнивал эмпирические данные, а также без должного обоснования предложил несколько законов смертности.

Ламберт уделил много внимания обработке наблюдений, и в этой области его можно считать основным предшественником Гаусса. Он первым ввел принцип наибольшего правдоподобия (для одновершинных кривых, общий вид которых соответствовал “обычным” случайным ошибкам измерений), впервые (неудачно) оценивал точность наблюдений и снова неудачно обосновывал отбраковку наблюдений, подбирал кривые и прямые к эмпирическим данным и вывел плотность распределения погрешностей наблюдения по принципу безразличия.

Он же ввел термин *теория ошибок*, который начал применять Бессель (но не Лаплас и не Гаусс) и вошел во всеобщее употребление в середине XIX в.

IV. Айвори: обработка маятниковых наблюдений

Hist. Math., vol. 21, 1994, с. 174 – 184
Шейнин (2005, с. 207 – 208)

В 1825 – 1830 гг. Айвори (1765 – 1842) опубликовал ряд статей, посвященных проверке гипотезы эллипсоидальной формы Земли и выводу сжатия земного эллипсоида по маятниковым наблюдениям. Он бездоказательно назвал метод наименьших квадратов недостаточно хорошим, будто бы отказался от него, фактически же иногда бессознательно пользовался им в типичном частном случае.

Айвори начал с уравнивания наблюдений на шести, а затем на восьми станциях, определяя искомое сжатие и (лишь примерно известную) длину секундного маятника по различным парам станций, но во все пары включил одну и ту же, единственную южную станцию. Тем самым все определения оказались искаженными одной и той же погрешностью и, возможно, местной аномалией силы тяжести.

Впоследствии, опасаясь воздействия подобных аномалий, он стал отбрасывать до 1/3 наблюдений, что было слишком радикально. Наконец, при оценке точности наблюдений и результатов уравнивания Айвори так и не воспользовался дисперсией.

Айвори может служить примером естествоиспытателя, не посчитавшего нужным изучить метод наименьших квадратов. Но его окончательное значения сжатия эллипсоида оказалось близким к установленному Ф. Н. Красовским в 1940 г., и он же был первым (после Гаусса), заявившим, что указанный метод должен основываться на принципе наибольшего веса.

V. Исследования Пуассона по теории вероятностей

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 18, 1978, с. 245 – 300
Шейнин (2005, гл. 8)

Пуассон (1781 – 1840) понимал *вероятность* в субъективном смысле, а *шанс* – в объективном и доказывал, что вероятность неизвестного события равна 1/2. Он неудачно объяснил понятие случайности, но формально ввел в теорию вероятностей *случайную величину* (обозначив ее, правда, временным и условным термином *вещь А*) и в дискретном, и в непрерывном вариантах и при переходе к последнему применил функции Дирака (позднейшее название). Он также ввел интегральную функцию распределения и определил плотность как ее производную.

Пуассон предложил собственный вывод теоремы Муавра – Лапласа для появления противоположных событий, имеющих вероятности p и q наступления в единичном бернуллиевом испытании, не менее m раз (не более n раз) в $\mu = m + n$ испытаниях. Для малого q он особо получил (по существу известную Муавру формулу)

$$P \approx e^{-\omega}(1 + \omega + \ldots + \omega^n/n!),\ \omega = \mu q \approx mq,$$

но выражения

$$P(\xi = m) = e^{-\omega}\ \omega^m/m!$$

у него не было.

Пуассон исследовал выборки без возвращения; вывел (без оценки влияния допущенных упрощений) предельные теоремы для биномиальных испытаний с переменной вероятностью, зависящей от номера испытания; доказал, снова без подобной оценки, несколько вариантов центральной предельной теоремы и ввел при этом так называемое распределение Коши. Эту теорему он применил для установления значимости расхождений между различными эмпирическими показателями.

Закон больших чисел он определил расплывчато, но среди примеров назвал устойчивость среднего уровня моря и существование среднего интервала между *молекулами*.

В статистике основной заслугой Пуассона было исследование эмпирических расхождений (см. выше), что позволяет считать его предтечей континентального направления статистики. Он также разумно полагал, что статистику (впрочем, основанную на большом числе наблюдений) следует применять в медицине. Пуассон подробно исследовал французскую уголовную статистику, особо – процент осуждаемых по отношению ко всем подсудимым и вероятности судебных ошибок.

VI. О работе Гельмерта в теории ошибок

Arch. Hist. Ex. Sci., 49, 1995, с. 73 – 104
Шейнин (2005, с. 181 – 186)

Гельмерт (1843 – 1917) был геодезистом, специалистом во всех областях своей науки, который завершил построение классической теории ошибок. В своей диссертации 1868 г. он исследовал целесообразное распределение наблюдений в геодезических сетях, имея в виду цели, совпадающие с целями нынешнего линейного программирования. Необходимость учета нелинейных (и даже неалгебраических) уравнений не смогла бы воспрепятствовать Гельмерту заложить его основы (перед уравниванием сети такие уравнения линеаризуются). Впрочем, в этом направлении ему мало что удалось сделать.

Гельмерт привел теоретические возражения против правила трех сигма, но практически допускал его. Ему пришлось уравнивать сложно построенную триангуляцию, и он распределял вычисления между несколькими вычислителями без потери точности и временно заменял ее отдельные звенья соответствующими геодезическими линиями. Этот прием стал основой уравнивания астрономо-геодезической сети Советского Союза.

Продолжая исследования Гаусса, Гельмерт вывел по индукции распределение хи-квадрат независимо от Аббе и предложил несколько критериев для выявления систематических влияний, уточнил вывод формулы средней абсолютной ошибки для нормального распределения (Петерс, 1856 г.) и сумел вычислить дисперсию полученной оценки.

Гельмерт исправил просчет, допущенный Гауссом при вычислении границ оценки дисперсии наблюдений m^2; в 1947 г. этот результат независимо повторили Колмогоров и др. Он полагал, что значение имеет лишь относительная дисперсия $\mathrm{D}m^2/m^2$. Гельмерт вычислил также границы для оценки практически всегда применяемой смещенной средней квадратической ошибки, но лишь для нормального распределения. В процессе своего исследования Гельмерт применил преобразование, которое теперь называется по его имени, и доказал теорему Стьюдента – Фишера о независимости дисперсии и среднего арифметического при нормальном распределении, но не обратил на нее внимания.

VII. Фехнер как статистик

Brit. J. of Math. and Statistical Psychology, vol. 57, 2004, c. 53 – 72.
Шейнин (2005, с. 208 – 209)

Фехнер (1801 – 1887) был основателем психофизики. Он ввел статистический метод в физику, хоть и не на главном направлении, был соавтором логарифмического закона Вебера – Фехнера, который связывал возбуждения с ощущениями. В теории ошибок он следовал за Гауссом, но, пользуясь лишь элементарным математическим аппаратом, вводил и новшества (не всегда удачные). Он предложил изучать *коллективы*, – наблюденные значения случайных величин, – при помощи нескольких средних, и особое внимание уделил асимметричным распределениям, получил формулу, относящуюся к восходящим и нисходящим сериям, ввел меру зависимости, которая, однако, не отражала “отрицательных” зависимостей, и статистический метод парных сравнений. Его труды высоко оценили Пирсон, Мизес (который заявил, что Фехнер побудил его принять частотную точку зрения) и Фрейд.

VIII. Исследования Бертрана по теории вероятностей

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 48, 1994, c. 155 – 199
Шейнин (2005, с. 213 – 216, 226 – 228)

В 1855 г. Бертран (1822 – 1900) перевел на французский язык сочинения Гаусса по методу наименьших квадратов, но сам обратился к теории вероятностей лишь в 1887 – 1888 гг., опубликовав сразу 25 заметок и свой основной, неряшливо и торопливо написанный прекрасным стилем трактат. Он привлек внимание математиков (особо – Пуанкаре) к теории вероятностей, но поверхностное и местами ошибочное изложение, а также неконструктивные выводы возможно и оттолкнули некоторых читателей, а у других создали ошибочное впечатление об этой дисциплине.

Бертран отрицал возможность приложения модного в то время морального ожидания, которое впоследствии оказалось важным для теории предельной полезности. Особо известной стала его задача о длине *случайной* хорды данного круга, для которой он предложил три различных решения. Тем самым оказалось, что случайность, притом даже *равномерную*, следует вводить более определенно. В 1903 г. де Монтесу доказал, что эта задача имела несчетное множество решений.

Бертран доказал несколько теорем о порядковых статистиках и решил ряд других интересных задач, в том числе о вероятнейшем составе урны по результатам выборки с возвращением из нее, о вероятности одному из двух кандидатов неизменно опережать другого при голосовании (задача о баллотировке, которая нашла много применений), о разорении игрока и близко подошел к доказательству теоремы Стьюдента – Фишера (ср. выше реферат статьи о Гельмерте).

Бертран ошибочно признал “принцип Бейеса” безнадежным; обсуждая оценку точности наблюдений, упустил суть исходного гауссова условия несмещенности. Интересным было, однако, его замечание: при малых погрешностях экспоненциальный закон распределения ошибок наблюдений может быть представлен любым четным двучленом и уже потому в известной степени более обоснован.

IX. Исследования Пуанкаре по теории вероятностей

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 42, 1991, с. 137 – 171
Шейнин (2005, с. 216 – 223)

В теории вероятностей Пуанкаре (1854 – 1912) известен по своему руководству (1896 и 1912), несколько небрежно написанному под влиянием Бертрана и не упоминавшему не только российских математиков, но почти умалчивающему о Лапласе и Пуассоне. В этом руководстве содержатся странные высказывания (например: теория вероятностей имеет только практическое значение), и вообще известно, что Пуанкаре далеко не сразу признал статистический характер термодинамики и безоговорочно осудил приложение теории вероятностей к “моральным наукам”, особенно к судопроизводству. Последнее особенно проявилось при упоминании его мнения об уликах на пресловутом процессе Дрейфуса.

В собственно теории вероятностей Пуассон разъяснил парадокс Бертрана о длине случайной хорды, нестрого доказал центральную предельную теорему в теории ошибок и для этой цели ввел характеристические функции, не подпадающие под их современное определение, но позволившие ему переходить от них к плотностям и обратно.

Теории ошибок Пуанкаре уделил большое внимание (и считал ее основной областью приложения теории вероятностей), но остался сторонником отвергнутого Гауссом первого (1809 г.) обоснования принципа наименьших квадратов.

Пуанкаре неоднократно обращался к истолкованию понятия случайности и первым непосредственно связал ее с неустойчивыми состояниями. Он же сформулировал удачную для того времени мысль о совместном действии случайности и необходимости: точные законы, как он пояснил, лишь намечают пределы действия случайностей.

Он привел интересные примеры “равномерной случайности” (распределение астероидов вдоль эклиптики, результаты игры в рулетку) и ввел метод произвольных функций для ее обоснования. Об однородных цепях Маркова и их эргодическом свойстве он не упомянул (возможно и не знал о них) и, например, особо сложным путем, применяя гиперкомплексные числа, обосновал равномерное распределение карт в колоде после длительного тасования.

X. Исследования Некрасова по центральной предельной теореме: общий фон

Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 57, 2003, с. 337 – 353
Историко-математич. исследования, т. 34, 1993, с. 194 – 206;
т. 35, 1994, с. 124 – 147 (совместно с М. В. Чириковым);
т. 1 (36), № 1, 1995, с. 159 – 167;
т. 11 (46), 2006, с. 148 – 157;
Шейнин (2007, с. 150 – 215)

Примерно до 1900 г. Некрасов (1853 – 1924) успел получить существенные результаты в математическом анализе, наметил доказательство центральной предельной теоремы для сумм решетчатых случайных величин, был профессором и ректором Московского университета. После этого его работы (но только по теории вероятностей и статистике) стали темными, неразрывно связанными с морально-политическими и религиозными соображениями; в них появились многочисленные ошибки и несуразные утверждения и, пожалуй, преднамеренный обман, сам же он стал высокопоставленным чиновником Министерства народного просвещения.

Некрасов тщетно стремился ввести преподавание теории вероятностей в школьные программы. В основном этому воспрепятствовал Марков, который разумно опасался религиозно-политического направления предложенного курса. Окончательное доказательство центральной предельной теоремы у Некрасова оказалось невообразимо сложным и потому бесполезным, хотя именно он опередил свое время, начав изучать ее для случая больших уклонений. После 1917 г. Некрасов по существу никаких научных работ не опубликовал, а его преподавание мало что давало слушателям. Имеются сведения, что он воспринял марксизм, и во всяком случае он и раньше выступал против капитализма.