Якоб Бернулли
Искусство предположений
Части 1 – 3
Перевод О. Б. Шейнина

Jacobi Bernoulli
Ars Conjectandi
Basileae, 1713

Оглавление

Предисловие переводчика

Якоб Бернулли (1654 – 1705) был крупнейшим ученым своего времени, – математиком, механиком и физиком. Он не успел закончить своего “Искусства предположений” и оно вышло в свет посмертно, в 1713 г., см. Библиографию, с предисловием его племянника, Николая Бернулли. Наиболее всего это сочинение известно ввиду доказанного в нем, в части 4-й, закона больших чисел, как его впоследствии назвал С.-Д. Пуассон.

Эта часть 4-я была переведена на русский язык в 1913 г. (второе издание с комментариями 1986 г.) и на французский и английский языки в 1987 и 2005 гг. соответственно; существует и малоудовлетворительный английский перевод 1966 г. Вся книга в целом была перепечатана в 1975 г. вместе с сопутствующими сочинениями (в том числе с выдержками из Дневника (Meditationes) Бернулли) и комментариями и переведена на немецкий язык Р. Хаусснером (J. Bernoulli 1899) и на английский язык Эдит Силлой (J. Bernoulli 2006). В результате нашего нынешнего перевода появился полный, хотя и не в едином источнике, русский текст сочинения Бернулли. Хаусснер (с. 141) упоминает французский перевод части 1 1801 г. и английский перевод кусков этой части 1795 г. На Хаусснера, – и также на Эдвардса (Edwards 2002) и Силлу (Bernoulli 2006), – мы ссылаемся неоднократно, уже не указывая источника.

В первой части "Искусства" Бернулли использовал латинский текст трактата Гюйгенса 1657 г., разбив его на отдельные Предложения и сопроводив почти каждое обширным комментарием, мы же воспользовались собственным переводом французского текста этого трактата 1920 г., выполненного с исходного голландского текста 1660 г.; расхождения между латинским и французским текстами весьма незначительны. Бернулли указывал места своих комментариев повторением соответствующей фразы Гюйгенса, а в 1975 г., в *Трудах* Бернулли, комментарии были дополнительно обозначены латинскими буквами на полях. Так, одному из своих комментариев к Предложению 4 Гюйгенса Бернулли предпослал его фразу "Вначале следует заметить ...". Мы эти фразы не сохранили; латинские буквы вполне достаточны.

Мы основывались на немецком тексте, конечно же сверяя его с английским и, в пределах наших возможностей, с латинским оригиналом. Здесь мы обязаны сказать, что Хаусснер переводил добросовестно, но позволял себе многочисленные и не всегда оговоренные пропуски и сокращения и модернизировал текст. Сам же он (с. 140) указал лишь на "небольшие изменения", осуществленные, чтобы "избежать утомительного многословия". Но Хаусснер также без оговорок добавлял необходимые пояснения; мы приводим их в квадратных скобках с добавлением буквы Х: [... Х.].

Силла допустила множество математических ошибок и при рабском следовании оригиналу, и при его "исправлении", и ей просто нельзя доверять. Она выделила из текста слишком мало формул, ее стиль заставляет желать много лучшего, а ее Введение, комментарии и примечания (всего около 160 с.) следует почти полностью отбросить. Достаточно сказать, что гидродинамическую теорему Даниила Бернулли она приписала Николаю Бернулли (с. ix), а доказательство закона больших чисел назвала "математическим, но не научным" (с. 43). Библиографические данные русского перевода части 4-й 1913 г. взяты ей с потолка, а издание 1986 г. в ее библиографии отсутствует. Гораздо подробнее об этом см. в нашей рецензии на ее перевод. Здесь мы добавим: она не математик и ее труд прекрасно иллюстрирует слова И. А. Крылова: "Беда, коль пироги начнет печи сапожник, а сапоги тачать – пирожник". Вот один лишь пример (часть 2, гл. 7, ее с. 245, с. 191 по изданию 1975 г.: одночлены *a, b, c, d* линейного четырехчлена

($a + b + c + d$) названы “частями корня” многочлена; в оригинале были упомянуты partes radicis и буквальный перевод был бы “коренные части” многочлена.

Общую характеристику сочинения Бернулли и тогдашнего состояния теории вероятностей можно найти в нашем комментарии в Бернулли (1986); там же комментарий Ю. В. Прохорова “Закон больших чисел и оценки вероятностей больших уклонений” и биография Бернулли, составленная А. П. Юшкевичем. Он же на с. 162 – 163 привел перевод Предисловия Николая Бернулли, выполненный Ю. Х. Копелевич, отредактированный им, Юшкевичем, и А. А. Россиусом и снабженный примечаниями Юшкевича и Копелевич. Мы перепечатываем это Предисловие на его должном месте. Здесь мы добавим, что первые три части “Искусства предположений” недостаточно известны, хотя многие вероятностные задачи в части 3, равно как и комментарии Бернулли к трактату Гюйгенса в части 1, представляются интересными. Так, в гюйгенсовой дополнительной Задаче 1 в части 1 и в Задаче 14 части 3 рассматриваются случайные количества бросков при игре в кости, а в Задаче 8 части 3 изучается распределение фигурных карт среди прочих (= распределение шаров по ящикам). Заметим, что Хаусснер (с. 147) посчитал самыми интересными в части 1 ту же дополнительную Задачу 1 и комментарий к Предложению 14. В части 2, как мы указываем там в Примечании 23, особо интересно введение *чисел Бернулли*. Сразу скажем, что примечания собраны в конце каждой части.

Термины Бернулли несколько отличны от применявшихся Гюйгенсом. *Ожидание* и *жребий* (sors) он, видимо, почти не различал; мы выбрали *жребий*, – слово, имеющее вероятностный смысл, а не, скажем, *долю*. Впрочем, в нескольких случаях (например, в Замечаниях к Предложению 7) встречается и *доля* (portio). Далее, в стандартных выражениях Бернулли типа “*A* имеет 3 случая (casûs) выиграть ...” мы по возможности заменяем “случай” *шансом* и вообще применяем этот последний термин даже если выражение для него не является целым числом; впрочем, так же поступал Бернулли по отношению к термину *случай*.

Осталось сказать, что во времена Бернулли математики еще не применяли ни символ факториала, ни обозначение для числа сочетаний, мы же воспользовались и тем, и другим. Кроме того, в традиции своей (и даже намного более поздней) эпохи он вычислял ожидания игроков с заведомо ненужной точностью, а квадраты величин Бернулли, правда с одним исключением, неизменно обозначал повторением соответствующей буквы, например *cc*. Что же касается упомянутого Хаусснером “утомительного многословия”, то, действительно, каждый заметит ненужные подробности, явно рассчитанные на неподготовленного читателя (и, вместе с тем, подчас недостаточные объяснения) и словесное истолкование простых алгебраических формул. Мы осмелились лишь в весьма немногих местах опускать элементарные выкладки, заменяя их обозначением […]. В таких же скобках мы добавляли по нескольку пояснительных слов, равно как и номера станиц “Искусства предположений” по изданию 1975 г. (полужирным шрифтом). Наконец, нам пришлось более подробно пояснять смысл колонок и/или строк многих таблиц (иногда, правда, в дополнение к сказанному автором в основном тексте).

Библиография (ко всему сочинению в целом; составлена переводчиком)

Я. Бернулли

(1685), Problème proposé par M. Bernoulli. В книге J. Bernoulli (1975, p. 91).

(1689 – 1704), *Tractatus de seriebus infinitis*. В книге J. Bernoulli (1993, pp. 45 – 147).

(1690), Questiones nonnullae de usuris cum solutione problematis de sorte alearum propositi. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 91 – 93).

(1692, manuscript), *De arte combinatoria*. Там же, с. 98 – 106.

(1713), *Ars conjectandi*. Там же, с. 107 – 259).

(1899), Немецкий перевод "Искусства предположений": *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Перевод Р. Хаусснера. Frankfurt/Main, 1999.

(1913), Русский перевод (Я. В. Успенский, под ред. А. А. Маркова) части 4-й "Искусства предположений". Петербург.

(1966), *Translations from James Bernoulli* by Big Sung. Это скорее пересказ и потому не представляет большой ценности. Dept of statistics, Harvard Univ., Techn. Rept No. 2

(1975), *Werke*, Bd. 3. Basel. Редактор B. L. van der Waerden. Содержит "Искусство предположений" в оригинале, родственные сочинения и комментарии и, в частности, перепечатку записей из *Дневника* (*Meditationes*) Бернулли (с. 21 – 92), предваряющих некоторые рассуждения и задачи из "Искусства предположений", и его лекции об искусстве комбинаторики, см. Bernoulli (1692).

(1986), *О законе больших чисел.* М. Редактор Ю. В. Прохоров. Содержит перепечатку перевода 1913 г. Я. В. Успенского, статью Маркова 1914 г. Двухсотлетие закона больших чисел и комментарии, упомянутые в нашем тексте.

(1987), *Jacques Bernoulli & l'ars conjectandi*. Перевод (B. Lalande, редактор N. Meusnier) части 4-й "Искусства предположений". Paris.

(1993), *Werke*, Bd. 4. Basel.

(2005), *On the law of large numbers.* Berlin. Перевод (О. Б. Шейнин) части 4-й "Искусства предположений".

(2006), *The Art of Conjecturing together with the Letter to a Friend on Sets in Court Games*. Baltimore. Перевод: Edith Dudley Sylla.

Другие авторы

Bernoulli, N. (1709), De usus artis conjectandi in iure. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 287 – 326).

Biermann, K.-R. (1957), Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Centaurus*, t. 5, pp. 142 – 150.

Bullialdus (Boullaud, Boulliau), I. (1682), *Opus novum ad arithmeticam infinitorum*. Paris.

Cantor, M. (1898), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 3. New York – Stuttgart, 1965.

De Moivre; A. (1712, in Latin), De mensura sortis or the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 236 – 262.

De Mora-Charles, Maria Sol (1986), Leibniz et le problème des partis. Quelques papieres inédits. *Hist. Math.*, vol. 13, pp. 352 – 369.

Edwards, A. W. F. (2002), *Pascal's Arithmetic Triangle*. Baltimore – London. Первое издание: 1987.

Faulhaber, J. (1615), *Mysterium arithmeticum*. Без места.
--- (1631), *Academia algebrae*. Augsburg.
Fermat, P. (1894), *Œuvres*, t. 2. Paris.
Huygens, C. (1657), De calcul dans les jeux de hazard. *Oeuvr. Compl.*, t. 14. La Haye, 1920, pp. 49 – 91, франц. и голл. Русский перевод с франц. в книге Шейнин (2006, с. 28 – 42).
Kohli, K. (1975), Kommentar zur Dissertation von Niklaus Bernoulli. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 541 – 556).
Lansius, T. (1620, 2-е издание), *Friderici Achillis Ducis Wirtembergiae Consultatio de principatu inter provincias Europae*. Tübingen, 1678.
Leibniz, G. W. (1666), *Dissertatio de Ars combinatoria*. *Math. Schriften*, Bd. 5. Редактор G. I. Gerhardt (1858). Hildesheim – New York, 1971, pp. 7 – 79.
--- (1690), Ad ea, quae vir clarrisimus J. Bernoulli … publicavit, responsio. *Opera omnia*, t. 3. Genève, 1768, pp. 237 – 238.
Mercator, N. (1668), *Logarithmotechnia.* London.
Mersenne, M. (1636), *Harmonie universelle.* Paris, 1963.
Montmort, P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard.* Paris, 1713. Перепечатка: New York, 1980.
Pascal, B. (1654), [Correspondance]. *Oeuvr. compl.*, t. 1. Paris, 1998, pp. 145 – 166. Перевод: Шейнин (2006, с. 8 – 27).
--- (1665), *Traité du triangle arithmétique*. В книге Pascal (1998, pp. 282 – 327).
--- (1998 – 2000), *Œuvres complètes*, tt. 1 – 2. Paris.
Prestet, J. (1675), *Elemens des mathématiques ou principes generaux de toutes les sciences.* Paris.
--- (1689 – 1700), *Nouveaux elemens* … etc., tt. 1 – 2. Paris.
Prevost, P. (1782 – 1783), Sur les principes de la théorie des gains fortuites. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres [Berlin] avec l'Histoire pour la même année*, 1780, pp. 430 – 472 ; 1781, pp. 463 – 471. Вторая пагинация.
Puteamus, E. (1617), *Thaumata Pietatis.* Antwerp.
Rabinovitch, N. L. (1970), Rabbi Levi ben Gershon and the origins of mathematical induction. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 6, pp. 237 – 248.
Remmelin, J. (1627), *Formatio figurati numeri miraculosa.*
Scaliger, J. C. (1561), *Poetis libri septem*, Bde 1 – 5. Stuttgart – Bad Cannstatt, 1994 – 2003.
Schooten, F. van (1657), *Exercitationum mathematicarum libri quinque.* Leiden.
Seneta, E. (1983), Modern probabilistic concepts in the work of E. Abbe and A. De Moivre. *Math. Scientist*, vol. 8, pp. 75 – 80.
Vlack, A. (1633), *Trigonometria artificialis sive magnus Canon triangulorum logarithmicus.* Без места, Rammasenius.
Vossius (Voss), G. J. (1650), *De scientiis mathematicis*. Amsterdam. Хаусснер (с. 152) утерждает, что полное название книги *De universae mathesios natura & constitutione liber* (Amsterdam, 1601, 1650, 1660).
Wallis, J. (1655), *Arithmetica infinitorum*. В книге автора *Opera math.*, t. 1. Oxford, 1695, pp. 355 – 478.
--- (1685), Discourse of Combinations, Alternations, and Aliquot Parts. В книге автора *Treatise of Algebra*. London. Латинское издание *Treatise*: 1693.

Майстров Л. Е., Розенфельд, Б. А., Шейнин, О. Б. (1970), Комбинаторика и теория вероятностей. Глава в книге *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия*, т. 2. Редактор А. П. Юшкевич. М., с. 81 – 97.
Шейнин, О. Б., составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин.
--- (2007), Рецензия на английский перевод Бернулли 2006 г. *Historia Scientiarum*.

[108] Предисловие Николая Бернулли

Перевод Ю. Х. Копелевич, примечания А. П. Юшкевич и Копелевич

Николай Бернулли приветствует читателя!

Наконец стараниями братьев Турнэйзен посмертно выходит в свет долгожданный трактат моего дяди об искусстве предположений. Издатели, исполняя свой долг перед публикой, позаботились об издании авторской рукописи, предоставленной наследниками покойного. Цель автора состояла в том, чтобы показать исключительную пользу для гражданской жизни той, до сих пор лишь немногими изучавшейся части математики, предмет которой есть измерения вероятностей. Каким образом и в какой мере автор исполнил свою задачу, уже было рассмотрено в "Записках" Французской королевской академии наук за 1705 г. и в парижском "Журнале ученых" за 1706 г.[1]

Данное сочинение автор разделил на четыре части. Первая из них содержит комментированный трактат знаменитого Гюйгенса о расчетах в азартных играх, который автор счел нужным предпослать своему сочинению как первооснову искусства предположений. Вторая часть объемлет учение о перестановках и сочетаниях, необходимых для измерения вероятностей. Применение этого учения в разного рода жеребьевках и азартных играх поясняется в третьей части. Четвертую часть сочинения, в которой автор намеревался рассказать об использовании всего изложенного выше в гражданских, моральных и экономических вопросах, он из-за продолжительной болезни и безвременно наступившей смерти оставил незавершенной.

Издатели хотели бы, чтобы незавершенность работы восполнил брат покойного, как человек в наибольшей степени для этого подходящий; однако, они не сочли возможным обременять его такой просьбой из-за его чрезмерной занятости. Тогда они вознамерились вверить это дело мне, зная, что некогда в своей инавгурационной диссертации я дал некоторые образцы применения искусства предположений в области права[2]. Но в то время я находился в путешествии и не смог выполнить это дело. После возвращения на родину, будучи вновь встречен этой просьбой, я отклонил ее, чувствуя, что слишком молод и не обладаю достаточным опытом для того, чтобы заняться данным предметом. Я полагал, что добавлением общеизвестного и банального не только не удовлетворю читателя, но и могу обесценить основное содержание. Поэтому я посоветовал выпустить сочинение, большая часть которого была уже напечатана, в том виде, в каком его оставил автор. Но чтобы полезнейшее дело, а именно приложение исчисления вероятностей к политике и экономике, не осталось в полном небрежении, мы просили бы почтеннейшего г-на автора французской книги "Опыт анализа азартных игр”, а также досточтимого г-на Муавра, которые недавно опубликовали прекрасные образцы этого искусства, чтобы они взяли на себя эту задачу и со временем сообщили публике свои выдающиеся открытия[3]. Мы надеемся в то же время, что общие положения, развитые автором в пяти главах последней части, будут полезны ревностному читателю, занимающемуся специальными вопросами[4]. Вот то, что мы считали нужным сказать в предисловии о самом сочинении.

Издатели присоединили к рукописи положения автора о бесконечных рядах, изложенные некогда им самим в виде пяти диссертаций [5]; поскольку экземпляры этих работ невозможно найти у наших книготорговцев, их напечатали здесь же. Добавлено также родственное по теме “Послание к другу”, написанное автором по-французски[6].

Также следует обратить внимание читателя на то, что корректор для развлечения любопытных вставил в верстку найденные среди бумаг автора вариации стиха Баухузия[7]: “Столько даров [по смыслу: достоинств] у тебя, сколько звезд на небе, о дева”. Нужно поэтому опустить при чтении то, что следует в книге за страницей 78. Немногие другие ошибки, пропущенные корректором, мы отметили на последней странице книги, так что просим благосклонного читателя их исправить. **[108, конец]**

Примечания

1. Речь идет о публикации похвального слова в адрес покойного Я. Бернулли, произнесенного непременным секретарем Парижской академии наук де Фонтенелем [B. Le Bovier de Fontenelle] в собрании 14 ноября 1705 г. и о статье академика Сорена [J. Saurin]. Фонтенель, не будучи математиком, не сумел надлежаще выразить идеи Я. Бернулли, хотя и опирался на описание рукописи “Искусства предположений”, присланное ему Я. Германом. В противоположность ему, Сорен более ясно охарактеризовал основное содержание рукописи, включая его четвертую часть и основную теорему. Обширные цитаты из речи Фонтенеля [*Hist. Acad. Roy. Sci.* pour 1705, 1706, pp. 139 – 150] и статьи Сорена [*J. Sçavans de France* pour 1706, pp. 81 – 89] приведены в комментарии Коли [Kohli 1975].

2. Диссертация Н. Бернулли на степень доктора обоих прав (римского и общегражданского) была публично защищена автором в июне 1709 г. Она перепечатана в 1975 г.

3. Автор французской книги – П. де Монмор. Его имя здесь не названо, так как книга была издана анонимно.

4. Очень странная характеристика закона больших чисел, тем более, что сам Н. Б. разработал другой вариант закона и применил его к исследованию соотношения мальчиков и девочек среди новорожденных, см. его письмо Монмору 1713 г. (Montmort 1708, 2-е изд. 1713 г., с. 388 – 394), перевод: Шейнин (2006, с. 71 – 79). Считаем нужным напомнить (Kohli 1975, p. 541), что Н. Б. дословно перенес в свою диссертацию куски еще не вышедшего “Искусства” и Дневника Якоба Бернулли. О. Ш.

5. Опубликованы в 1689 – 1704 гг. и переизданы в 1713 г. вместе с “Искусством предположений”.

6. Lettre à une amy sur les parties du jeu de paume; Bernoulli (1975, pp. 260 – 287).

7. Баухузий (Bernard Bauhusius, 1575 – 1629) – латинизированное имя автора латинских эпиграмм Бернара Боюи. Имеется в виду его стих Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera coeli. Я. Бернулли с помощью перестановок составил 3312 анаграмм, которые, однако, не предназначал для опубликования. По недоразумению они помещены в "Искусстве предположений".

[109] Часть Первая
Содержащая трактат Х. Гюйгенса "Вычисления в азартных играх" (1657) с Замечаниями Якоба Бернулли

Х. Гюйгенс, Письмо Ф. ван Схутену

Сударь, зная, что, публикуя ценный плод Ваших рассудка и усердия, Вы пытаетесь, помимо прочего, показать, учитывая разнообразие рассматриваемых тем, громадное протяжение поля, на которое распространяется наше изумительное *алгебраическое* искусство, я не сомневаюсь, что данное [мной] сочинение об исчислении азартных игр послужит этой цели. По существу, чем труднее кажется логическое установление того, что изменчиво и подчиняется шансу, тем восхитительнее представляется наука, которая определяет результаты этого.

Поскольку именно по Вашей просьбе и в ответ на Ваши запросы я начал писать об этом исчислении, и поскольку Вы сочли его достойным появиться вместе с результатами Ваших глубоких исследований, я не только охотно разрешаю Вам опубликовать его [это исчисление] подобным образом, я полагаю, что этот метод публикации будет благоприятен мне в полной мере. Ибо если некоторые читатели вполне могут подумать, что я трудился над маловажными темами, они все же не сочтут совсем бесполезными и не заслуживающими никакой похвалы то, что Вы таким путем соизволили заимствовать как свою собственную работу[1], переведя ее не без некоторых хлопот с нашего [голландского] языка на латинский. Тем не менее, я хотел бы верить, что при более внимательном рассмотрении читатель вскоре поймет, что здесь дело идет не о простой игре ума, что в нее заложено начало весьма интересному и глубокому умозрительному построению. Задачи, принадлежащие этой теме, как мне представляется, не следует считать более легкими чем *диофантовы*, но они, возможно, покажутся более занимательными, поскольку включают нечто большее, чем простые свойства чисел[2].

Следует также знать, что в течение какого-то времени некоторые наиболее знаменитые математики всей Франции [Паскаль и Ферма] занимались этим видом исчисления, так что никто не должен приписывать мне честь первого открытия, которое мне не принадлежит. Но эти ученые, хоть они испытывали друг друга, предлагая друг другу много трудных задач, скрыли [не обнародовали] свои методы. Поэтому мне самому пришлось исследовать и глубоко вникать в этот предмет начиная с самого начала. И по причине, которую я только что упомянул, я даже не могу утверждать, что мы исходили из одного и того же принципа[3]. Однако, что касается результатов, я обнаружил, что во многих случаях мои выводы нисколько не отличались от выводов моих предшественников.

В конце моего трактата Вы увидите, что я предложил еще некоторые вопросы того же рода не указывая метода их решения, главным образом потому, что видел, что подходящее изложение рассуждений, приводящих к ответу, потребует слишком много усилий, и, во-вторых, из-за того, что мне представлялось полезным оставить нашим читателям (если они найдутся) нечто для обдумывания, а это послужит им и как упражнение, и как способ провести время.

Ваш преданнейший слуга Хр. Гюйгенс де Зюйлихен

Гаага, 27 апреля 1657 г.

[110] [Предисловие Х. Гюйгенса]

Хотя результаты чисто азартных игр недостоверны, шанс игрока выиграть или проиграть тем не менее имеет определенное значение. Пример: если кто-то держит пари на то, что с первого раза выбросит шестерку на игральной кости, то его выигрыш или проигрыш не достоверны, но что определенно может быть вычислено, это насколько шанс его проигрыша превзойдет шанс выигрыша. Так же само, если я играю с кем-либо при условии, что победит тот, кто первым выиграет три партии, и я уже выиграл одну, то еще неясно, кто из нас победит. Но можно достоверно вычислить отношение наших шансов на победу и, следовательно, если мы захотим прервать игру, какова та часть ставки, на которую я должен превосходить его часть. Так же само можно вычислить за какую сумму я могу разумно уступить мою игру кому-то, кто захочет продолжить ее вместо меня. Много вопросов подобного рода могут представиться в аналогичных случаях при двух, трех или более игроках, а так как эти вычисления не являются всеобще известными и часто могут оказаться полезными, я кратко укажу тот метод, при помощи которого я рассмотрел и игру в кости.

В обоих предметах [играх] я исхожу из предположения, что в азартной игре [ожидание] выиграть какую-то вещь стоит столько, что кто-то, имеющий эту стоимость, может получить за нее тот же шанс в справедливой игре, т.е. в игре, которая не имеет целью нанести ущерб кому-либо[4]. Пример: если кто-то держит три экю в одной какой-то руке и семь – в другой, и разрешает мне выбрать одну из них, я говорю, что для меня это предложение имеет ту же цену как если бы я был уверен в получении пяти экю. По существу, имея пять экю, я могу заново воспользоваться случаем заиметь равные шансы на получение трех или семи экю в справедливой игре, см. ниже.

Предложение 1. Имея равные шансы получить a или b, я получаю $(a + b)/2$.

Чтобы не только доказать это правило, но и полностью раскрыть его, назовем стоимость моего шанса x. Следовательно, имея x, я могу снова получить тот же шанс в справедливой игре и пусть она будет такой. Я ставлю x против другого, который ставит столько же. Соглашаемся, что победитель дает a побежденному. Игра справедлива и поэтому я имею равные шансы получить a при проигрыше или $(2x – a)$ при выигрыше, так как в последнем случае я получаю ставку $2x$, из которой должен отдать a другому игроку. Если $(2x – a)$ равно b, то я буду иметь равные шансы получить a или b. Поэтому я полагаю, что $(2x - a) = b$ и получаю стоимость моего шанса $x = (a + b)/2$.

Доказательство просто. По существу, имея $(a + b)/2$, я могу играть на эту сумму против другого игрока, который поставит столько же, и договорюсь с ним, что победитель отдает a другому игроку. Таким образом, у меня есть равные шансы получить a, если я проиграю, и b – если выиграю, потому что в этом последнем случае я получу ставку $(a + b)$ и отдам a своему противнику.

В числах. Если я имею равные шансы получить 3 или 7, стоимость моего шанса, в соответствии с данным Предложением, равна 5. И ясно, что получив 5, я могу [за эту сумму] снова добыть тот же шанс. По существу, если я ставлю 5 против другого, ставка которого также равна 5, при условии, что победитель отдает 3 проигравшему, то игра справедлива и ясно, что я имею равные шансы получить 3 при проигрыше или 7 при выигрыше ибо в этом [последнем] случае я получу 10, из которых отдам ему 3.

Замечания [Я. Б.]

Автор этого трактата[5] разъясняет здесь основополагающий принцип всего искусства. Он разъясняет его в общем в конце своего Предисловия и более подробно в этом предложении и в двух следующих. Поскольку очень важно, чтобы этот принцип был правильно понят, я постараюсь обосновать его рассуждением, более популярным **[111]** нежели предыдущее [Гюйгенса] и более подходящим для всеобщего постижения. В качестве аксиомы или определения я постулирую лишь следующее: *Каждый может, или каждому следует ожидать именно столько, сколько он приобретет непременно*.

По отношению к Предложению 1 мы можем представить себе, что кто-то спрятал 3 или a одинаковые монеты в одной руке и 7 или b в другой и затем разрешил мне и другому лицу получить то, что находится у него в руках, – одному из нас то, что в одной руке, а другому – то, что в другой. В этом случае мы вместе непременно получим и должны поэтому ожидать то, что спрятано в обеих руках, а именно 10 монет или $a + b$. Но следует также признать, что каждый из нас имеет равное право на то, что мы ожидаем. Следовательно, полное ожидание должно быть разделено на две равные части и каждому из нас должна быть дана половина полного ожидания, т. е. 5 монет или $(a + b)/2$.

Следствие 1. Отсюда ясно, что если кто-то спрятал некоторую сумму a в одной руке и ничего не прячет в другой, то жребий или ожидание каждого будет равен (равно) ее половине или $a/2$.

Пояснительный комментарий. Из сказанного можно усмотреть, что мы не употребляем слово *ожидание* в обычном смысле, в соответствии с которым нам обычно следует ожидать или надеяться на самое лучшее, хоть с нами может произойти и худшее. Здесь мы принимаем во внимание ту степень, в которой наша надежда наилучшего умеряется и ослабляется опасением получить нечто худшее. И поэтому под его “значением” мы всегда понимаем что-то промежуточное между наилучшим, на что мы надеемся, и наихудшим, чего мы опасаемся. Это должно быть понято и повсюду в дальнейшем.

Предложение 2. Имея равные шансы получить a, b или c, я получаю $(a + b + c)/3$.

Чтобы доказать это, снова назовем стоимость моего шанса x. Следовательно, имея x, я могу заново добыть те же шансы для справедливой игры и пусть она будет такой. Я играю против двух других и каждый из нас троих ставит x. Я договариваюсь с ними, что в случае их выигрыша первый из них даст мне b, а второй – c, а если выиграю я, то я дам b второму и c – третьему.

Ясно, что игра справедлива. Итак, я имею равные шансы получить b, если выиграет первый из них, или c, если выиграет второй, или, наконец, $(3x - b - c)$, если выиграю я сам, потому что в этом последнем случае я получу ставку $3x$, из которой отдам b одному из них и c – другому. Но $3x - b - c$ равно a и я имею равные шансы получить a, b или c. И поэтому $3x - b - c = a$, откуда я получаю стоимость моего шанса $x = (a + b + c)/3$. Так же само можно установить, что, имея равные шансы получить a, b, c или d, я получаю $(a + b + c + d)/4$ и т. д.

Замечания [Я. Б.]

Вот другой способ доказать это. Представим себе три коробки; в одной спрятано a, в другой – b и в третьей – c. Мне и двум другим разрешается выбрать по коробке и забрать то, что в ней находится. Таким образом, мы втроем заберем все три коробки и получим всё то, что спрятано в них, т. е. $a + b + c$. Поскольку нельзя сказать, что кто-то из нас троих имеет бóльшую надежду или ожидание чем другие, то ожидание каждого равносильно третьей части этого общего количества, т. е. $(a + b + c)/3$. Так же само, если имеется четыре коробки, в которых спрятаны a, b, c и d, **[112]** и мне по жребию должна достаться одна из них, мое ожидание следует полагать равным четверти общего количества, т. е. $(a + b + c + d)/4$. Если имеется пять коробок, мое ожидание окажется равным $(a + b + c + d + e)/5$ и т. д.

Следствие. Аналогично, ясно, что если в одной или в нескольких коробках ничего нет, мое ожидание будет частью того, что окажется в остальных, – одной третью в случае трех коробок, четвертью если их четыре, пятой частью если их пять и т. д.

Предложение 3. Имея p шансов получить a и q шансов получить b, и полагая все эти шансы равными друг другу, я получаю $(pa + qb)/(p + q)$.

Чтобы вывести это правило, обозначим заново стоимость моего шанса через x. Следовательно, имея x, я могу вернуться в свое прежнее состояние при помощи справедливой игры. Для этого я наберу столько игроков, что вместе со мной их будет $(p + q)$ и каждый из нас поставит x, так что общая ставка будет $px + qx$. Каждый играет за себя и имеет один и тот же шанс победить. Предположим, кроме того, что с q игроками, т.е. с каждым из них по-отдельности, я договариваюсь, что если кто-то из них выиграет, он даст мне сумму b, и что если выиграю я, я дам ему столько же. Предположим, наконец, что с оставшимися $(p - 1)$ игроками, или, точнее, с каждым из них по-отдельности, я договариваюсь, что если кто-то из них выиграет, он даст мне сумму a, и что если выиграю я, я дам ему столько же.

Ясно, что условия игры справедливы, так как не ущемлены интересы ни одного игрока. И видно, что теперь я имею q шансов получить b,

($p-1$) шанс получить a и один шанс (если выиграю именно я) получить ($px+qx-bq-ap+a$). По существу в этом последнем случае я получу ставку ($px+qx$), из которой я должен буду отдать b каждому из q игроков и a – каждому из ($p-1$) игроков, а всего $qb+pa-a$. И, если ($px+qx-bq-ap+a$) равно a, у меня будет p шансов получить a, – потому что я уже имел ($p-1$) шанс получить эту сумму, – и q шансов получить b. Таким образом, я возвращаюсь к своим прежним шансам и поэтому приравниваю ($px+qx-bq-ap+a$) = a и, в соответствии с утверждением этого Предложения, нахожу, для стоимости моего шанса, что $x=(ap+bq)/(p+q)$.

В числах. Если я имею 3 шанса выиграть 13 и 2 шанса – выиграть 8, то в соответствии с этим правилом я, так сказать, обладаю суммой 11. И легко усмотреть, что, имея 11, я могу снова получить те же шансы. По существу я могу играть с четырьмя другими игроками, причем каждый из нас пятерых должен (peut) поставить 11. Я договариваюсь с двумя из них, что если кто-либо из них выиграет, он дает мне 8, а если выиграю я, я даю каждому из них ту же сумму. Я также договариваюсь с двумя другими, что тот из них, кто выиграет, даст мне 13, а если выиграю я, я дам каждому 13. Эта игра справедлива и видно, что я таким образом имею 2 шанса получить 8, а именно в случае когда выигрывает один из тех двоих игроков, которые обещали вычесть для меня эту сумму из ставки, и 3 шанса получить 13, либо если выиграет один из остальных двоих, которые обещали мне эту сумму при выигрыше, либо если я выиграю сам. На самом деле, в этом последнем случае я получаю ставку, которая равна 55, и из нее я должен буду отдать 13 каждому из первых двух игроков и 8 – каждому из двух других, так что мне останется также 13.

Замечания [Я. Б.]

Иначе. Пусть игроков вместе со мной будет столько же, сколько всего случаев, а именно $p+q$ и пусть для каждого игрока имеет место один случай. Мы можем, например, представить себе, что имеется $p+q$ коробок, притом известно, что в каждой из них спрятано столько, сколько будет получено в соответствующем случае: a – в каждой из p коробок и b – в каждой из q коробок. Если каждый игрок возьмет по коробке, так что все вместе они заберут все коробки, то все вместе они неминуемо получат всё, что в них спрятано, а именно $pa+qb$. Поэтому, раз все игроки имеют равные ожидания, то то, что они получат все вместе, должно быть распределено между числом игроков или случаев. Это приводит к ожиданию каждого, равному $(pa+qb)/(p+q)$. Тот же самый довод может показать нам, что если я получу a в p случаях, b – в q случаях и c – в r случаях, то мой жребий окажется равным $(pa+qb+rc)/(p+q+r)$.

[113] Следствие 1. Отсюда ясно, что, во-первых, если я получу a в p случаях и ничего – в q случаях, то мой жребий окажется равным $pa/(p+q)$.

Следствие 2. Также ясно, что если количества случаев имеют общий делитель, значение ожидания можно свести к меньшим числам. Если я получаю a в mp случаях и b – в mq случаях, то в соответствии с правилом [в Предложении 3] мое ожидание будет $(mpa+mqb)/(mp+mq)$ и, при сокращении на m, оно станет равным $(pa+qb)/(p+q)$.

Следствие 3. Если имеется p случаев, при которых я получаю a, q случаев когда я получаю b и r – когда я получаю c, то это имеет для меня ту же ценность как если бы p и q случаев были объединены и было бы $(p + q)$ случаев, при которых я получаю $(pa + qb)/(p + q)$ и r случаев, при которых я получаю c. Ибо в соответствии с правилом мой жребий всё равно окажется равным $(pa + qb + rc)/(p + q + r)$.

Следствие 4. Предположим, что имеется p случаев, при которых я получу a, q случаев, при которых я получу b и r случаев, которые оставляют меня в моем нынешнем положении, т. е. с моим первоначальным жребием. Тогда этот жребий будет равен $(pa + qb)/(p + q)$, что очевидно будет тем же, что я получил бы, не имей места ни один из r случаев. Ибо, если я приму x за его [первоначальное] значение, тогда, по предположению, имеется p случаев, при которых я получаю a, q – при которых я получаю b и r – при которых я получаю x и в соответствии с правилом мой жребий становится равным $(pa + qb + rx)/(p + q + r)$. Отсюда следует, поскольку мой жребий обозначен через x, что $x = (pa + qb + rx)/(p + q + r)$ или […] $x = (pa + qb)/(p + q)$.

Следствие 5. Предположим, что имеется p случаев, при которых я получаю a (притом половину этого я внес [в качестве ставки]) и q случаев, при которых я ничего не получаю. Тогда ожидание $pa/(p + q)$, которое определяется по Следствию 1, см. выше, относится к полной ставке и обозначает ту ее часть, которая положена мне, а не мою чистую прибыль или потерю. Ибо если дело идет о чистой прибыли или потере, я принимаю во внимание, что, получая ставку a, я выигрываю только $a/2$. Если я ничего не получаю из ставки, то теряю $a/2$, т. е. получаю $– a/2$. Поэтому мой жребий в этом смысле становится равным

$$[pa/2 + q\,(–a/2)]/(p + q) = [(p – q)a/2]/(p + q).$$

Это означает прибыль если p более q и потерю, если q больше p.

Следствие 6. Пусть имеется p случаев чтобы получить a и q случаев, чтобы получить b и я не вношу никакой части ни от a, ни от b, но должен уплатить взнос n за бросок костей. Здесь опять-таки мое ожидание $(pa + qb)/(p + q)$ никак нельзя считать прибылью. Вместо этого, оно должно вначале быть уменьшено на n. Действительно, если я даю другому лицу n, а он дает мне a или b обратно, то это в точности то же, как если бы я ничего не давал ему, но получал либо $a – n$, либо $b – n$. Это уменьшает мое ожидание до

$$\frac{p\,(a-n)+q\,(b-n)}{p+q} = \frac{pa+qb}{p+q} - n.$$

Как и раньше, это означает либо прибыль, либо потерю в зависимости от того, какая часть больше, положительная или отрицательная.

Пояснительный комментарий. После обдумывания становится ясным, что это вычисление весьма схоже с [вычислением по] арифметическому правилу, называемому *О смесях*, в соответствии с которым в заданных количествах смешиваются вещи различной стоимости и отыскивается стоимость смеси. По существу в обоих случаях вычисления очевидно те же самые. Так же как сумма произведений количеств и цен отдельных составляющих, разделенная на общее количество всех составляющих, определяет искомую цену, которая всегда оказывается промежуточной между высшей и низшей ценами, так же и сумма произведений **[114]** чисел случаев и величин, получаемых в этих случаях, разделенная на общее число случаев, определит значение ожидания, притом оно, аналогично, всегда окажется в промежутке между наибольшей и наименьшей величинами, которые можно получить. Поэтому, если числа случаев и величин в первой задаче те же, что числа случаев и величин, получаемых в каждом случае во второй задаче, то цена смеси и ожидание также будут выражены одним и тем же числом.

Пусть, например, три пинты вина ценой 13 смешаны с 2 пинтами ценой 8 […] мы получим 11 в качестве цены одной пинты смеси. В соответствии с правилом, так же должно быть оценено ожидание любого, который имеет 3 шанса получить 13 и 2 шанса получить 8.

Предложение 4. Предположим[6], что я играю с кем-то при условии, что побеждает тот, кто первым выиграет три партии и что я уже выиграл две, а он – одну. Я желаю знать, какая часть ставки мне причитается, если мы захотим прекратить игру и справедливо разделить ставки.

Необходимо начать с наиболее простого случая, чтобы подойти к решению вопросов, поставленных раннее по поводу раздела ставки между многими игроками, шансы которых не равны друг другу. Вначале следует заметить, что достаточно рассмотреть те [несыгранные] партии, которых нехватает игрокам [для победы]. **[A]** Потому что ясно, что если побеждает тот, кто первым выиграет 20 партий, и если я уже выиграл 19, а мой противник – 18, то мое преимущество оказывается тем же самым, что и в рассматриваемом случае, в котором при требуемых трех выигрышах я выиграл две партии, а он – только одну, так как в обоих случаях мне нехватает только одной партии, а ему – двух.

Затем, чтобы вычислить причитающуюся каждому из нас долю, следует обратить внимание на то, что произойдет, если мы продолжим игру. Ясно, что если я выиграю первую [из несыгранных] партию, я закончу игру и таким образом получу всю ставку, которую я обозначу a **[B]**, но если первую партию выиграет другой игрок, наши шансы уравняются, поскольку каждому не будет хватать одной партии, и таким образом каждый получит право на $a/2$. И ясно, что у меня столько же шансов выиграть первую партию как проиграть ее. Поэтому я имею равные шансы получить a и $a/2$, что, по Предложению 1, соответствует их полусумме, т.е. $3a/4$, так что моему противнику остается $a/4$ **[C]**. Впрочем, я могу тем же методом и непосредственно проделать вычисления для него **[D]**. Отсюда следует, что тот, кто захочет продолжить игру вместо меня, должен будет (pourrait) предложить мне $3a/4$ и что всегда можно держать пари в отношении 3:1 **[E]**, что игрок выиграет одну партию до того, как его противник выиграет две.

Замечания [Я. Б.]

A. Вообще, при вычислении жребиев за все партии, которые еще впереди, мы не должны принимать в расчет прошедшие партии. Ибо в каждой новой партии вероятность, что судьба будет и впредь благоволить тем, к кому она была благосклонна раньше, не выше вероятности того, что она окажется благосклонна к тем, кто был наиболее неудачлив. Я отмечаю это в противоположность нелепому мнению многих, представляющих себе судьбу как некую привычку, которая сохраняется у человека на некоторое время и каким-то образом почти дает ему право ожидать продолжения подобной судьбы.

B. Мы можем применить букву *а*, как это делает автор, чтобы обозначить денежные ставки, которые должны быть разделены между игроками пропорционально их шансам. Но, как мы более основательно покажем в последней части книги[7] она [буква] может быть применена и в более общем смысле, чтобы обозначить всё что угодно, даже если это никак не делится на части, но может быть представлено делимым на число случаев, в которых оно выигрывается или теряется, происходит или не происходит. Среди вещей, которые делятся на части в таком мыслимом смысле, могут быть, например, любые награды, лавровые венки, или победа, **[115]** положение или состояние человека или вещи, служба в любом государственном или общественном учреждении, любая взятая на себя работа, жизнь или смерть и т. д. Так, если князь в качестве особой милости разрешает двум преступникам состязаться [в азартной игре] с равными шансами остаться в живых, то каждый из них в соответствии с Предложением 1 считается имеющим 1/2 жизни и 1/2 смерти. Таким образом, можно назвать человека даже в прямом смысле наполовину живым и наполовину мертвым.

C. Другими словами, противник получит остаток полной ставки *а*, потому что, закончи они игру, оба игрока вместе непременно получили бы полное *а*. Но если может представиться случай, при котором они оба получат больше или меньше чем полное *а*, то сумма ожиданий одного и другого может и не равняться *а*. Если, например, двоих, заслуживающих виселицы, заставят бросить кости с тем, чтобы тот, кто выбросит меньшее число очков, будет повешен, а другому сохранят жизнь, и что обоим разрешат жить, если они выбросят одно и то же число очков, то, как мы увидим позже, ожидание одного из них окажется равным $7a/12$ или 7/12 жизни. Но отсюда не следует, что ожидание другого будет только 5/12 жизни. Действительно, поскольку их шансы, очевидно, одни и те же, другой тоже будет иметь ожидание 7/12 жизни, а оба вместе – 7/6 жизни или больше, чем одна целая жизнь. Это происходит потому, что здесь нет ни одного случая, при котором даже один после окончания игры не останется в живых, а в то же время есть такие случаи, при которых в живых остаются оба.

D. Довод таков. Если мой противник выиграет следующую партию, наши шансы окажутся равными и обеспечат каждому $a/2$. Если же выиграю я, он не получит ничего. Поэтому, раз он может одинаково легко получить либо $a/2$, либо ничего, его ожидание по Следствию 1 к Предложению 3 надо полагать равным $a/4$.

E. Должно быть доказано, что игрок, имеющий 3 шанса выиграть и один проиграть, или тот, кто ожидает 3/4 ставки, может ставить 3 против одного. Для этого нам нужно только предположить, что он займет места трех игроков. Ибо когда играют четверо, шансы которых равны и каждый ставит 1, то каждый, по Следствию 1 к Предложению 3, будет ожидать как раз столько, сколько он поставил, т. е. 1/4 общей ставки. И поэтому любые трое из них будут ожидать три четверти общей ставки, четвертый же лишь 1/4. Но поскольку эти трое и поставили 3, тогда как четвертый поставил лишь 1, то ясно, что совершенно справедливо, чтобы кто-то, кто хочет занять места трех игроков, или кто желает иметь ожидание втрое больше, чем у другого игрока, должен будет и поставить втрое больше.

Или иначе: некто, имеющий три шанса выиграть и один – проиграть, может столь же часто выигрывать трижды когда другой игрок выиграет только один раз. Ввиду этого, если игра должна быть справедливой, необходимо, чтобы за эти три раза он выиграл столько же, сколько другой за один раз, а это может произойти только, если он поставит три к одному. И таким образом в общем может быть показано, что если игроки желают иметь равные шансы, то справедливо, что в той же степени, в какой одно лицо имеет большее ожидание выигрыша, оно должно и поставить больше.

Предложение 5. Предположим, что мне нехватает одной партии, а моему противнику – трех. В этом предположении речь идет о разделе ставки[8].

Рассмотрим заново положение, в котором мы окажемся, если я выиграю первую партию, или, лучше, если ее выиграет мой противник. Если я выиграю ее, я получу ставку a, но если ее выиграет он, ему будет нехватать еще двух против одной, которая нехватает мне. Мы окажемся в положении, которое было рассмотрено в предыдущем предложении, и, как мы там видели, мне будет положено $3a/4$. Итак, я имею равные шансы получить a или $3a/4$, что в соответствии с первым предложением дает мне $7a/8$. Остаток $1a/8$ другому игроку. И мой шанс поэтому относится к его шансу как 7:1. **[116]**

Так же как вычисление зависело от предыдущего,полученный результат необходим для вычисления того, что относится к последующему случаю, в котором мне нехватает одной партии, тогда как моему противнику нехватает четырех. Тем же способом можно определить, что в этом [последнем] случае мне положено 15/16 ставки, а ему 1/16.

Замечания [Я. Б.]

Исходя из последовательности дробей, полученных в этом и в предыдущем предложении, $3a/4$, $7a/8$, $15a/16$, мы можем далее заключить, что мой жребий окажется равным $31a/32$, если моему противнику нехватает пяти партий, $63a/64$, если ему нехватает шести и $127a/128$, если семи. И вообще, если мне нехватает одной партии, а моему противнику нехватает любого числа их, мой жребий будет относиться к его жребию как […] [фактически: $(2^n – 1):1$].

Предложение 6. Предположим, что мне нехватает двух партий, а моему противнику – трех.

Первая партия теперь означает, что либо мне не будет хватать еще одной партии, а другому игроку трех (причем тогда, в соответствии с предыдущим, мне будет причитаться $7a/8$), либо каждому из нас не будет хватать двух партий и в этом случае, поскольку наши шансы сравнялись, мне будет положено $a/2$, что в соответствии с первым предложением дает мне $11a/16$. Таким образом, мне положено одиннадцать частей ставки, а моему противнику – пять.

Предложение 7. Предположим, что мне нехватает еще двух партий, а ему – четырех.

Если я выиграю первую партию, мне таким образом останется выиграть еще одну против четырех, а если проиграю – еще две против трех. Поэтому я имею равные шансы получить 15*a*/16 или 11*a*/16, что в соответствии с первым предложением дает мне 13*a*/16. оказывается, что более выгодно иметь две недостающие партии против четырех, нежели одну против двух **[F]**. Ибо в последнем случае, т. е. когда нехватает одной партии против двух, моя доля по Предложению 4 составляет 3*a*/4, что меньше, чем 13*a*/16.

Замечания [Я. Б.]

F. При помощи аналогичных соображений шанс игрока, которому нехватает для победы трех партий, тогда как его противнику нехватает шести, еще лучше, ибо его доля оказывается равной 219*a*/256, что превышает 13*a*/16. И тот, кому нехватает для победы одной партии, тогда как его противнику нехватает четырех, не столь же удачен, как тот, кому нехватает двух, если его противнику нехватает восьми; он удачен настолько же, насколько игрок, которому нехватает двух партий, тогда как его противнику – шести. Не научи нас этому наши вычисления, никого бы, видимо, нельзя было убедить, что жребии каждого не должны относиться друг к другу так же, как и количества недостающих партий. И это должно предупредить нас быть осторожным в наших суждениях и избегать [избавляться от] привычки делать немедленные заключения из каждой аналогии, которую мы находим в вещах, что очень часто происходит даже с теми, кто по-видимому знает очень многое.

Здесь удобно привести таблицу для двух игроков, подобную той, которую автор поместил в Предложении 9, см. ниже.

[117] Таблица для двух игроков. Жребии игрока А[9]

Нехватает партий Игроку А	Игроку В						
1	1/2	3/4	7/8	15	31	63	127
2	1/4	4/8	11/16	26	57	120	247
3	1/8	5/16	16/32	42	99	219	466
4	1	6	22	64	163	382	848
5	1	7	29	93	256	638	1486
6	1	8	37	130	386	1024	2510
7	1	9	46	176	562	1586	4096
8	1	10	56	232	794	2380	6476
9	1	11	67	299	1093	3473	9949

Эту таблицу можно очень легко сколь угодно расширить. Первую строку [дробей] можно продолжить в соответствии с Замечаниями к Предложению 5. Первую колонку [дробей] можно продолжать последовательным делением пополам. Все числа таблицы могут быть продолжены; каждое из них является полусуммой двух непосредственно предшествующих, – одного сверху и одного слева [например, 16/32 = 1/2 (11/16 + 5/16)].

Сказанное вполне ясно объясняет подобное построение. Однако, в приложении к гл. 4 части 2-й книги мы увидим, как определять ожидание двух игроков, которым недостает любого числа партий, без неопределенного продолжения таблицы.

Предложение 8. Теперь предположим, что играют трое и что первому, равно как и второму, нехватает одной партии, тогда как третьему нехватает двух.

Чтобы вычислить долю первого игрока, следует снова рассмотреть то, что произойдет с ним, если первую партию выиграет он сам или кто-то из двух других. Если выиграет он, то получит ставку, которую я обозначу через a. Если эту партию выиграет второй, то первый не получит ничего, потому что второй закончит игру. Если же выиграет третий, каждому из троих не будет хватать одной партии, так что первый, равно как и каждый из остальных, получит право на $a/3$. Итак, первый имеет 1 шанс получить a, 1 шанс получить 0 и 1 шанс получить $a/3$ (потому что каждый из трех имеет один и тот же шанс выиграть первую партию), так что в соответствии с Предложением 2 он получает $4a/9$. Второй игрок, стало быть, получает ту же долю, так что третьему остается $a/9$. Можно и непосредственно найти долю третьего **[G]** и после этого вычислить доли остальных.

Замечания [Я. Б.]

G. Это, конечно, делается так. Если третий игрок сам выиграет следующую партию, его ожидание будет $a/3$, но если ее выиграет первый или второй игрок, третий не получит ничего. Он таким образом имеет один шанс получить $a/3$ и два шанса получить 0. По Следствию 1 к Предложению 3 это дает $a/9$.**[118]**

Предложение 9. Чтобы вычислить долю каждого из заданного числа игроков, каждому из которых нехватает заданного числа партий, следует прежде всего установить, чтó причитается некоторому игроку, а затем по очереди – остальным, если он сам или какой-то другой игрок выиграет следующую партию. Сложив все эти части и разделив полученную сумму на число игроков, мы получим его искомую долю[10]. [Аналогично определяются доли остальных игроков.]

Пусть играют три человека, A, B и C, и A нехватает одной партии, а B, равно как и C – двух. Желательно знать, какая доля ставки, обозначенной через q, причитается игроку B. Прежде всего исследуем, на какую долю B будет иметь право, если он сам или A или C выиграет первую последующую партию. Если выиграет A, он закончит игру и, следовательно, B получит 0. Если выиграет сам B, ему, как и A, не будет хватать еще одной партии, тогда как C не будет хватать двух. В соответствии с Предложением 8, B получает право на $4q/9$. Наконец, если последующую партию выиграет C, и ему, и A не будет хватать одной партии, тогда как B не будет хватать двух. В соответствии с тем же предложением, B получает право на $q/9$. Теперь требуется сложить доли, которые достаются B по этим трем предположениям, т.е. 0, $4q/9$ и $q/9$. Получается $5q/9$. Разделив это число на три, т.е. на число игроков, получим $5q/27$, справедливую долю игрока B.

Мы это доказываем по Предложению 2. По существу, поскольку B имеет равные шансы получить 0, $4q/9$ и $q/9$, он, так сказать, имеет, в соответствии с этим предложением, $(0 + 4q/9 + q/9)/3$ или $5q/27$. И ясно, что делитель 3 равен числу игроков. Но чтобы узнать, что причитается в каждом случае каждому игроку, когда он сам или кто-то другой выигрывает первую последующую партию, следует начать с вычисления наиболее простых случаев и затем, исходя из этого, вычислять последующие случаи. Ибо, как в только что рассмотренной задаче, мы не смогли бы подчинить ее вычислению без решения Предложения 8, в котором недостающих партий было 1, 1 и 2. Равным образом, доля каждого игрока в случае, когда недостающих партий 1, 2 и 3, не может быть вычислена без предварительного исследования этих долей по тому же предложению и при 1, 2 и 2, и при 1 1 и 3 нехватающих партий. По этому методу можно найти доли, соответствующие числам, указанным в следующей таблице, и бесконечному множеству других.

Таблица для трех игроков[11]

1, 1, 2/4:4:1	1, 2, 2/17:5:5	1, 1, 3/13:13:1
1, 2, 3/19:6:2	1, 1, 4/40:40:1	1, 1, 5/121:121:1
1, 2, 4/178:58:7	1, 2, 5/542:179:8	1, 3, 3/65:8:8
1, 3, 4/616:82:31	1, 3, 5/629:87:13	2, 2, 3/34:34:13
2, 2, 4/338:338:53	2, 2, 5/353:353:23	2, 3, 3/133:55:55
2, 3, 4/451:195:83	2, 3, 5/1433:635:119	

[119] Относительно игральных костей можно спросить: на какое количество бросков одной кости можно держать пари на выпадение шестерки, или, если на то пошло́, одного из других чисел? И также, что на двух костях выпадут две шестерки, или три шестерки на трех. И, в самом деле, можно задать еще и другие вопросы. Чтобы их разрешить, надо заметить следующее. Прежде всего, что при одной кости существует шесть равновероятных возможностей, потому что я предполагаю, что кость имеет форму совершенного куба. Далее, при двух костях существует 36 различных возможностей, которые также равновероятны. По существу, с каждым броском первой кости можно сочетать каждый из шести возможных номеров второй. И 6 раз 6 это 36.

Так же само имеется 216 возможностей при трех костях, потому что с каждой из 36 возможностей для двух костей можно сочетать любой из возможных исходов третьей и 6 раз 36 это 216. Так же само мы найдем, что при четырех костях имеется $6 \cdot 216 = 1296$ исходов и можно продолжать вычислять таким же образом для любого числа костей, умножая предыдущее число возможностей на 6 каждый раз, когда добавляется новая кость.

Далее, следует знать, что при одном броске двух костей можно только по одному разу добиться двух и 12 очков и по 2 раза – трех и 11 очков. И если обозначить эти две кости через A и B, то ясно, что для получения трех очков A должно дать одно очко и B – два или, конечно же, B – 1 и A – 2. То же самое для выкидывания 11 очков: A должно дать 5 и B – 6, или, разумеется, A – 6 и B – 5. Четыре очка осуществляются тремя способами, а именно A – 1, B – 3 или A – 3, B – 1, или A – 2 и B – 2. Также тремя способами выкидываются 10 очков; 5 и 9 очков – четырьмя способами; 6 или 8 очков – пятью; 7 очков – шестью.

С тремя костями мы находим число возможностей равным

Для 3 и 18 очков	1	Для 7 и 14 очков	15
Для 4 и 17 очков	3	Для 8 и 13 очков	21
Для 5 и 16 очков	6	Для 9 и 12 очков	25
Для 6 и 15 очков	10	Для 10 и 11 очков	27

Замечания [Я. Б.]

Точно таким же путем, которым автор нашел количество случаев для выбрасывания любого числа очков двумя и тремя костями, мы можем также определить количество случаев для выбрасывания любого числа очков четырьмя, пятью или более костями. Но если не исследовать количества [случаев для] бросков каким-нибудь методичным образом, легко упустить один или более бросков, особенно если костей много. И поэтому я покажу, какой метод следует применять, чтобы быть уверенным, что мы найдем все броски и не пропустим ни одного.

Вначале мы должны спросить, сколькими способами можно составить заданное число очков, предполагая, что оно должно быть составлено из стольких частей [слагаемых] сколько имеется костей и что ни одна часть не может превосходить шести. Затем мы должны спросить, сколько различных бросков соответствует каждому из этих способов. Но этому наверняка лучше научиться на примерах, чем на правилах. Поэтому давайте найдем сколько бросков четырех костей дадут 12 [очков].

Чтобы сделать это, я начинаю с четырех единиц, выписывая 1. 1. 1. 1. Затем я повторно увеличиваю первую из них на единицу пока не дойду до шести и не получу 6. 1. 1. 1. Но поскольку сумма этих чисел еще не достигает заданного числа 12, я увеличиваю и второе число до двух и трех, выписывая 2. 2. 1. 1 и затем 3. 3. 1. 1 и каждый раз я снова увеличиваю первое число до шести, так что получаю 6. 2. 1. 1 и 6. 3. 1. 1, суммы [чисел которых] все еще меньше заданного числа. И я **[120]** продолжаю, выписывая 4. 4. 1. 1, а когда первое 4 возрастает до шести, я наконец получаю 6. 4. 1. 1, сумма [чисел] которых равна 12 и я поэтому выписываю эти числа в одном из [будущих] столбцов. И затем я пишу 5. 5. 1. 1. Поскольку эти числа также составляют 12, я отдельно выписываю и их.

Теперь, поскольку и 6. 5. 1. 1 и 6. 6. 1. 1 превосходят 12, я не принимаю их во внимание и увеличиваю третью единицу, которая до сих пор оставалась без внимания, до двух, записывая 2. 2. 2. 1. Но раз при возрастании первой двойки до шести числа 6. 2. 2. 1 все еще не достигают 12, я перехожу к 3. 3. 2. 1. Когда, как обычно, я увеличиваю первое из этих чисел, то получаю числа 6. 3. 2. 1, сумма которых равна 12 и они поэтому должны быть записаны. Затем я увеличиваю только второе число и даже уменьшаю первое на единицу и получаю другие четыре числа, 5. 4. 2. 1, которые должны быть записаны.

Я более не увеличиваю второе число до пяти или шести, потому что для получения суммы, равной 12, первое число придется тогда уменьшить до четырех или трех и таким образом будет повторена какая-то из предыдущих комбинаций. Необходимо постоянно соблюдать осторожность, чтобы ни одна предшествующая часть последовательности не оказалась меньше последующей. И так я сразу перехожу к 3. 3. 3. 1 и, после замены первой тройки на 5, получаю числа 5. 3. 3. 1, которые составляют желаемую сумму.

Теперь, увеличивая второе число до четырех и уменьшая первое до четырех, я получаю еще четыре числа, удовлетворяющих моему требованию, 4. 4. 3. 1. И я уже, очевидно, не могу увеличивать ни одного из первых двух чисел, ни даже третьего числа без того, чтобы либо сумма всех четырех не превосходила 12, либо какое-то число не оказалось меньше предыдущего и таким образом не была повторена одна из предыдущих комбинаций.

И, наконец, я увеличиваю последнюю единицу, которая до сих пор оставалась в покое, до двух, и выписываю 2. 2. 2. 2. При увеличении первой двойки до шести, получаем 6. 2. 2. 2, что удовлетворяет моему требованию. Теперь я увеличиваю второе число и уменьшаю первое и на 1, и на 2 и получаю еще две требуемые комбинации, 5. 3. 2. 2 и 4. 4. 2. 2. И снова ясно, что нельзя увеличить ни одной из первых двух частй без того, чтобы не уменьшить другую и тем самым не повторить предыдущую комбинацию, или же не сделать так, что сумма всех чисел превысит 12.

И поэтому я перехожу к 3. 3. 3. 2 или, увеличивая первое, к 4. 3. 3. 2, приводящее к новой комбинации, из которой может быть получено заданное число [12]. Наконец, поскольку по той же причине я не могу более увеличивать ни одной из первых трех частей, я должен увеличить последнюю до трех, записав 3. 3. 3. 3, чья сумма действительно равна 12. Сделав это, я не могу идти дальше; последний член не может быть увеличен, если только один из предыдущих не уменьшен, а это повторит одну из предшествующих комбинаций. И ясно поэтому, что кроме 11 комбинаций, которые мы перечислили, нет никаких других, образующих число 12 из четырех чисел, ни одно из которых не превосходит шести. Эти 11 комбинаций представлены в следующей таблице в том порядке, в котором они были найдены.

Комбинации	**Число бросков**	**Комбинации**	**Число бросков**
6. 4. 1. 1	12	6. 2. 2. 2	4
5. 5. 1. 1	6	5. 3. 2. 2	12
6. 3. 2. 1	24	4. 4. 2. 2	6
5. 4. 2. 1	24	4. 3. 3. 2	12
5. 3. 3. 1	12	3. 3. 3. 3	1
4. 4. 3. 1	12	*Полное число бросков*	125

[121] Аналогичным образом мы можем пересчитать все возможные комбинации для любых желаемых чисел очков и костей. Мы должны быть осторожными, увеличивая число очков на первой кости с шагом единица до шести до того, как увеличивать число очков на второй кости. Равным образом, мы должны увеличивать число очков на второй кости до шести прежде, чем увеличивать их число на третьей; на третьей, прежде чем на четвертой; на четвертой, прежде чем на пятой и т. д.

После этого появляется другая задача. Мы должны найти число бросков для каждой комбинации. Для одной и той же комбинации может оказаться более одного броска, потому что то или иное число может появиться на той или иной кости. Так, если назвать четыре кости *A, B, C*, и *D*, то первая комбинация, 6. 4. 1. 1, может быть получена шестеркой на *A* и четверкой на *B, C* или *D*, или шестеркой на *B* и четверкой на *A, C* или *D* и т. д. И поэтому существует столько же бросков, сколько способов расположить указанные четыре числа. И это равным образом верно и для других комбинаций.

Теперь, числа 6. 4. 1. 1, из которых два различны, а два совпадают, могут быть переставлены друг относительно друга 12-ю способами. Следующая комбинация, 5. 5. 1. 1, в которой одни и те же первые два и последние два числа, могут быть переставлены только шестью способами. Следующая комбинация, 6. 3. 2. 1, все числа которой различны, могут быть переставлены 24 способами (это будет ясно из учения о перестановках и сочетаниях, которое я взялся рассмотреть в части 2-й). Вместе с бросками для других комбинаций этих бросков всего 125, что является полным числом всех бросков четырех костей, которые дают 12 очков. И это то, что мы отыскиваем.

Поскольку при нескольких костях этот метод вычисления числа бросков чрезмерно утомителен и растянут, я теперь представлю метод, который достигает той же цели не только для некоторого [заданного] числа очков, но для любого их числа. Этот метод использует прилагаемую таблицу, которую можно очень легко составить и которая ясно показывает суть этих чисел и соотношения между ними. Вот как эта таблица составляется.

Мы выписываем по порядку, от наименьшего до наибольшего, все числа, которые могут появиться при суммировании чисел очков при заданном количестве костей. Например, для четырех костей мы выписываем 4. 5. 6. 7 ... до 24; для пяти костей, 5. 6. 7. 8 ... до 30 и т. д. Под первыми шестью из этих чисел мы располагаем 6 единиц, под ними – еще 6 и под этими – еще 6 и проделываем это 6 раз, причем каждый раз сдвигаем первую единицу вправо на одно место. После этого мы складываем все единицы, находящиеся в одной и той же колонке и получаем числа 1. 2. 3. 4 и т. д. Затем мы образуем из этих чисел 6 строк, помещая каждую из них на одно место правее предыдущей. И после этого мы складываем эти строки, получая числа 1. 3. 6. 10 и т. д.

И снова мы выписываем эти числа 6 раз, каждый раз на одно место правее предыдущей [строки] и складываем, и повторяем всё это пока не получим из последнего сложения столько чисел, сколько различных сумм очков имеет место при заданном количестве костей. Теперь каждое число определяет число бросков с соответствующим общим числом очков. Так, при четырех костях окажется один бросок, приводящий к 4 или 24 очкам, 4 броска дают 5 или 23, 10, при которых число очков 6 или 22, 20 для 7 и 21 очков и т. д.

Суть построения таблицы нисколько не затруднит внимательного читателя. Поскольку каждая дополнительная кость умножает предыдущее число бросков в 6 раз, ясно, почему числа бросков для предшествующего количества костей должны быть повторены 6 раз и сложены. А поскольку числа очков, соответствующие этим различным броскам, возрастают на 1, на 2, на 3 или более в зависимости от того, оказывается ли 1, 2, 3 или более очков на дополнительной кости, ясно также, почему эта строка бросков **[123]** должна каждый раз сдвигаться на одно место вправо, – именно потому, что каждое число бросков соответствует числу очков на единицу бо́льшему, чем в предыдущей строке.

Заметьте, что ввиду недостатка места не все числа очков для пяти и шести костей могли быть включены в таблицу. Но выпавшие числа могут быть легко найдены по дополнительным числам. Мы называем числа очков, равно отстоящие от крайних, дополнительными [друг к другу] и количества бросков, приводящие к ним, всегда одни и те же.

Иногда бывает интересно узнать, и потому не будет неуместно указать здесь, количества бросков трех костей, приводящие к дублетам [дупелям] и триплетам, которые французы называют doublets и rafles. Эти термины означают, что на всех трех костях или по меньшей мере на двух из трех числа очков одни и те же. Ясно, что имеется только один бросок, приводящий к трем шестеркам и также один, дающий три пятерки, один для трех четверок и т. д. И поэтому имеется только 6 бросков, дающих триплеты. Но с другой стороны существует, например, 15 бросков, которые приводят к двум шестеркам. Действительно, если кости назвать *A, B* и *C*, то две шестерки могут появиться либо на костях *A* и *B*, либо на *A* и *C*, либо на *B* и *C*, что приводит к трем случаям. И для каждого из них может пятикратно изменяться бросок третьей кости, на которой должно появиться иное число очков. Поэтому здесь оказывается пять раз по три или 15 случаев, при которых можно выбросить две шестерки. Поскольку то же самое можно сказать про две пятерки, про две четверки и про остальные [дублеты], то всего для дублетов имеется шесть раз по 15 или 90 возможных бросков. А так как всех бросков для трех костей 216, то остающиеся 120 бросков будут простыми. Это последнее число могло быть найдено и непосредственно.

[122] Таблица[12]

Число костей	Число очков																
1	1	2	3	4	5	6											
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12						
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 и т. д.
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21 и т. д
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22 и т. д.

Число бросков для заданного числа костей

1	1	1	1	1	1	1											
		1	1	1	1	1	1										
			1	1	1	1	1	1									
				1	1	1	1	1	1								
					1	1	1	1	1	1							
						1	1	1	1	1	1						
2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1						
3	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25 и т. д.							
4	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125 и т. д.				
5	1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780 и т. д.			
6	1	6	21	56	126	252	456	756	1161	1666	2247	2856	3431	3906	4221	4332	4221 и т. д.

[123, продолжение] Предложение 10. Найти на какое количество бросков одной кости можно держать пари о выпадении шестерки.

Ясно, что игрок, который согласится выкинуть 6 с одного раза, имеет 1 шанс выиграть ставку и 5 – чтобы ее потерять, потому что против него 5 возможностей и лишь одна – за него. Назовем ставку a. Имеется, стало быть, 1 шанс получить a, и 5 шансов не получить ничего, что означает для него, в соответствии с Предложением 2[13], получение $a/6$. Остальные $5a/6$ – тому, кто устроил игру. Ставка того, кто берется играть на указанных условиях, должна поэтому составлять лишь 1 против 5.

Доля того, кто берется выкинуть 6 в двух бросках, вычисляется следующим образом. Если он добьется успеха в первом броске, то выиграет a. Если нет, у него есть еще один бросок, который по предыдущему вычислению принесет ему $a/6$. Но у него есть только один шанс выкинуть 6 с первого раза и 5 шансов не добиться успеха. И поэтому он имеет вначале 1 шанс получить a и 5 шансов получить $a/6$, и это, в соответствии с Предложением 2, означает $11a/36$. Остается $25a/36$ тому, кто играл против него. Тот, кто берется играть на таких условиях, может поэтому ставить 11 против 25, что меньше, чем 1 против 2.

Отправляясь от этого результата, можно тем же путем вычислить, что доля того, кто берется выкинуть 6 с трех бросков, составляет $91a/216$ и что он может поэтому ставить 91 против 125, т.е. чуть меньше, чем 3 против 4. Доля того, кто играет на 4 броска, $671a/1296$ и он поэтому может ставить 671 против 625, т.е. более чем 1 против 1 **[H]**. Для пяти бросков доля игрока $4651a/7776$ и он может ставить 4651 против 3125, т.е. почти 3 против 2. Для шести бросков доля игрока $31\,031a/46\,656$ и он может ставить 31 031 против 15 625, т.е. почти 2 против 1.

Можно последовательно продолжать это вычисление для каждого количества бросков, но можно продвигаться и более быстро, как мы укажем в следующем предложении, в противном же случае вычисления становятся очень длинными.

[124] Замечания [Я. Б.]

H. Иногда мелькала мысль, которая, при помощи довода, подобного следующему, пожалуй, может навлечь подозрение на этот вид вычисления автора. Если некто, берущийся выбросить шестерку при четырех попытках, имеет примерно равное ожидание выиграть и проиграть, т. е. если он может одинаково легко выиграть и проиграть, то пусть после игры в течение некоторого времени он выиграет столько же раз, сколько проиграет, т. е. пусть он также окажется равным образом удачен и неудачен. Тогда шестерка появится при четырех попытках столько же раз, сколько не появится.

Если мыслить таким путем, то окажется, что шестерки появятся при восьми попытках и, следовательно, например, при 600 попытках будет 75 шестерок. Пусть теперь будет шестеро других, которые играют с условием, что первый выигрывает, если выпадет одно очко, второй – если два, третий – если три и т. д. При таком соглашении они по крайней мере будут состязаться при равных шансах. Но пусть они тоже играют при равной удаче и неудаче. Тогда по необходимости 100 шестерок выпадут при 600 бросках. Следовательно, когда игра происходит при равных шансах и равной удаче и неудаче, в 600 бросках окажется и 100 шестерок, и меньше этого [75], что нелепо.

Чтобы ответить на этот ложный довод, я действительно предположу, что если игра происходит с одинаковой удачей и неудачей, в 600 бросках должно появиться 100 пятерок. Но я отрицаю, что если некто берется выбросить шестерку в четырех бросках, его задача будет состоять в выигрыше при этом числе бросков. Ибо или первый, или второй, или третий бросок может оказаться шестеркой и в таком случае остающиеся броски будут входить в следующую четверку, так что для выигрыша или проигрыша может оказаться достаточно менее восьми. Как всё это сочетается я покажу следующим образом. Я предположу, что в каждой группе из четырех бросков , в которой я выигрываю, первый бросок дает шестерку. Тогда только 100 бросков будет израсходовано, чтобы выиграть 100 раз, остальные же 500, разделенные на 4, приведут к моему проигрышу 125 раз. Если, однако, из первых четверок бросков шестеркой каждый раз оказывался *последний* бросок, то чтобы выиграть 100 раз потребуется 400 бросков, которые надо вычесть из остальных, так что я окажусь в проигрыше 50 раз. Таким образом, поскольку в некоторых случаях я проигрываю чаще, чем выигрываю, а в других случаях выигрываю чаще, чем проигрываю, я заключаю, что при таких условиях вполне может происходить состязание с равными шансами.

С другой стороны, действительно, если некто берется выкинуть шестерку в трех бросках, он тоже в некоторых случаях выиграет столько же раз, сколько проиграет, притом наверняка если каждый третий бросок окажется шестеркой. Во многих других случаях он проиграет и притом несомненно, если шестеркой окажется каждый первый бросок. Но ни в одном случае он не выиграет более часто, чем проиграет, так что может быть несомненно установлено, что никто не может состязаться на таких условиях кроме как с ущербом. Это соображение я добавляю именно здесь, в конце, чтобы прояснить как мало можно доверять тому виду рассуждений, которые лишь скользят по поверхности, не проникая глубже в суть дела. Тем не менее, при всем жизненном опыте даже у наиболее мудрых ничто не происходит чаще[14].

Предложение 11. Найти, на какое количество бросков двух костей можно держать пари на выпадение двух шестерок.

Тот, кто берется это выполнить с одного раза, имеет 1 шанс выиграть, т.е. получить a, против 35 шансов проиграть, т.е. получить 0, поскольку всего имеется 36 возможностей. Таким образом, в соответствии с Предложением 2, он имеет $a/36$. Что касается того, кто играет на 2 броска, он выиграет a, если добьется успеха при первом броске. Если же нет, ему остается еще один бросок, который принесет ему $a/36$, как мы только что **[125]** сказали. Но есть лишь один шанс выбросить две шестерки с первого раза против 35 и поэтому вначале имеется 1 шанс получить a и 35 шансов получить $a/36$, что доставляет ему $71a/1296$ в соответствии с Предложением 2. Тому, кто устроил игру, остается $1225a/1296$.

Можно, отправляясь от этого, найти шанс или долю того, кто играет на 4 броска и при этом перескочить через случай игры на 3 броска. По существу, тот, кто играет на 4 броска, получает a, если выбросит 2 шестерки в одном из первых двух бросков; если же нет, ему останутся еще 2 броска, что доставит ему $71a/1296$ по предыдущему вычислению. Но по тому же вычислению он имеет 71 шанс выкинуть 2 шестерки в одном из первых двух бросков против 1225 шансов этого не достичь **[I]**. Поэтому он вначале имеет 71 шанс получить *a* и 1225 шансов получить 71*a*/1296, что по Предложению 2 доставит ему 178 991*a*/1 679 616. Остается 1 500 625*a*/1 679 616 тому, кто играет против него. Шансы того и другого относятся поэтому как 178 991 к 1 500 625.

Отправляясь отсюда, можно тем же путем найти шанс того, кто играет на 8 бросков. И далее, исходя из этого, определить шанс игрока на 16 бросков. А отправляясь от шанса последнего игрока и учитывая шанс того, кто играл на 8 бросков, можно найти шанс того, кто играет на 24 броска. Поскольку в таких вычислениях дело идет главным образом о том, чтобы определить, при скольких бросках шансы обоих игроков начинают уравниваться, можно опустить часть последних цифр в числах [заменив их нулями], которые и без того стали слишком большими [длинными]. Я нахожу, что тот, кто играет на 24 броска, находится еще в слегка невыгодном положении и что соглашаться на выгодную игру можно только, если число бросков по меньшей мере равно 25 **[K]**.

Замечания [Я. Б.]

I. Здесь полезно заметить, что автор предполагает, что каждое ожидание, хоть возможно и было получено иначе, можно также расматривать как бы происходящим из числа шансов получить ставку *a*, указанного числителем дроби и числа шансов не получить ничего, указанного разностью между знаменателем и числителем. Так, пусть даже тот, кто берется выросить две шестерки при двух попытках, устанавливает свое ожидание, равное 71*a*/1296, исходя из [существования] одного шанса получить *a* и 35 шансов получить *a*/36. И все же можно полагать, что он обладает этим ожиданием, поскольку имеет 71 шанс получить *a* и 1225 шансов получить 0. Это действительно так, потому что только тот, кто имеет 71 шанс получить *a* и 1225 шансов получить 0, по Следствию 1 к Предложению 3 обладает ожиданием 71*a*/1296, а у кого больше шансов получить *a* или меньше шансов не получить ничего или наоборот будут иметь ожидания больше или меньше чем 71*a*/1296, что противоречит предположению.

K. В предыдущем предложении автор доказал, что можно с выгодой взяться выбросить шестерку в четырех бросках. Теперь он утверждает, что даже при 24 бросках нельзя с выгодой браться выбросить две шестерки на двух костях. Для многих это явно выглядит непоследовательным, потому что 24 броска относятся ко всем различным 36 броскам двух костей в точности как 4 броска ко всем [различным] шести броскам одной кости. Паскаль, в своем письме Ферма (которое можно прочесть на с. 181 сочинений последнего, опубликованных в Тулузе в 1679 г.) [письмо 29 июля 1654 г.; Pascal (1654)] ссылается на некоего анонима с изощренным суждением, но лишенного математических познаний, который [и] раннее был смущен той же самой трудностью. Но посвященных вряд ли задержит это видимое противоречие; они знают, что действительно может быть названо бесчисленное количество задач, которые, как обнаруживает вычисление, оказываются совсем иными чем представлялись вначале. И поэтому они, посвященные, особо осторожны в соответствии с тем, о чем я не раз предупреждал, что не следует опрометчиво поддаваться аналогиям.

К предложению в целом

Замени автор числа буквами, он смог бы выразить это и предыдущее предложение как единую задачу и так же легко исследовать ее общее решение **[126]** следующим образом. Пусть $a = b + c$ – число всех случаев, имеющих место при одной или более костей или в любой азартной игре (поскольку результаты должны быть применимы к костям не более, чем к любому виду жеребьевки, повторяемой некоторое число раз, при которой число случаев всегда остается одним и тем же). Пусть b будет числом случаев, при котором выбрасывается заданное число очков или осуществляется что бы то ни было предпринятое. И пусть c будет числом случаев, при котором это не получено или задуманное не произошло.

Если кто-либо возьмется чего-то добиться с первой попытки, ясно, что он имеет b или $(a - c)$ шансов для осуществления этого или выигрыша ставки, которая теперь равна 1, и c шансов получить 0, так что его жребий по Следствию 1 к Предложению 3 становится равным $(a - c)/a$. Если кто-то возьмется добиться того же за 2 попытки, у него снова будет $(a - c)$ шансов, при которых он получает 1 или a/a, но также и c шансов, при которых он достигает прежнего ожидания $(a - c)/a$. По Предложению 3 это сто́ит $(aa - cc)/aa$. А если некто возьмется осуществить то же самое за 3 попытки, у него снова будет $(a - c)$ шансов для 1 и c шансов для только что найденного жребия, т. е. для $(aa - cc)/aa$. Это сто́ит в точности столько, сколько $(a^3 - c^3)/a^3$. Таким же образом, если у него есть 4 попытки для достижения результата, его ожидание определиться равным $(a^4 - c^4)/a^4$; если 5 попыток – $(a^5 - c^5)/a^5$ и, вообще, при n попытках его жребий окажется равным $(a^n - c^n)/a^n$, так что его противнику останется c^n/a^n.

Кроме этого метода, который принадлежит автору, для решения задачи есть еще два, ни в коей мере не грубоватых, **один из которых таков.** Ожидания игрока отыскиваются по-отдельности для каждого броска, т. е. спрашивается, каковы будут его жребии, захоти он чего-то достичь при первом, втором, третьем, четвертом и т. д. броске и ни при каком другом. И что получится при сложении всех ожиданий будет искомым ожиданием. Показано, что жребий того, который предпринимает что-либо при первой попытке, равен $(a - c)/a = b/a$. Тот, кто желает что-либо осуществить при втором броске, не добьется задуманного, если оно произойдет при первом броске, потому что он должен сделать это при втором, и он потеряет ставку. Если, однако, этого не произойдет при первом броске, у него останется один бросок, при котором он может это осуществить. И это, как было сказано, сто́ит для него b/a. Но число шансов, при которых он делает это при первом броске, равно по предположению b, а число шансов, при которых это не удается, c. Поэтому, по первому следствию из Предложения 3 его жребий становится равным bc/aa. Тот, кто пожелает достичь результата именно при третьем броске, опять-таки потеряет ставку, если сделает это при первом броске, потому что он не достигнет желаемого, которое обязывало его добиться успеха лишь при третьем броске. Если, однако, он не достигает результата при первом броске, у него все еще имеются два броска, причем он должен добиться успеха только в последнем из них и было показано, что в этом случае ему будут должны bc/aa. Но первое [т. е. достижение цели при первом броске] может произойти в b

случаях, что в соответствии с тем же следствием приводит к его жребию, равному bcc/a^3. Лицо, обязанное добиться результата лишь при четвертом броске, так же само теряет ставку, если достигает этого при первом броске. Если же это происходит позже, при трех остающихся бросках, то ему принадлежит предыдущее ожидание bcc/a^3, которое теперь приводит к его жребию, равному bc^3/a^4. И так же само устанавливается, что жребий человека, который берет на себя пятый бросок, будет bc^4/a^5; кто берет на себя шестой – bc^5/a^6 и вообще жребий того, кто берется выиграть при n-м броске – bc^{n-1}/a^n. Таким образом, поскольку жребий игрока, который взялся выиграть при первом броске, будет b/a; выиграть при втором броске – bc/aa; при третьем – bcc/a^3; и на последнем [n-м] броске – bc^{n-1}/a^n, и поскольку ожидание того, кто берется добиться этого при любом из первых n бросков без различия, будет составлено из всех этих вместе взятых ожиданий, оказывается, что его ожидание будет

$$b/a + bc/aa + bcc/a^3 + bc^3/a^4 + \ldots + bc^{n-1}/a^n,$$

что является [суммой геометрической прогрессии], равной, как и выше, $(a^n - c^n)/a^n$.

[127] Другой метод. Тот, кто берется выкинуть обусловленное число очков при n бросках одной кости делает то же самое, как мы покажем в следующем предложении, будто он взялся выбросить хотя бы на одной кости то же число очков при одном броске n костей. В соответствии с этим, представим себе n костей, каждая с a гранями, на c из которых не помечено это число очков. Тогда число всех случаев для всех костей вместе будет равно a^n (как автор показал выше в Предложении 9). И по этой же причине число случаев, при которых желаемое число очков не появится ни на одной кости, окажется равным c^n, потому что действительно каждая из c граней одной кости может открыться совместно с любой из аналогичных граней другой кости. Таким образом, это [желаемое] число очков должно оказаться по крайней мере на одной кости в оставшихся $(a^n - c^n)$ случаях. Поэтому тот, кто играет на таких условиях, имеет $(a^n - c^n)$ шансов, при которых он получает ставку 1 и c^n шансов, при которых он получит 0, что пять-таки приводит к жребию $(a^n - c^n)/a^n$ для него и оставляет c^n/a^n для его противника.

Теперь, когда мы представили общее решение этой задачи, мы можем спросить, как это делает автор, при каком числе бросков шансы обоих игроков оказываются одними и теми же. Для нахождения этого мы должны лишь приравнять найденные для них жребии, так что $(a^n - c^n) = c^n$ или $a^n = 2c^n$. Как показывает это равенство, необходимо лишь повторно умножать само на себя и числа всех случаев, и тех, при которых желаемый результат не достигается, возводя их в одну и ту же степень, пока первое не станет вдвое больше второго. Показатель степени, в которую оба числа были возведены, окажется искомым числом. Этот образ действий легче гюйгенсова, потому что он не предполагает, что жребии известны хотя бы для одного из предшествующих случаев.

С другой стороны, сокращенные способы вычисления, упомянутые автором – пренебрежение конечных цифр чисел и определение ожиданий скачками – как раз находят себе место здесь. Действительно, мы можем найти четвертую степень любого числа по его квадрату не вычисляя его куба, а восьмую степень – не вычисляя промежуточных степеней и т. д. Здесь, видимо, уместно привести весь вычисленный автором пример, в котором $a = 36$ и $b = 35$:

Таблица[15]

	Точные значения			Точные значения	
	Больше чем	Меньше чем		Больше чем	Меньше чем
a^4	1679 ...	1680 ...	c^4	1500 ...	1501 ...
a^8	2819 ...	2823 ...	c^8	2250 ...	2254 ...
a^{16}	7946 ...	7970 ...	c^{16}	5062 ...	5081 ...
a^{24}	2239 ...	2250 ...	c^{24}	1138 ...	1146 ...
a^{25}	8060 ...	8100 ...	c^{25}	3983 ...	4011 ...
			$2c^{24}$	2276 ...	2292 ...
			$2c^{25}$	7966 ...	8022 ...

Здесь ясно, что 24-я степень числа 36 (которая находится между 2239 ... и 2250 ...) меньше, чем удвоенная 24-я степень числа 35 (которая находится между 2276 ... и 2292 ...), но что с другой стороны 25-я степень первого числа (которая находится между 8060 ... и 8100 ...) более чем вдвое превосходит 25-ю степень второго (которая находится между 7966 ... и 8022 ...).

Следует, однако, указать, что мы можем решить задачу быстрее, выбрав более короткий способ вычислений при сравнениях [a^n и $2c^n$] при помощи логарифмов. Действительно, мы имеем $a^n = 2c^n$ и, поскольку у равных чисел логарифмы равны, мы также имеем $n\log a = \log 2 + n \log c$ или […] $n = \log 2/(\log a - \log c)$. Это означает, что требуемое число бросков **[128]** просто определяется делением логарифма двух на разность между логарифмами a и c. Вот само вычисление:

$a = 36$, $\log a = 1.5563025$; $c = 35$, $\log c = 1.5440680$;
$\log a - \log c = 0.0122345$.

И деление log 2 или 0.3010300 на эту разность приводит к частному, превышающему 24 и меньшему, чем 25, что явно соответствует нашему вычислению и вычислению автора.

Наше решение этой задачи предоставляет нам также возможность исследовать некоторые родственные задачи и вот одна из них. Несколько игроков по очереди пытаются выкинуть определенное число очков, притом некоторые получают право на большее число бросков, чем остальные и каждый игрок использует все свои броски сразу. Каков будет жребий одного из них [оказаться первым]?

Прежде всего ясно из предыдущего, что тот, чей жребий мы хотим определить, начни он игру, имел бы жребий $(a^n - c^n)/a^n$. Но поскольку до него играют другие, которые могут выиграть до того, как он получит такую возможность, его жребий окажется ниже этого. Теперь, ожидания всех тех, кто играет до него, взятые вместе, очевидно равны ожиданию одного-единственного лица, которое захотело бы занять их места и получило бы столько бросков, сколько они имели все вместе. Но, в соответствии с тем же доводом, это ожидание было бы равно

$(a^s - c^s)/a^s$, где s – указанное число бросков. Поэтому, в соответствии с замечанием **I**, игрок, чье ожидание мы желаем определить, как можно полагать, имеет в начале игры $(a^s - c^s)$ шансов, в которых выигрывает один из предшествующих игроков и уже приобретает ставку, и c^s шансов, при которых наступит его очередь играть и получит указанный выше жребий $(a^n - c^n)/a^n$. По Следствию 1 к Предложению 3 это стóит

$$\frac{(a^n - c^n)\,c^s}{a^n a^s} = \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}.$$

Это можно также определить следующим образом. Поскольку, в соответствии с предположением, все игроки, включая последнего, имеют $(s + n)$ бросков, их общее ожидание равно $(a^{s+n} - c^{s+n})/a^{s+n}$ и если из этого вычесть ожидания всех предыдущих игроков, т. е. $(a^s - c^s)/a^s$, то то, что останется в качестве ожидания одного только последнего игрока, будет равно, как и раньше,

$$(a^{s+n} - c^{s+n})/a^{s+n} - (a^s - c^s)/a^s = \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}.$$

Заметим, что это вычисление существенно сокращается, если количества случаев a и c имеют общий делитель и, в соответствии со Следствием 2 к Предложению 3, заменяются наименьшими числами, находящимися в том же соотношении. Пусть, например, несколько игроков пытаются выкинуть 7 очков двумя костями и притом первый из них получает один бросок, второй – два броска, третий – три и четвертый – четыре, так что каждый последующий получает на один бросок больше предыдущего. Я желаю определить ожидание четвертого игрока. Поскольку он получает здесь $n = 4$ броска, а трое предыдущих имеют все вместе $s = 1 + 2 + 3 = 6$ бросков, мы имеем

$$\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} = \frac{a^4 c^6 - c^{10}}{a^{10}}.$$

Более того, числа a и c, которые являются количествами всех случаев для двух костей и тех случаев, при которых 7 очков не вскрываются, здесь равны 36 и 30, и я **[129]** заменяю их на 6 и 5. Поэтому, из произведения четвертой степени шести и […] я вычитаю […] и делю разность на десятую степень шести. Это дает 10 484 375/60 466 176 в качестве требуемого ожидания четвертого игрока.

Ясно, сколь угодно много игроков ни было бы в этой задаче, и сколь много бросков они ни имели бы, их ожидания, взятые вместе, должны необходимо составлять меньше единицы. Ибо всегда может случиться, пусть даже и очень редко, что никто из игроков не выбросит требуемого числа очков. И также очевидно, что если количества бросков одни и те же, последующий игрок всегда должен иметь более низкий жребий нежели предыдущий, тем более если эти количества возрастают. Действительно, может быть обусловлено такое большое количество бросков, что у первого игрока надежда выиграть становится почти достоверной, а у всех остальных она почти исчезает.

Это соображение может подвести нас к другой задаче, а именно: Дано число последовательных бросков, дозволенных первому игроку; определить, сколько должно быть дозволено второму и следующим, чтобы их шансы оказались равными. Однако, при двух игроках число бросков, дозволенных первому игроку, не должно дать ему жребий выше половины, или, при трех игроках, выше одной трети, или, при четырех игроках, выше одной четверти и т. д. ибо в противном случае задача окажется невозможной [решение окажется невозможным].

Пусть имеется m игроков и x обозначает общее число бросков, дозволенных им всем вместе, а y – число бросков, дозволенных всем, кроме последнего, так что $(x - y)$ будет числом бросков, дозволенных одному лишь последнему. Если первому игроку дозволено n бросков, его ожидание будет $(a^n - c^n)/a^n$, а сумма ожиданий всех остальных игроков окажется равной $(a^x - c^x)a^x$. Поскольку все ожидания предполагаются равными первому из них, их сумма будет $m(a^n - c^n)/a^n$. Поэтому

$$m(a^n - c^n)/a^n = (a^x - c^x)a^x \text{ или } m - mc^n/a^n = 1 - c^x/a^x \text{ или}$$
$$c^x/a^x = [...] = [mc^n + (1 - m)\, a^n]/a^n.$$

Взяв логарифмы, получим

$$x \log c - x \log a = \log\, [mc^n + (1 - m)\, a^n] - n \log a$$

и после деления

$$x = \frac{\log\, [mc^n + (1-m)a^n] - n \log a}{\log c - \log a}.$$

Или, поменяв знаки у числителя и знаменателя, потому что $a > c$ […]. По этой же причине ожидания всех игроков кроме последнего, взятые совместно, т. е. ожидания $(m - 1)$ первых из них, окажутся равными

$$\frac{(m-1)(a^n - c^n)}{a^n} = \frac{a^y - c^y}{a^y}.$$

[130] И таким же образом мы находим, что

$$y = \frac{n \log a - \log[(m-1)c^n + (2-m)a^n]}{\log a - \log c}.$$

Следовательно, мы в конечном итоге находим то, что требовалось:

$$x - y = \frac{\log\, [(m-1)\, c^n + (2-m)\, a^n] - \log\, [mc^n + (1-m)\, a^n]}{\log a - \log c}.$$

Таким образом, при трех игроках первому разрешается два броска и они должны выкинуть 7 очков двумя костями (или 6 очков при одной кости, потому что в каждом из этих случаев число a относится к числу c как 6 к 5) и тогда, в соответствии с тем, что было показано выше, жребий первого игрока, поскольку $n = 2$, равен $(a^2 – c^2)/a^2 = 11/36$, что немного менее трети ставки. Полагая вначале $m = 2$, а затем $m = 3$, я нахожу при этих предположениях, что для уравнивания жребиев остальных игроков второму должно быть разрешено 3 броска, а третьему – 8.

Предложение 12. Найти количество костей, при которых можно согласиться выкинуть 2 шестерки с первого раза.

Это равносильно желанию узнать, за сколько бросков одной единственной кости можно рассчитывать дважды получить 6 **[L]**. В соответствии с тем, что было доказано выше, тот, кто возьмется выкинуть 2 шестерки за 2 броска, имеет право на $a/36$ **[M]**. Что же касается того, кто играет на 3 броска, то если его первый бросок не даст шестерки, у него останется еще 2 броска, каждый из которых должен дать ему 6, и это, как мы говорили, стоит $a/36$. Но если его первый бросок дает 6, ему нужно в двух последующих бросках выкинуть только одну шестерку, что по Предложению 10 даст ему $11a/36$. И ясно, что у него есть 1 шанс выкинуть 6 с первого раза против 5 шансов не добиться успеха, так что вначале он имеет 1 шанс получить $11a/36$ и 5 шансов получить $a/36$, что в соответствии с Предложением 2 доставит ему $16a/216$ или $2a/27$. Продвигаясь каждый раз на один бросок, найдем, что можно с преимуществом взяться выкинуть 2 шестерки на одной кости в 10 бросках или на 10 костях с первого раза.

Замечания [Я. Б.]

L. Если, например, разрешается один бросок десяти костей, то совершенно очевидно, что нет никакой разницы, выброшены ли они все сразу или поочередно, одна за другой. А если одна за другой, то равным образом очевидно, что всё равно, выбрасываются ли различные кости или одна и та же кость каждый раз подбирается и бросается 10 раз.

M. В предыдущем предложении было показано, что доля того, кто берется двумя костями выкинуть две шестерки с одного раза, равна $a/36$. Но мы только что видели, что это равным образом относится и к тому, кто делает один бросок двумя костями, и к тому, кто дважды выбрасывает одну и ту же кость. И поэтому игроку, который берется выкинуть две шестерки при двух бросках одной кости, т. е. берется выкинуть шестерку дважды, тоже положена доля $a/36$.

[131] К предложению в целом

Предложенная здесь задача может быть решена символически, точно как и предыдущая. И общее решение охватывает определение ожидания того, кто берется осуществить что-то два, три, четыре или большее число раз за определенное число бросков. Жребий того, кто берется чего-то достичь только один раз, был уже вычислен в предыдущем предложении. Тот, кто берется что-то осуществить дважды при двух попытках, не получит никакой доли ставки, если это ему не удастся при первой попытке; всё должно будет достаться его противнику. Если, однако, он добьется успеха при первой попытке, он должен будет всё еще осуществить это снова при оставшемся броске кости. В этом случае, в соответствии с Замечаниями к предыдущему предложению, при сохранении тех же значений для букв a, b и c, ему будет причитаться $(a – c)/a$, поскольку он получил право ожидать этот жребий, как это было [там] описано. Его противнику будет положено c/a. Но имеется b

шансов, при которых он достигает своей цели при первой попытке и c шансов, когда дело оборачивается иначе. Так что противник имеет c шансов получить ставку $1 = (b + c)/a$ и b шансов получить c/a и это сто́ит ему $(cc + 2bc)/aa$.

Если кто-то, кто берется осуществить нечто дважды в трех попытках, добьется этого при первой попытке, что всегда происходит в b случаях, ему остается повторить это только один раз при двух остающихся попытках. И по Замечаниям к предыдущему предложению жребий его противника cc/aa. Но если он не добьется этого при первой попытке, что может произойти в c случаях, он обязан будет сделать это дважды в двух остающихся попытках, а это, как мы только что сказали, дает $(cc + 2bc)/aa$ его противнику. Этот противник имеет стало быть c шансов, при которых он получает $(cc + 2bc)/aa$ и b шансов, при которых он получает cc/aa, что приводит к его ожиданию, равному $(c^3 – 3bcc)/a^3$.

И если кто-то попытается добиться чего-то дважды при четырех попытках, у него будет b шансов, при которых его первый бросок может достичь цели, давая противнику жребий c^3/a^3. И имеется c шансов, когда происходит противоположное, придавая к ожиданию противника $(c^3 + 2bcc)/a^3$. Это обеспечивает последнему жребий $(c^4 + 4bc^3)/a^4$.

Если кто-то, кто пытается осуществить нечто трижды при трех попытках, не достигает цели при первом броске, его противник выигрывает ставку $1 = (cc + 2bc + bb)/aa$. Если же он добивается желаемого, у него остается два броска, каждый из которых должен оказаться успешным. Мы показали, что при этом жребий его противника равен $(cc + 2bc)/aa$. Но мы сказали, что этот последний результат [удача в двух последних бросках] происходит в b случаях, а первый [неудача в первом броске] – в c случаях. И ожидание противника становится равным $(c^3 + 3bcc + 3bbc)/a^3$.

Более того, при помощи весьма аналогичного рассуждения мы можем отсюда отыскать ожидание того, кто предлагает кому-то другому попытаться достичь чего-то два, три, четыре или более раза при четырех, пяти, шести или более бросках кости. Это приведет к следующей таблице, которую каждый может легко продолжить настолько, насколько требуется, если заметить, что ее строки, взятые по порядку, содержат члены всех степеней бинома $(c + b)/a$. Вторая строка содержит члены квадрата, третья – члены куба, четвертая – члены четвертой степени и т. д., причем первая колонка показывает только первые члены этой степени, вторая колонка – их первые два члена, третья – первые три, четвертая – первые четыре. Отсюда легко вывести, что тот, кто предлагает кому-то возможность добиться чего-то дважды при некотором числе n бросков, имеет жребий $(c^n + nbc^{n–1})/a^n$, если трижды

[132] Таблица[16]

Для определения жребия того, кто представляет другому возможность достичь чего-то в азартной игре один раз или больше при некотором числе бросков

Замечание. Жребий того, кто возьмется что-то осуществить, всегда является дополнением к жребию того, кто предоставляет такую возможность. Число всех случаев при однократном броске = a, число случаев, при которых предпринимаемое осуществляется = b и число случаев, при которых этого не происходит, = c

Если что-то должно быть осуществлено определенное число раз при заданном числе бросков

Бросков	1 раз	2 раза	3 раза	4 раза
1	c			
2	cc	$cc + 2bc$		
3	c^3	$c^3 + 3bcc$	$c^3 + 3bcc + 3bbc$	
4	c^4	$c^4 + 4bc^3$	$c^4 + 4bc^3 + 6bbcc$	$c^4 + 4bc^3 + 6bbcc + 4b^3c$
5	c^5	$c^5 + 5bc^4$	$c^5 + 5bc^4 + 10b^2c^3$	$c^5 + 5bc^4 + 10b^2c^3 + 10b^3c^2$
6	c^6	$c^6 + 6bc^5$	$c^6 + 6bc^5 + 15b^2c^4$	$c^6 + 6bc^5 + 15b^2c^4 + 20b^3c^3$

n бросков, m раз: $c^n + nbc^{n-1} + C_n^2\, bbc^{n-2} + C_n^3\, b^3c^{n-3} + \ldots + C_n^{m-1}\, b^{m-1}\, c^{n-m+1}$

[131, продолжение] при n бросках, то $[c^n + nbc^{n-1} + C_n^2\, bbc^{n-2}]/a^n$. **[132]** Его жребий равен

$[c^n + nbc^{n-1} + C_n^2\, bbc^{n-2} + C_n^3\, b^3c^{n-3}]/a^n$ если четырежды. И наконец в общем тот, кто предоставляет возможность что-то совершить m раз, имеет жребий

$$[c^n + nbc^{n-1} + C_n^2\, bbc^{n-2} + C_n^3\, b^3c^{n-3} + \ldots + C_n^{m-1}\, b^{m-1}\, c^{n-m+1}]/a^n.$$

Эта же формула может быть также изящно выведена следующим образом при помощи так называемого учения о сочетаниях. Из сказанного выше ясно, что задача сводится к тому же самому, будет ли кто-то пытаться совершить нечто m раз при n бросках одной кости или с одним броском n костей. Рассмотрим поэтому n костей A, B, C, D и т. д., каждая с a гранями, b из которых соответствуют цели игрока, а другие c – нет. И спросим, в скольких случаях может оказаться, что предпринимаемое не было осуществлено ни на одной кости или произошло только на одной, или только на двух, трех или четырех из них и т. д. и, наконец, в скольких случаях цель достигается в точности на $(m – 1)$ костях. Ибо ни в одном из всех этих случаев тот, кто принимается за игру, не достигает цели и его противник выигрывает.

Но, как было показано в Замечаниях к предыдущему предложению, имеется c^n случаев, при которых предпринимаемое не осуществляется ни на одной кости. И аналогично можно заключить, что имеется b случаев, или bb, или b^3 и т. д., при которых одна кость, например, A, или две кости, A и B, или три, A, B и C, и т. д. дают результат, желаемый тому, кто взялся играть. Равным образом, имеется c^{n-1} или c^{n-2} и т. д. случаев, при которых $(n – 1)$ или $(n – 2)$ или **[133]** $(n – 3)$ и т. д. кости не оправдали его надежд. Поэтому, поскольку каждый из этих случаев может быть присоединен с любым [соответствующим] предыдущим, умножение последующего на предыдущее дает bc^{n-1} или bbc^{n-2} или b^3c^{n-3} и т. д. случаев. А поскольку кость, которая благоприятствует (костями, которые благоприятствуют) игроку, могут быть либо A, либо B, либо C и т. д., если кость одна; либо A и B, либо A и C, либо B и C и т. д. если костей две; либо A, B и C, либо A, B и D и т. д. если их три и т. д., так что эти количества случаев должны быть снова умножены на число единиц, пар, троек и т. д., которые могут быть образованы из всех n костей.

Но по учению о сочетаниях, которое изложено в части 2 книги, эти числа равны n или C_n^2 или C_n^3 и т. д. И поэтому мы получаем после такого перемножения nbc^{n-1} или $C_n^2\,bbc^{n-2}$ или $C_n^3\,b^3c^{n-3}$ и т. д. вплоть до $C_n^{m-1}\,b^{m-1}\,c^{n-m+1}$ для числа случаев, при которых предпринимаемое достигается в точности при одной кости, при двух костях, при трех и т. д. вплоть до (m – 1) костей. Поскольку, как мы упомянули, во всех этих случаях выигрывает противник, и поскольку при n костях всего существует a^n случаев, его жребий, по Следствию 1 к Предложению 3, равен, как и выше,

$$[c^n + nbc^{n-1}\ C_n^2\,bbc^{n-2} + C_n^3\,b^3c^{n-3} + \ldots + C_n^{m-1}\,b^{m-1}\,c^{n-m+1}]/a^n.$$

Но наиболее интересная задача в этом предложении, как и в предыдущем, состоит в том, чтобы определить, сколько бросков кости требуется, чтобы ожидания игрока и его противника оказались равными друг другу или чтобы каждое равнялось половине ставки. Я теперь приравняю выражение, найденное для жребия игроков, половине и из этого условия определю по возможности точнее число n. Пусть, например, мы, как и автор, желаем определить число бросков, которое требуется тому, кто возьмется осуществить что-то дважды, имея равный со своим противником жребий, – например, дважды выбросить шестерку на одной кости.

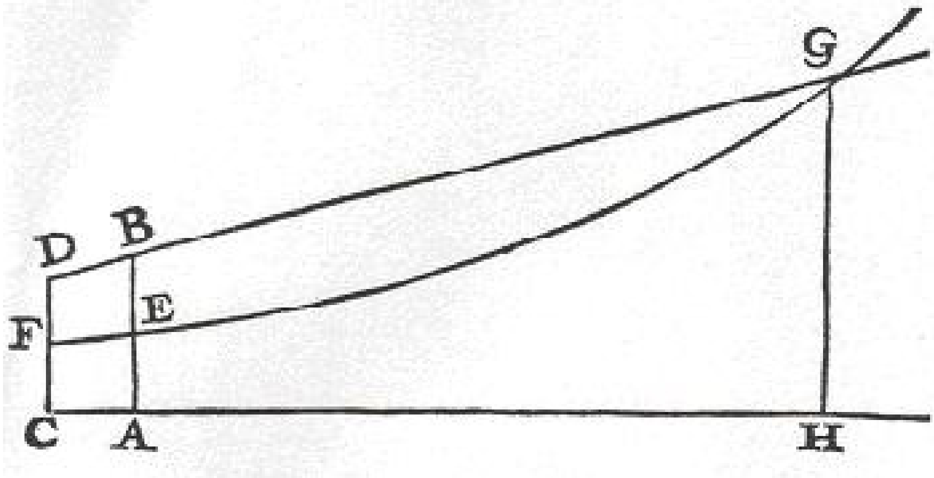
Я полагаю, что $(c^n + nbc^{n-1})/a^n = 1/2$ и получаю $a^n = [\ldots] = (2c + 2nb)c^{n-1}$. **[134]** Это показывает, что число a должно быть возведено в такую степень, чтобы результат был примерно равен произведению c, возведенному в степень […] и удвоенной суммы […]. После этого показатель степени a будет равен числу бросков, при котором игрок может попытаться дважды осуществить нечто. Я прилагаю вычисления для примера автора, в котором a это общее число случаев для одной кости, т. е. 6, b – число случаев, при котором выпадает шестерка, т. е. 1, и c – число случаев, при которых этого не происходит, т. е. 5.

	$c = 5$
$a = 6$	$cc = 25$
$a^3 = 216$	$c^4 = 625$
$a^9 = 10\,077\,696$	$c^8 = 390\,625$
$a^{10} = 60\,466\,176$	$c^9 = 1\,953\,125$

$a^9 = 10\,077\,696 < 10\,937\,500 = 28$ раз $390\,625 = (2c + 18b)c^8$
$a^{10} = 60\,466\,176 > 58\,593\,750 = 30$ раз $1\,953\,125 = (2c + 20b)c^9$

Девятая степень a всё еще меньше, но десятая – больше, чем девятая степень c, умноженная на установленный коэффициент. И мы должны заключить, что 9 бросков еще недостаточно, но что при 10 бросках игрок, берущийся выбросить две шестерки на одной кости, имеет преимущество.

Тот же результат может быть получен также при помощи изящного геометрического построения, основанного на том, что называется логарифмической кривой. Построим логарифмическую кривую FEG над осью CH и восставим перпендикуляры AE и CF, находящиеся в соотношении $a{:}c$. Продолжим их до B и D, удваивая их длину. Продолжим прямую DB, встречающую кривую в точке G. Если принять CA за единицу и опустить перпендикуляр GH до пересечения с осью, то длина $CH = n$ окажется числом бросков, при котором кто-либо может взяться дважды выкинуть что-то[17].



И таким же путем как мы пришли к этому результату, найдя пересечение прямой с логарифмической кривой, может быть определено число бросков для осуществления чего-то трижды по пересечению параболы и логарифмической кривой. А число бросков, при котором можно попытаться достичь чего-то четырежды или большее число раз, может быть определено при помощи алгебраических кривых последовательно более высоких порядков. **[135]**

Мы могли бы и здесь, так же как в предыдущем предложении, продолжить рассмотрение этой темы и исследовать жребии нескольких игроков, которые берутся добиться чего-то некоторое число раз, последовательно бросая кости равное или неравное число раз и мы могли бы сформулировать еще несколько вопросов того же вида. Однако, следует, видимо, стремиться к краткости, да и кроме того что-то должно быть оставлено трудолюбию читателей.

Впрочем, мы полагаем, что имеет смысл добавить предупреждение, чтобы сказанное не было неверно воспринято. Именно, в рассмотренных задачах этого и предыдущего предложения, в которых отыскивались ожидания игрока, взявшегося добиться чего-то один раз или какое-то определенное число раз при заданном числе бросков кости, следует считать, что игрок будет вознагражден также если достигнет результата большее число раз. Если же, однако, будет считаться, что в таком случае игрок проигрывает, то задача окажется иной и ожидания будут другими. Нам остается еще определить их до того, как мы оставим эту тему, потому что они понадобятся нам в дальнейшем.

Чтобы решение было общее, предположим, что количества случаев не всегда одни и те же в каждой партии игры, как это считалось до сих пор, но что при различных бросках эти количества как-то изменяются и обозначим их следующими буквами

Броски	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
Число всех случаев	a	d	g	p	s
Число успешных случаев	b	e	h	q	t
Число безуспешных случаев	c	f	i	r	u

Если принять это, и если установлено некоторое число бросков, например, 5, которые составляют игру, и отыскивается ожидание достичь результата в некоторых из этих бросков, например, в первых трех, и не достичь его в остальных, то необходимо принять во внимание, что каждый из b случаев первого броска может быть соединен с любым из e случаев второго. И далее, каждый из полученных be случаев может быть снова соединен с любым из h случаев третьего броска, что даст beh случаев. И аналогично, каждый из r случаев четвертого броска может быть соединен с любым из u случаев пятого, что приводит к ru случаям. И соединение с любым из прежних beh случаев приводит к числу всех случаев $behru$, при которых может случиться, что желаемое осуществилось в первых трех бросках и не произошло в последних двух. А поскольку, путем аналогичного рассуждения, мы получаем число всех возможных случаев во всех пяти бросках равным $adgps$, то ожидание, отыскиваемое в соответствии со Следствием 1 к Предложению 3, будет $behru/adgps$. Таким образом формулируется

Правило для отыскания жребия игрока, которому дано несколько бросков кости и который должен добиться чего-то в точности при определенных бросках, но не при других

Составьте продолжающееся произведение числа случаев, при которых что-то достигается при установленных бросках, на число случаев, при которых этого не происходит при [опять-таки] установленных бросках. Разделите это произведение на продолжающееся произведение числа всех случаев при всех бросках. Частное окажется тем, что отыскивается.

[136] Следствие 1. Если количества случаев во всех бросках одни и те же, т. е. если каждое из чисел d, g, p, s равно a, каждое из чисел e, h, q, t равно b и каждое из чисел f, i, r, u равно c, найденное ожидание $behru/adgps$ окажется равным b^3c^2/a^5, или, общее, b^mc^{n-m}/a^n, если число всех бросков n, а m – число бросков, при которых требуемое должно произойти.

Следствие 2. Если равные количества случаев определяют все партии и если вдобавок указано число партий или бросков, при которых что-то должно быть достигнуто, но притом так, что желаемый результат может быть получен при любом броске, а не при предустановленном, – если, например, решено, что игра состоит из пяти бросков и что нечто должно быть достигнуто в любых трех из них, – то ясно, что величина ожидания, найденная в первом следствии, должна быть умножена на число, равное числу сочетаний из пяти по три, или, более общо, из n по m. Это, однако, может произойти, в соответствии с учением о сочетаниях, которое будет рассмотрено в части 2 книги, различными способами числом C_n^m или, что одно и то же, числом C_n^{n-m}. Таким образом, ожидание игрока будет стоить $C_n^m\, b^mc^{n-m}/a^n$ или $C_n^{n-m}\, b^mc^{n-m}/a^n$.

Предложение 13. Предположив, что я бросаю один раз 2 кости и что я выиграю, если выкину 7 очков, и что мой противник выиграет, если выкинет 10, и что в остальных случаях мы делим ставку пополам, найти долю каждого.

Так как среди 36 возможностей, которые имеют место при двух костях, имеется 6 для семи очков и 3 – для 10, то остается 27, при которых не выигрывает ни один из нас. В этом последнем случае каждый получает право на $a/2$. В остальных случаях у меня 6 шансов выиграть, т.е. получить a, и 3 шанса проиграть, т.е. получить 0 **[N]**. В соответствии с Предложением 2 это стоит $2a/3$. Поэтому я вначале имею 27 шансов получить $a/2$ и 9 шансов получить $2a/3$, и, в соответствии с тем же предложением, это доставит мне $13a/24$. Другому игроку остается $11a/24$ **[O]**.

Замечания [Я. Б.]

N. Вначале автор отыскивал ожидание того, кто имел 6 шансов для выигрыша и 3 для проигрыша и это ожидание было равно $2a/3$. И таким образом он затем определяет искомое. Но тот же результат может быть получен немедленно без знания предыдущего ожидания, поскольку 27 шансов получить $a/2$, 6 шансов – a и 3 шанса – 0, которые **[137]** я получаю, если играю на предложенных условиях, сто́ят по Следствию 1 к Предложению 3 $13a/24$. И по тому же следствию 27 шансов получить $a/2$, 3 шанса – a и 6 шансов – 0, которые предстоят моему противнику, равны [приводят к] $11a/24$.

O. Это, очевидно, остаток от всей ставки. Поскольку действительно мы в конце игры совместно получим всю ставку, и не больше, ни меньше того, наше общее ожидание в соответствии с нашей аксиомой [см. Замечания к Предложению 1] должно исчерпать всю ставку, как мы указали и в Замечании **C** к Предложению 4. Дело обстояло бы иначе будь тут добавлены случаи, при которых в разделе ставки участвуют также и другие, – если, например, последнее условие игры предписывало бы выплатить ставку бедным [а не распределить ее поровну между игроками]. Тогда, ввиду 6 шансов получить a и 30 шансов – 0, я не имел бы более $a/6$. И противник, поскольку он имеет 3 шанса получить a и 33 шанса – 0, имел бы $a/12$, а остаток, $3a/4$, мы были бы должны бедным, которых поэтому следовало учитывать при вычислении жребиев.

Предложение 14. Другой игрок и я по очереди бросают 2 кости с условием, что я выиграю, если выкину 7 очков, а он – если выкинет 6, и я отдаю ему первую очередь. Найти отношение наших шансов.

Пусть x – стоимость моего шанса и ставка a. Шанс другого игрока поэтому стоит $(a - x)$. Ясно также, что каждый раз, когда наступает его очередь, мой шанс снова стоит x. Но каждый раз, когда очередь моя, мой шанс должен стоить больше, допустим y. Или, поскольку среди 36 возможностей, которые имеют место при двух костях, 5 могут дать 6 очков моему противнику и он выиграет, и 31 возможность против него, что приведет к моей очереди бросать кости, и тогда я буду иметь 5 шансов получить 0 если он бросает первый раз [?] и 31 шанс получить y. По Предложению 3 это доставит мне $31y/36$.

Но мы указали, что в начале игры мой шанс равен x, так что $31y/36 = x$ и $y = 36x/31$. Мы, кроме того, установили, что, когда наступает моя очередь играть, мой шанс равен y. Но когда я бросаю, я имею 6 шансов получить a, поскольку для выкидывания семи очков, что приведет к моему выигрышу, существует 6 возможностей, и я имею 30 шансов передать очередь моему противнику, т.е. возыметь шанс x. Поэтому стоимость y равносильна 6 шансам получить a и 30 шансам получить x. По Предложению 3 я поэтому получаю $(6a + 30x)/36$ и это выражение равно y, а y по сказанному раннее равно $36x/31$. Поэтому должно быть

$$\frac{30x+6a}{36} = \frac{36x}{31},$$

откуда $x = 31a/61$ есть стоимость моего шанса. Следовательно, шанс моего противника $30a/61$ и соотношение наших шансов, стало быть, равно 31:30.

Замечания [Я. Б.]

В этой задаче автор был впервые вынужден применить алгебраический анализ, тогда как в предшествующем изложении он пользовался только синтезом. Различие между первым и вторым состоит в том, что во всех прежних предложениях искомое ожидание определялось по другим ожиданиям, которые были либо полностью известны и заданы, либо, действительно, неизвестны, но по существу являлись предшествующими и более простыми и не зависящими в свою очередь от искомых. По этой причине было возможно, начиная с самых простых из них, шаг за шагом изучать более сложные положения без всякого анализа.

Здесь, однако, дело обстоит иначе, потому что когда наступает очередь играть моему противнику, мое ожидание не может быть оценено обычным для автора способом, если не считать известным тот жребий, который я получаю, когда очередь играть переходит ко мне. Но и этот жребий я не могу определить, если не сочту уже известным первый, а это [ведь] именно то, что я желаю определить. И поэтому, раз неизвестны оба ожидания, и каждое в свою очередь зависит от другого, то если следовать по [новому] пути автора, они не могут быть найдены иначе как друг через друга при помощи анализа. **[138]** Это имеет смысл заметить, чтобы различие между обоими методами и условия, при которых следует обращаться к тому и другому, стали очевидными при помощи отчетливого примера.

Я сказал не могут быть найдены, *если следовать по пути автора*, так как есть другой, специальный метод, при помощи которого я могу отыскивать неизвестное без всякого алгебраического анализа и этот дополнительный путь может также быть с пользой применен в дальнейшем. Вместо двух игроков, последовательно выбрасывающих кости, представим себе их бесконечное множество, притом каждому из них поочередно разрешен один бросок. И примем в качестве правила [условия], что выигрывает и забирает ставку любой нечетный игрок, первым выкинувший 6 очков или любой четный, первым выкинувший 7 очков.

Приняв это, становится очевидным, что второй игрок может выиграть только, если из первых двух бросков лишь второй достигает требуемого. Третий игрок также может назвать себя победителем только, если из первых трех бросков успешным окажется лишь третий; четвертый может выиграть только, если успешен лишь четвертый из первых четырех бросков и т. д. Мы заменяем 5 и 31, т. е. числа случаев, при которых на двух костях может и не может быть выброшено 6 очков, на b и c. Мы также заменим 6 и 30, т. е. соответственные числа случаев для семи очков, на e и f. И мы полагаем a равным сумме всех случаев, $a = b + c$ или $a = e + f$. И теперь, в соответствии с Правилом в конце Замечаний к Предложению 12, мы найдем, что ожидания отдельных игроков будут такими[18]:

Игрок	1	2	3	4	5	6	7	8	и т. д.
Ожидание	b/a	ce/aa	bcf/a^3	$ccef$	$bccff$	c^3eff	bc^3f^3	c^4ef^3	и т. д.

Если я теперь мысленно заменю игроков, которые осуществили первый, третий, пятый и последующие нечетные броски, одним игроком, и если я также поставлю себя на место второго, четвертого, шестого и других игроков, занимающих четные места, то станет ясно, что мы оказываемся именно в положении данной задачи. Более того, ожидания каждого из нас [двоих] должны быть равны суммам ожиданий всех игроков, которых мы заменили. Так, мое ожидание можно выразить суммой

$$ce/aa + ccef/a^4 + c^3eff/a^6 + c^4ef^3/a^8 + \ldots,$$

а ожидание моего противника – суммой

$$b/a + bcf/a^3 + bccff/a^5 + bc^3f^3/a^7 + \ldots$$

Это – бесконечные геометрические прогрессии с [одним и тем же] знаменателем cf/aa; сумма первой равна $ce/(aa - cf)$, сумма второй – $ab/(aa - cf)$. Таким образом, отношение моего шанса к шансу моего противника окажется равным ce/ab, или, если вернуться к численным значениям букв a, b, c и e, равным 31/30, что очевидно совпадает с результатом [Гюйгенса] выше.

Приложение [Решение дополнительных задач Х. Гюйгенса]

В качестве заключительной виньетки к своему трактату автор приложил следующие пять задач[19], однако исключил всякий анализ или доказательства, оставив это читателям. И поэтому мы приводим эти доказательства частично здесь, а частично вынуждены отложить их до второй [части] книги. **[139]**

Задача 1. A и B играют с двумя костями на таких условиях. A выигрывает, если он выкидывает 6 очков, а B – если выкинет 7. A начинает, затем B выбрасывает кости дважды. После этого A снова выбрасывает кости дважды и так далее [каждый по очереди выбрасывает кости дважды] пока кто-то из них не выиграет. Требуется определить отношение шансов A и B. Ответ: оно равно 10 355:12 276.

Решение [Я. Б.] Пусть жребий A сто́ит t когда он начинает игру, но пусть он сто́ит x, когда очередь бросать доходит до игрока B. Пусть он будет равен y после того, как B сделает один бросок. Но когда B сделает два броска, т. е. когда очередь в игре вернется к A, пусть жребий A будет z. Тогда, поскольку все эти жребии различны и неизвестны и поскольку любой предшествующий жребий зависит от последующего, а последующий в свою очередь от предыдущего, как станет ясно из приложенного вывода, эта задача не может быть решена иначе как при помощи алгебраического анализа, по крайней мере по методу автора, что мы указали [в Замечаниях] после последнего предложения.

Итак, во-первых, поскольку из 36 бросков двух костей 5 приносят A шестерку и могут сделать его победителем и 31 передают очередь B, то в начале игры A имеет 6 шансов получить a (т. е. ставку) и 31, чтобы получить x. В соответствии с часто восхваляемым предложением это сто́ит $(5a + 31x)/36$. Поскольку, однако, мы обозначили его жребий в начале игры через t, то $t = (5a + 31x)/36$. Далее, когда очередь доходит до B, A имеет 6 шансов, чтобы не получить ничего (ибо, действительно, имеется 6 случаев для выбрасывания 7 очков и эти случаи благоприятны его противнику) и 30 шансов получить y, что приводит к его жребию в $5y/6$. И этот самый жребий мы назвали x, так что $x = 5y/6$. Далее, когда B закончил свой первый бросок и готов бросать вторично, A имеет на том же основании 6 шансов получить 0 и 30 чтобы получить следующий жребий z. И так как, на самом деле, он должен был получить в этот момент y, то $y = 5z/6$. И тогда, когда очередь возвращается к A, т. е. на тот момент, на который мы обозначили его ожидание через z, он имеет 5 шансов получить a, – если он выкинет 6 очков и, если дело обернется иначе, 31 шанс получить свой первоначальный жребий t. И тогда, действительно, игроки окажутся в том же положении, в каком они были в самом начале, ибо у A остался один бросок, после чего должны последовать два броска у B, затем другие два броска у A и т. д., совсем как было в начале.

Ясно, однако, что 5 шансов для a и 31 шанс для t сто́ят $(5a + 31t)/36$, так что $z = (5a + 31t)/36$. Получив [теперь] при помощи этого довода столько же уравнений, сколько было предположено неизвестных, необходимо идти обратно от последующих уравнений к предыдущим, подставляя z, найденное из последнего уравнения, в ближайшее предшествующее, так что $y = (25a + 155t)/216$. Это значение затем подставляется в ближайшее предыдущее уравнение, в результате чего $x = (125a + 775t)/1296$. И, наконец, это значение подставляется в первое уравнение и таким образом искомый жребий оказывается равным $t = 10\,355a/22\,631$. И для игрока B остается жребий $12\,276a/22\,631$, так что соотношение шансов A и B будет равно 10 355:12 276, в точности равное найденному автором.

Этот же результат может быть получен несколько более кратким путем с использованием только трех неизвестных, t, x и z, и без привлечения жребия y, который A приобретает после того, как B сделает первый бросок. Из Замечаний к Предложению 11 ясно, что жребий того, кто берется один раз выкинуть 7 очков в двух бросках, равен 11/36 ставки (ибо число всех бросков a относится к числу бросков c, при которых 7 очков не вскрываются, как 6:5 и поэтому $(aa - cc)/aa = 11/36$). Поэтому, в соответствии с тем, что мы указали в том же месте, в Замечании **I**, можно заключить, что имеется 11 шансов, при которых игрок B, при наступлении одной из своих очередей, выбрасывает 7 очков и побеждает, тогда как A не выигрывает ничего, и 25 других шансов, при которых он не добивается успеха ни при каком броске, так что очередь возвращается к A и делает его жребий равным z. Для A, который, как предполагается, владеет в этом положении жребием x, это сто́ит $25z/36$, так что $x = 25z/36$. Оставляя другие обстоятельства такими, какими они были и раньше, и подставляя значение z, полученное выше, мы найдем, как и раньше, что $x = (125a + 775t)/1296$ и, следовательно, $t = 10\,355a/22\,631$.

Метод автора здесь ясен и он подходящ для применения во всех подобных лотереях и азартных играх, в которых несколько неизвестных жребиев постоянно следуют один за другим, однако после некоторого числа бросков игра возвращается к прежнему состоянию и те же неизвестные жребии, имевшиеся у игроков в начале, повторяются. Но не так легко усмотреть, каким методом надо исследовать те задачи, в которых при продолжения игры жребии никогда не возвращаются по кругу, а вместо них появляются один за другим новые жребии, отличающиеся от предыдущих и в равной мере неизвестные, и так до бесконечности.

В трактате автора таких задач по существу нет. Некоторое время тому назад я предложил несколько таких задач (*Ephemerides Eruditorum Gall.* 1685, art. 25; [Bernoulli 1685]), надеясь, что кто-нибудь постарается их решить[20]. Но поскольку за целых пять лет никто не предложил решения, я сам сообщил его (*Acta Erud. Lips.* за май 1690 [Bernoulli 1690]), непосредственно после чего основу решения в менее понятном виде представил весьма изобретательный Лейбниц (там же, номер за июль того же года [Leibniz 1690]). Я теперь опишу его яснее, но вначале покажу каким путем задача решается методом нынешнего автора. **[140]** И эта основа не очень отличается от той, которая была также принята в Замечаниях к предыдущему предложению. Она же может быть легко применена к вопросам, в которых ожидания либо постоянно возвращаются по кругу, либо нет. Отличие только в следующем: в задачах первого вида мы приходим к одному или большему числу бесконечных рядов, чьи суммы могут быть выражены какой-то [замкнутой] величиной, тогда как в задачах второго вида мы приходим к рядам, которые ни в коей мере не суммируются так легко.

Мы предположим, что имеется бесконечное множество игроков, поочередно выбрасывающих кости. Из них, первый, четвертый и пятый, восьмой и девятый, и т. д., – каждый раз пропуская двоих и включая двух последующих, – могут выиграть при появлении шести очков, тогда как остальные, – второй и третий, шестой и седьмой и т. д., – при выбрасывании семи очков. И в соответствии с Правилом, присоединенным к Замечаниям к Предложению 12, мы отыскиваем ожидания отдельных игроков. Если a, b, c, e, f имеют те же значения, что и в Замечаниях к предыдущему предложению, эти ожидания оказываются равными[21]

Игроки	1(A)	2 (B)	3 (B)	4 (A)	5 (A)	6 (B)	7 (B)
Ожидания	b/a	ce/aa	cef/a^3	$bcff$	$bccff$	c^3eff	c^3ef^3

Игроки	8 (A)	9 (A)	10 (B)	11 (B)	12 (A)	и т. д.
Ожидания	bc^3f^4	bc^4f^4	c^5ef^4	c^5ef^5	bc^5f^6	и т. д.

Если, следовательно, мы заменим всех игроков, которые выигрывают при выбрасывании шести очков, единым игроком *A*, а тех, кто выигрывает при выбрасывании семи очков, – единым игроком *B*, то окажемся в положении нынешней задачи и поэтому заключаем, что жребий *A* будет

$$b/a + bcff/a^4 + bccff/a^5 + bc^3f^4/a^8 + bc^4f^4/a^9 + bc^5f^6/a^{12} + \text{и т. д.},$$

а жребий *B*

$$ce/aa + cef/a^3 + c^3eff/a^6 + c^3ef^3/a^7 + c^5ef^4/a^{10} + c^5ef^5/a^{11} + \text{и т. д.}$$

И поскольку в каждом из этих рядов члены на четных и нечетных местах взятые по-отдельности образуют убывающие геометрические прогрессии с [одним и тем же] знаменателем $ccff/a^4$, то ясно, что они находятся в нашей власти. Сумма первого ряда равна $(a^3b + bcff)/(a^4 - ccff)$, а второго – $(aace + acef)/(a^4 - ccff)$. Поэтому отношение шансов игроков *A* и *B* равно $(a^3b + bcff)/(aace + acef)$, т. е., если принять $a = 36$, $b = 5$, $c = 31$, $e = 6$ и $f = 30$, 372 780/441 936 = 10 355/12 276, в точности как выше.

Теперь следуют примеры на тот вид задач, в которых жребии не возвращаются к первоначальному состоянию. Пусть будут два игрока, *A* и *B*, играющие друг против друга двумя костями при условии, что выигрывает тот, кто первым выкинет 7 очков. Их ожидания отыскиваются при игре по следующим схемам.

1. *A* выбрасывает кости 1 раз, *B* – 1 раз; *A* – дважды, *B* – 1 раз; *A* – трижды, *B* – 1 раз; *A* – четырежды, *B* – 1 раз и т. д.
2. *A* – 1 раз, *B* – 1 раз; *A* – 1 раз, *B* – дважды; *A* – 1 раз, *B* – трижды; *A* – 1 раз, *B* – четырежды и т. д.
3. *A* – 1 раз, *B* – 1 раз; *A* – дважды, *B* – дважды; *A* – трижды, *B* – трижды; *A* – 4 раза, *B* – четырежды и т. д.
4. *A* – 1 раз, *B* – дважды; *A* – трижды, *B* – четырежды; *A* – 5 раз, *B* – 6 раз; *A* – 7 раз и т. д.

Здесь аналитический метода автора ничего не дает, но мой метод определяет искомое так же легко как раньше. Вместо двух игроков, *A* и *B*, выбрасывающих кости поочередно, я вновь представляю себе их бесконечное множество, каждому из которых достается лишь 1 бросок и спрашиваю, каковы ожидания каждого. По Следствию 1 к Правилу для Предложения 12, полагая, что количества случаев *a*, *b* и *c* одни и те же во всех бросках, можно определить, что вообще ожидание любого игрока равно b^mc^{n-m}/a^n, где *m* – число [разрешенных] бросков, при которых выпадает 7 очков (один из *b* случаев), всегда равное 1, а *n* – число всех бросков, считая с начала игры, последовательно равное 1, 2, 3, 4 и т. д. Подставляя эти значения, мы составляем следующую таблицу[22]

Игроки	1 (*A*)	2 (*B*)	3 (*B*)	4 (*A*)	5 (*A*)	6 (*A*)	7 (*B*)	8 (*B*)
Ожидания	b/a	bc/aa	bcc/a^3	bc^3	bc^4	bc^5	bc^6	bc^7

[141] Далее, вместо этих игроков я полагаю двух, *A* и *B*, назначая каждому из них принадлежащие им места согласно со схемой и суммирую ожидания, соответствующие всем этим местам по порядку, чтобы найти полное ожидание каждого из этих двоих. Таким образом, поскольку по условиям четвертой схемы *A* должен был получить первый бросок, затем четвертый, пятый и шестой, далее 11-й, 12-й, 13-й, 14-й, 15-й и т. д., я отбираю в отдельный ряд ожидания игроков, обозначенных этими номерами, т. е. первого, четвертого, пятого, шестого, и т. д. И я отбираю ожидания второго, третьего, седьмого и т. д. игроков, которых заменяет *B*, в другой ряд. Тем самым я получаю

жребий *A*: $b/a + bc^3/a^4 + bc^4/a^5 + bc^5/a^6 + bc^{10}/a^{11} + bc^{11}/a^{12} + bc^{12}/a^{13} + bc^{13}/a^{14} + bc^{14}/a^{15} +$ и т. д.,
жребий *B* $bc/aa + bcc/a^3 + bc^6/a^7 + bc^7/a^8 + bc^8/a^9 + bc^9/a^{10} + bc^{15}/a^{16} + bc^{16}/a^{17} + bc^{17}/a^{18} +$ и т. д.

Исключая отовсюду b и подставляя вместо него $a - c$, я получаю

жребий *A:* $1 - c/a + c^3/a^3 - c^6/a^6 + c^{10}/a^{10} - c^{15}/a^{15} +$ и т. д. и
жребий *B*: $c/a - c^3/a^3 + c^6/a^6 - c^{10}/a^{10} + c^{15}/a^{15} +$ и т. д.,

который дополняет жребий *A* до единицы.

И я вывожу этот результат опять-таки иначе. Я снова полагаю на месте игроков *A* и *B* их бесконечное множество, *A, B, C, D, E, F, G*, и т. д., и каждому из них я назначаю столько бросков, сколько, в соответствии с данной схемой, дается игрокам *A* и *B* как только очередь играть возвращается к одному из них.Так, в четвертой схеме, при которой *A* должен играть 1 раз, затем *B* – дважды, затем снова *A* – трижды, *B* – четырежды и т. д., я представляю себе, что *A* играет 1 раз, *B* – дважды, *C* – трижды , какой-то иной игрок *D* – четырежды и т. д.

Затем я по-отдельности исследую жребии каждого из этих игроков, обращая внимание на число бросков, назначенных ему, равно как и всем предшествующим игрокам вместе. Это не представляет труда, если учесть то, что было уже показано выше в Замечаниях к Предложению 11 (и полагать первое число бросков равным n, а второе – s). Жребий в общем случае равен $(a^n c^s - c^{n+s})/a^{n+s} = c^s/a^s - c^{n+s}/a^{n+s}$. Принимая в четвертой схеме n, равным по порядку 1, 2, 3, 4 и т. д., а для s – числа 0, 1, 3, 6, 10 и т. д. и сумму чисел 1, 2, 3, 4 и т. д. начиная с начала, мы немедленно получаем следующие ожидания отдельных игроков

A: $[1 - (c/a)]$; *B*: $[(c/a) - (c^3 - a^3)]$; *C*: $[(c^3/a^3) - (c^3 - a^3)]$;
D: $[(c^6/a^6) - (c^{10} - a^{10})]$; *E:* $[(c^{10}/a^{10}) - (c^{15} - a^{15})]$;
F: $[(c^{15}/a^{15}) - (c^{21} - a^{21})]$; *G*: $[(c^{21}/a^{21}) - (c^{28} - a^{28})]$ и т. д.

После этого ничего другого не остается, кроме как суммировать ожидания всех игроков на нечетных местах *A, C, E, G,* и т. д. и также игроков на четных местах *B, D, F,* и т. д., чтобы таким образом получить как и раньше ожидания одних-единственных игроков *A* и *B*, играющих попеременно. Каждый может определить, какими окажутся суммы ожиданий. И порядок [действий] не изменится, если предположить трех, четырех или большее число игроков.

При других схемах задача также решается любым из указанных методов. Если положить для краткости письма $c/a = m$, то ожидания игроков *A* и *B* по каждой схеме будут **[142]**

1. $1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9 - m^{13} + m^{14} - m^{19} +$ и т. д.;
$m - m^2 + m^4 - m^5 + m^8 - m^9 + m^{13} - m^{14} + m^{19} -$ и т. д.

2. $1 - m + m^2 - m^3 + m^5 - m^6 + m^9 - m^{10} + m^{14} - m^{15} +$ и т. д.;
$m - m^2 + m^3 - m^5 + m^6 - m^9 + m^{10} - m^{14} + m^{15} -$ и т. д.

3. $1 - m + m^2 - m^4 + m^6 - m^9 + m^{12} - m^{16} + m^{20} - m^{25} +$ и т. д.;
$m - m^2 + m^4 - m^6 + m^9 - m^{12} + m^{16} - m^{20} + m^{25} -$ и т. д.

4. $1 - m + m^3 - m^6 + m^{10} - m^{15} + m^{21} - m^{28} + m^{36} - m^{45} +$ и т. д.;
$m - m^3 + m^6 - m^{10} + m^{15} - m^{21} + m^{28} - m^{36} + m^{45} -$ и т. д.

Видно, что каждый из этих жребиев выражен некоторым бесконечным рядом, в котором знаки плюс и минус попеременно чередуются. По сравнению с геометрической прогрессией 1, m, m^2, m^3, m^4, m^5 и т. д., в каждом ряду некоторые члены исключены скачками неравной длины, что препятствует их должному суммированию, однако сколь угодно точное аппроксимирование нетрудно. Так, полагая $a = 36$ в качестве числа всех случаев для двух костей и $c = 30$ как числа случаев, при которых желаемые 7 очков не вскрываются, так что c/a или $m = 30/36 = 5/6$, получаем жребий A в первой схеме равным 71 931/100 000, во второй схеме – 40 058/100 000, в третьей и четвертой – 59 679/100 000 и 52 392/100 000 и ни в одном случае не отходящим ни в одну сторону от этих значений больше чем на 1/100 000. И аналогично отношения шансов A и B в этих схемах оказываются равными 71 931/28 069, 40 058/59 942, 59 679/40 321 и 52 392/47 608.

В остальном заметим, что тот, кто рассмотрит показатели степеней величины m, которые составляют члены этих рядов, увидит, что их разности во всех случаях совпадают с количествами бросков, которые в соответствии с этими членами даются по очереди противостоящим друг другу игрокам A и B. Так, в первом ряду

$$1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9 \text{ и т. д.}$$

показатели степени равны 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 и т. д., а разности между ними, равные 1, 1, 2, 1, 3, 1 и т. д., в точности совпадают с количествами бросков, требуемыми по предположению первой схемы, которая действительно предоставляет по порядку 1 бросок игроку A, игроку B – 1 бросок, A – 2, B – 1, A – 3, B – 1 и т. д. Есть смысл, однако, заметить, что это настолько общо, что имеет место и в задачах, в которых количества бросков назначаются поочередно двум игрокам просто как это случайно произойдет из-под пера составителя, не соответствуя никакому определенному или постоянному плану. Это соображение предоставляет нам следующее правило, которое в краткой форме показывает жребии обоих игроков.

Правило для определения жребиев двух игроков, играющих друг против друга до тех пор, пока один из них не сможет достичь цели, при поочередной игре, продолжающейся до бесконечности и назначении [каждому] любого произвольного числа бросков

(Я предполагаю, однако, что при всех бросках количества случаев для победы или значения $c/a = m$ остаются теми же самыми во всех бросках.)

Вначале выпишите по порядку количества бросков, разрешенных поочередно каждому игроку и их суммы с начала игры. Эти суммы будут показателями того же числа степеней величины *m*. Если эти степени соединить друг с другом чередующимися знаками плюс и минус, результат станет ожиданием первого игрока. Если, однако, исключить число 1, которое всегда является первым членом ряда, и поменять местами знаки остальных членов, результат будет ожиданием противника. Например, если установлено, **[143]** что, играя поочередно, *A* имеет 3 броска, *B* – 1, *A* – 4, *B* – 1, *A* – 5, *B* – 9 и т. д. до бесконечности, т. е. в соответствии с круговым числом Лудольфа[23], которое продолжается без какого-либо определенного правила, тогда количества бросков по порядку будут 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5 и т. д. и суммы этих чисел, начиная с начала, оказываются равными 0, 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, 36 и т. д. Следовательно, жребии *A* и *B* будут

$$1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36} + \text{и т. д.},$$
$$m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31} + m^{36} - \text{и т. д.}$$

То же правило остается в силе если число всех бросков ограничено, так что играть далее после их завершения запрещено даже если никто до тех пор не выиграл. Единственное исключение: последний член, чей показатель степени равен сумме всех бросков, оказывается излишним в тех рядах, в которых ему предшествует знак плюс и должен быть отброшен, так что сумма ожиданий обоих игроков совместно будет меньше единицы на его величину. Так, в предыдущем примере, если игра должна была закончиться после последней серии в 5 бросков, т. е. после 36 бросков, жребии *A* и *B* окажутся равными

$$1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36};$$
$$m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31},$$

сумма которых равна $1 - m^{36}$.

Задача 2. Три игрока, *A, B* и *C*, играют с 12 жетонами, из которых 4 белых и 8 черных при условии, что выиграет тот, кто первым вслепую вытащит белый жетон и что они вступают в игру по очереди; первым жетон вытаскивает *A*, затем *B* и *C*, далее снова *A* и т. д. Требуется определить отношение их шансов.

Решение [Я. Б.]

Смысл этой задачи неясен и ее решения могут быть различными. С одной стороны, можно предположить, что после того, как жетон извлечен из урны, он каждый раз вкладывается обратно до того, как в игру вступает следующий игрок, так что число жетонов в урне все время остается одним и тем же. С другой стороны, можно предполагать, что жетоны не возвращаются, так что их число постоянно убывает. В этом случае можно также полагать, что либо каждый игрок, либо все они вместе вытаскивают 12 жетонов.

1. Если жетоны должны быть вложены обратно после того, как игрок сделает свой выбор (и в этом случае нет никакого различия, берет ли каждый игрок 12 жетонов или их берут они все вместе), искомые жребии игроков определяются следующим образом.

1.1. По методу автора. Назовем жребий первого игрока x, второго – y и третьего – z. И когда A первым начинает игру, он имеет 4 шанса выиграть или забрать ставку (если он выберет один из белых жетонов) и 8 шансов (если выберет один из черных) потерять свою очередь, оказаться на третьем месте и приобрести жребий z. Все вместе это сто́ит $(4 + 8z)/12 = (1 + 2z)/3$. Таким же образом второй игрок, когда игра начинается, имеет 4 шанса не получить ничего и 8 шансов оказаться первым в очереди и тем самым обрести положение первого игрока и жребий x. Всё вместе это сто́ит $8x/12 = 2x/3$. Следовательно, жребий второго игрока равен $y = 2x/3$. И опять же C имеет в начале 4 шанса не получить ничего и 8 шансов оказаться вторым в очереди или получить жребий второго игрока y, что вместе сто́ит $2y/3$. Таким образом, $z = 2y/3$, т. е. $y = 3z/2$. А поскольку было также найдено, что $y = 2x/3$, оказывается, что $3z/2 = 2x/3$, т. е. $z = 4x/9$. Если подставить это значение z в первое уравнение $x = (1 + 2z)/3$, окажется, что $x = 1/3 + 8x/27$ или $x = 9/19$. Отсюда, далее, определяется y (или $2x/3$) = 6/19 и z (или $2y/3$) = 4/19 и поэтому отношение шансов x, y, z будет 9:6:4.

1.2. Нашим методом. Принимая вообще, что число всех жетонов a, из них белых b и черных c, представим себе, как уже было часто сделано, что имеется бесконечное множество игроков, играющих при установленных правилах, поочередно **[144]** вытаскивающих по жетону и вкладывающих его обратно. Снова в соответствии со Следствием 1 к правилу, указанному в Замечаниях к Предложению 12, поскольку количества белых и черных жетонов остаются без изменений при каждом извлечении, ожидания отдельных игроков оказываются следующими[24].

Так как по предположению 1-е, 4-е, 7-е, 10-е и т. д. извлечения делает A; 2-е, 5-е, 8-е. 11-е и т. д. – B; 3-е, 6-е, 9-е, 12-е и т. д. – C, то при суммировании ожиданий игроков, соответствующих этим местам, ожидания A, B и C оказываются следующими

$$b/a + bc^3/a^4 + bc^6/a^7 + bc^9/a^{10} + bc^{12}/a^{13} + \ldots = aab/(a^3 - c^3),$$
$$bc/aa + bc^4/a^5 + bc^7/a^8 + bc^{10}/a^{11} + bc^{13}/a^{14} + \ldots = abc/(a^3 - c^3),$$
$$bcc/a^3 + bc^5/a^6 + bc^8/a^9 + bc^{11}/a^{12} + bc^{14}/a^{15} + \ldots = bcc/(a^3 - c^3).$$

Эти суммы известны, поскольку ряды являются геометрическими прогрессиями. Отношение шансов здесь равно $aa:ac:cc$, т. е. (потому что $a:c$ = 12:8 = 3:2) 9:6:4 как и выше. Будь задача поставлена для четырех игроков, то по тому же методу их шансы оказались бы в отношении $a^3:aac:acc:c^3$ и в общем для n игроков, $a^{n-1}:a^{n-2}c:a^{n-3}cc$ и т. д., деля каждый предыдущий член на a/c.

2. Если, однако, смысл задачи в том, что жетоны, выбираемые из общего количества 12, не возвращаются в урну после извлечения, то первый игрок, после [неудачного] выбора займет третье место, третий игрок – второе, а второй – первое, но при этом они не будут распределять между собой те же жребии, которые существовали в начале игры, как это было при предшествующем предположении.

Напротив, ввиду изменяющегося числа жетонов они будут постоянно приобретать новые жребии, отличные от прежних. Эти жребии окажутся проще в той мере, в какой будет извлечено большее число черных жетонов и в конце-концов они станут полностью известны. Ввиду этого мы можем, применив лишь обычный для автора метод синтеза, начать с простейшего положения и продвигаться обратно через все промежуточные стадии, оказываясь, наконец, в положении, предложенном в задаче.

Для этой цели предположим, что 7 черных жетонов были уже извлечены и что очередь играть у *B*. В этом случае первый игрок, *A*, не будет ничего ожидать, поскольку остается лишь один черный жетон и один из двух других игроков, *B* или *C*, обязательно извлечет белый жетон и выиграет. Второй игрок, *B*, однако, ввиду [оставшихся] четырех белых жетонов имеет 4 шанса выиграть и, поскольку остался 1 черный жетон, 1 шанс проиграть; если он вытянет этот последний черный жетон, игрок *C* непременно выиграет. Но по той же причине третий игрок *C* имеет 4 шанса проиграть и 1 один шанс выиграть. Отсюда мы заключаем, что жребии трех игроков, *A, B* и *C*, равны 0, 4/5 и 1/5.

Предположим теперь, что взято 6 черных жетонов. В этом положении игрок *A*, чья очередь должна теперь наступить, будет иметь 4 шанса выиграть, а 2 остальных игрока – столько же шансов проиграть. Но все они, ввиду двух оставшихся черных жетонов, имеют 2 шанса приобрести свои прежние ожидания, потому что тогда останется 1 черный жетон и очередь перейдет к *B*, что и окажется положением, соответствующим предыдущему предположению. И жребии игроков поэтому теперь равны 2/3, 4/15 и 1/15.

Пусть теперь извлечено 5 черных жетонов. Тогда *C*, чья очередь теперь наступила, будет иметь 4 шанса выиграть, а 2 других игрока – столько же шансов проиграть. Но ввиду оставшихся трех черных жетонов каждый игрок будет иметь 3 шанса для только что найденных ожиданий и их жребии становятся равными 2/7, 4/35 и 3/5.

И снова, если предположить, что взято 4 черных жетонов, так что жетонов каждого цвета осталось поровну, половина шансов будет благоприятствовать *B*, чья очередь теперь наступила, и столько же шансов окажутся против *A* и *C*. Другая половина шансов, однако, возвращает всех трех игроков к их предыдущим ожиданиям. Их жребии поэтому 1/7, 39/70 и 3/10.

Применив те же доводы, найдем, что жребии при трех извлеченных черных жетонах будут 11/21, 13/42 и 1/6. Если выбраны 2 черных жетона, то 11/35, 13/70 и 1/2; если 1, то 1/5, 53/110 и 7/22. **[145]**

Наконец, если не извлечен ни один черный жетон, что является единственным положением, которое вначале интересовало нас, и для чего потребовалось исследовать все вышеуказанные варианты, жребии игроков *A, B* и *C* определятся аналогичным образом и окажутся равными 7/15, 53/165 и 7/33, или, после приведения к общему знаменателю, 77/165, 53/165 и 35/165, так что соотношение шансов будет 77:53:35.

Далее, **наш собственный привычный метод** тоже может быть применен к этому предположению [к этому варианту задачи], притом же он не менее подходящ к тем вопросам, которые обычно решаются при помощи одного только синтеза, чем к тем, которые требуют анализа.

Поскольку имеется 8 черных жетонов, которые не должны быть возвращены после извлечения, я представляю себе 9 игроков, поочередно выбирающих по одному жетону. При этом один из них непременно извлечет белый жетон и выиграет. Но никто из игроков не может надеяться выиграть, если каждый предыдущий игрок не извлечет черный жетон. Поэтому я предполагаю, что число этих жетонов (которым соответствуют числа случаев) постепенно убывают и что после первого извлечения их осталось 7, после второго – 6, после третьего – 5 и т. д. Отсюда, как показано в следующей таблице, я определяю жребии отдельных игроков по правилу, присоединенному к Предложению 12.

Игроки	1 (*A*)	2 (*B*)	3 (*C*)	4 (*A*)	5 (*B*)
Всего жетонов *a*	12	11	10	9	8
Белых *b*	4	4	4	4	4
Черных *c*	8	7	6	5	4
Ожидания	4/12	$\frac{4\cdot 8}{11\cdot 12}$	$\frac{4\cdot 7\cdot 8}{10\cdot 11\cdot 12}$	$\frac{4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{9\cdot 10\ldots\cdot 12}$	$\frac{4\cdot 5\cdot 6\ldots\cdot 8}{8\cdot 9\cdot 10\ldots\cdot 12}$

Игроки	6 (*C*)	7 (*A*)	8 (*B*)	9 (*C*)
Всего жетонов *a*	7	6	5	4
Белых *b*	4	4	4	4
Черных *c*	3	2	1	0
Ожидания	$\frac{4\cdot 4\cdot 5\ldots\cdot 8}{7\cdot 8\cdot 9\ldots\cdot 12}$	$\frac{4\cdot 3\cdot 4\ldots\cdot 8}{6\cdot 7\cdot 8\ldots\cdot 12}$	$\frac{4\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 8}{5\cdot 6\cdot 7\ldots\cdot 12}$	$\frac{4\cdot 1\cdot 2\ldots\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\ldots\cdot 12}$

И поскольку 1-е, 4-е и 7-е извлечения относятся к *A*, 2-е, 5-е и 8-е – к *B*, и 3-е, 6-е и 9-е – к *C*, я суммирую ожидания игроков, обозначенных соответствующими номерами, и нахожу ожидания для *A*, *B* и *C*[25].

[146] А поскольку в этих числах заметен определенный закон следования, мы могли бы легко дать общее правило для любого числа игроков и жетонов, будь это достаточно важно, чтобы останавливаться на этом.

3. Задача, понимаемая в третьем смысле (когда каждый из трех игроков имеет 12 своих собственных жетонов и извлекает их по одному без возвращения), очень немногим отличается от предшествующей за исключением того, что ввиду возросшего числа жетонов она требует более длительного решения.

Предположим во-первых, что у *A* и *B* не осталось более черных жетонов, а у *C* остался 1 и, более того, наступила его очередь. Имея 4 белых жетона и 1 черный, *C* будет обладать четырьмя шансами для выигрыша и одним для проигрыша, потому что, выбери он черный жетон, *A*, имеющий одни только белые жетоны, непременно выиграет. Но по той же причине *A*, в свою очередь, имеет 4 шанса, чтобы проиграть и 1, чтобы выиграть. Второму игроку, *B*, действительно не остается ничего, потому что победа неминуемо достанется либо одному, либо другому из оставшихся двух. Отсюда мы заключаем, что жребии игроков *A, B* и *C* равны 1/5, 0 и 4/5.

Предположим теперь, что у *A* не осталось черных жетонов, а у каждого из остальных – по одному. Тогда *B*, чья очередь наступила, имеет 4 шанса, чтобы выиграть, а у остальных столько же шансов для проигрыша. Но есть, однако, 1 шанс, который предоставляет каждому игроку ожидание предыдущего положения. Всё это вместе приводит к жребиям *A, B* и *C* равным 1/25, 4/5 и 4/25.

Пусть, в третьих, у каждого из трех игроков *A, B* и *C* остался 1 черный жетон. Тогда *A*, чей черед наступил, имеет 4 шанса, чтобы выиграть, а остальные [игроки] – 4 шанса, чтобы проиграть. Но есть, однако, один шанс, который, возвращает всех трех игроков к их предыдущим ожиданиям, так что возникают жребии 101/125, 4/25 и 4/125 с соотношением 101:20:4.

Таким же образом можно исследовать, что́ следует игрокам когда у них остаются 1, 1 и 2; 1, 2 и 2; 2, 2 и 2; 2, 2 и 3; 2, 3 и 3; 3, 3 и 3; и т. д. черных жетонов и так до того первоначального предположения, при котором у каждого 8 черных жетонов. Но поскольку было бы слишком утомительно следовать шаг за шагом по этим [промежуточным положениям], я теперь покажу, как можно получить искомое скачками, определяя жребии игроков только для тех положений, при которых у каждого из них остается поровну черных жетонов.

Обозначим число черных жетонов через c, белых – через b и число всех жетонов $a = b + c$. Необходимо, во-первых, рассмотреть все изменения, которые могут произойти, когда каждый игрок извлекает один из своих жетонов. Ясно, однако, что быть может все трое вытащат белый жетон, или только двое из них, или один, или никто. Затем следует заметить, сколько случаев соответствует каждому из этих вариантов. Действительно, число этих случаев исследуется таким образом. Если кто-то держит пари, что все три игрока извлекут белый жетон, то его жребий будет b^3/a^3. Если он держит пари, что двое игроков, *A* и *B*, или *A* и *C*, или *B* и *C*, выберут белый, а третий – черный, то его жребий будет bbc/a^3. Если же он утверждает, что только *A* или *B* или *C* извлечет белый жетон, а остальные – черный, он получит жребий bcc/a^3. Если, далее, он пожелает утверждать, что ни один игрок не вытянет белого жетона, он получит жребий c^3/a^3.

Все эти результаты основаны на Следствии к Правилу, присоединенному к Предложению 12, потому что жребий спорящего сто́ит столько же, как если бы кто-то взялся добиться чего-то тремя бросками при одинаковом числе случаев во всех из них в точности трижды, дважды, один раз или не добиться этого вовсе. По этой причине если мы, как было сказано в Замечании **I** к Предложению 11, отбросим общие знаменатели этих дробей, числители покажут количества случаев, при которых смогут произойти каждый из указанных исходов.

В третьих, наконец, следует заметить, что в соответствии с условиями задачи первый игрок *A* должен побеждать каждый раз, когда он один, или вместе с кем-то из остальных, или вместе с ними обоими извлечет белый жетон. Второй игрок, *B*, однако, выигрывает, если он извлечет белый жетон либо один, либо вместе с *C*, третий же игрок *C* не побеждает, если только он один не выберет белый жетон. И действительно, когда никто не извлекает белый жетон, то каждый игрок приходит к ожиданию, которое он имел, когда все они по предположению имели на один черный жетон меньше. И поэтому, после сложения всех случаев, которые благоприятны или препятствуют каждому игроку, мы найдем, что первый игрок *A* имеет $(b^3 + 2bbc + bcc)$

шансов выиграть, т. е. получить ставку 1, и ($bbc+2bcc$) шансов проиграть. Второй игрок *B* имеет соответственно ($bbc + bcc$) и ($b^3 + 2bbc + 2bcc$) шансов, а третий – bcc и ($b^3 + 3bbc + 2bcc$). И у каждого из них имеется, однако, c^3 шансов для возвращения к прежде исследованным жребиям. Если обозначить эти последние ожидания через $p/(p + s + t)$, $s/(p + s + t)$ и $t/(p + s + t)$, то по Предложению 3 жребии игроков *A, B* и *C* будут **[147]**

$$[(b^3 + 2bbc + bcc) \cdot 1 + (bbc +2bcc) \cdot 0 + c^3 \cdot p/(p + s + t)]/a^3,$$
$$[(bbc + bcc) \cdot 1 + (b^3 + 2bbc + 2bcc) \cdot 0 + c^3 \cdot s/(p + s + t)]/a^3,$$
$$[bcc \cdot 1 + (b^3 + 3bbc + 2bcc) \cdot 0 + c^3 \cdot t/(p + s + t)]/a^3.$$

Другими словами, исключая общий знаменатель и умножая на $(p + s + t)/c^3$, получим отношение их шансов равным

$$[(b^3 + 2bbc + bcc) \cdot (p + s + t)/c^3 + p]: [(bbc + bcc) \cdot (p + s + t)/c^3 + s]:$$
$$[bcc \cdot (p + s + t)/c^3 + t].$$

Допустив всё это и возвращаясь к решению нашей первоначальной задачи, следует далее предположить, что у каждого игрока осталось 2 черных жетона. Тогда буквы *b* и *c* будут иметь значения 4 и 2 (которые можно заменить меньшими числами в том же отношении, 2 и 1). И поскольку в предыдущем положении, когда каждый игрок имел 1 черный жетон, отношение шансов, которые мы указали буквами *p, s* и *t*, было найдено равным 101:20:4, так что сумма $(p + s + t) = 125$, числа 2351, 770 и 254, выражающие отношение шансов игроков в данном положении, быстро определятся по предыдущей формуле.

По тому же самому соглашению, если предположить, что у каждого игрока осталось 3 черных жетона, так что *b* и *c* сто́ят 4 и 3, а буквы *p, s* и *t* это только что найденные числа 2351, 770 и 254, отношение шансов окажется выраженным числами 26 851, 11 270 и 4754. Если у каждого осталось 4 черных жетона, так что значения букв *b* и *c* – 4 и 4 (т. е., в наименьших числах, 1 и 1), отношение шансов будет 198 351:97 020:47 629.

Если у каждого осталось 5 черных жетонов, т. е. буквы *b* и *c* сто́ят 4 и 5, отношение шансов будет 1 087 407:590 940:322 029 или, разделив на 9, 120 823:65 660:35 781. Если у каждого осталось 6 черных жетонов и значения букв *b* и *c* – 4 и 6 или 2 и 3, отношение шансов будет выражено числами 532 423, 312 620 и 183 957. Если у каждого осталось 7 черных жетонов, так что буквы *b* и *c* означают 4 и 7, отношение шансов выражается числами 1 984 423, 1 236 620 и 771 957. Если, наконец, никакие жетоны не были извлечены и у каждого игрока остаются все 8 черных жетонов, и буквы *b* и *c* сто́ят 4 и 8, т. е. 1 и 2, что и является тем положением, которое мы предложили исследовать и для которого мы считали необходимым решить задачу для всех предыдущих положений, мы находим, что искомое отношение между шансами игроков выражено числами 6 476 548, 4 231 370 и 2 768 457.

Тот читатель, который захочет, сможет применить метод, использованный нами, к этому предположению [к задаче, понимаемой в последнем рассмотренном смысле]. Мы, однако, опускаем это с целью краткости изложения.

Задача 3. *A* держит пари против *B* на то, что из колоды в 40 карт, по 10 каждой масти, он вытянет 4 карты, по одной каждой масти. Оказывается, что в этом случае шансы *A* и *B* относятся как 1000:8139.

Решение [Я. Б.] Я вначале полагаю, что уже были вытянуты 3 карты различных мастей, так что в колоде осталось по 9 карт каждой из этих мастей, а всего 27 карт, и 10 карт четвертой масти. Отсюда ясно, что имеется 27 шансов, при которых не удастся вытянуть карту четвертой масти и 10 шансов для успеха. Для *A* это сто́ит 10/37 ставки. **[148]**

Я далее предполагаю, что вытянуты карты двух различных мастей. Тогда в колоде останется 18 карт этих и 20 карт двух других мастей. По этой причине имеется 18 шансов неудачи и 20 шансов, при которых можно добиться успеха и получить предыдущее ожидание 10/37. Это приводит к жребию игрока, равному 100/703.

В третьих, я полагаю, что вытянута одна карта. Тогда в колоде остается 9 карт той же масти, что и выбранная, и 30 карт оставшихся трех мастей. Поэтому при вытаскивании второй карты будет 9 шансов проиграть и 30 шансов достать карту другой масти и тем самым получить только что найденное ожидание 100/703. Это сто́ит 1000/9139.

Если не было вытянуто ни одной карты, жребий игрока тот же самый, что и в предыдущем положении и остается равным 1000/9139, поскольку все 40 шансов приводят *A* в предыдущее положение. По этой причине жребий его противника будет 8139/9139 и отношение шансов – 1000:8139, в точности как утверждает автор.

Эта задача может также быть решена иначе, применяя учение о сочетаниях, как мы покажем в части 3 книги после разъяснения этого учения.

Задача 4. Пусть, как и выше, имеются 12 жетонов, 4 белых и 8 черных. *A* держит пари против *B*, что из 7 жетонов, которые он выберет вслепую, 3 окажутся белыми. Требуется определить отношение их шансов[26].

[Я. Б.] Мы вынуждены отложить решение этой задачи до третьей части книги, потому что для её решения видимо требуется хорошее знание искусства сочетаний.

Задача 5. *A* и *B*, имея по 12 жетонов, играют с тремя костями при условии, что при каждом выкидывании 11 очков *A* должен отдать один жетон *B*, а *B* должен отдать жетон *A* при каждом выкидывании 14 очков, и выигрывает тот, кто первым завладеет всеми жетонами. В этом случае оказывается, что шансы *A* и *B* относятся как 244 140 625 к 282 429 536 481.

Решение [Я. Б.] Следует учесть, во-первых, что существует 216 различных возможных бросков трех костей. Среди них – 15 случаев выпадения 14 очков и 27 случаев для 11 очков, так что при любом броске существует 15 случаев, при которых *A* получает жетон от *B* и 27 случаев, при которых *B* получает жетон от *A*. В остальных 174 случаях каждый игрок сохраняет число своих жетонов и, соответственно, свои шансы.

Далее дóлжно заметить, что эти 174 случая, которые не приводят ни к чему, при которых шансы игроков не изменяются, могут по Следствию 4 к Предложению 3 быть пренебрегаемы точно так, будто они не существовали и будто бы для трех костей имеется только 42 различных броска, из которых 15 приводят A к получению еще одного жетона, и 27 приводят B к тому же. В третьих, необходимо принять во внимание, что по Следствию 2 к Предложению 3 можно заменить числа случаев 42, 15 и 27, поскольку они обладают общими делителями, наименьшими числами в том же соотношении, т. е. числами 14, 5 и 9. Но чтобы решение оказалось более общим, мы заменим их буквами a, b и c.

Указав всё это, мы теперь идем дальше в решении предложенного вопроса, спрашивая, по порядку, каковы будут шансы игроков, начни они [игру] с одного жетона, затем с двух, затем, если они начинают с трех, четырех и т. д., пока не станет ясно по индукции, каковы их шансы, если каждый начинает с 12 жетонов.

Если каждый из них начинает с одного жетона, то ясно, что их шансы будут в отношении чисел b и c. Если каждый начинает с двух, первый бросок приведет к тому, что A будет иметь либо 3 жетона, либо 1. Если он заимеет 3, у него окажется b шансов, при которых он сможет приобрести все 4, т. е. выиграть и приобрести ставку. И у него будет c шансов, при которых он вернется назад к двум жетонам, т. е. к своему исходному жребию, который мы назовем z. Вместе это стóит $(b + cz)/a$. Если у A останется только 1 жетон, у него окажется b шансов, чтобы вернуться к обладанию двумя, т. е. к жребию z, и c шансов проиграть. Вместе это стóит bz/a. И, опять-таки, поскольку имеется b шансов, при которых он может приобрести 3 жетона после первого броска **[149]** и c шансов, при которых у него останется только 1, то вначале будут иметься b шансов, которые дают ему $(b + cz)/a$ и c шансов, дающих ему bz/a. Всего вместе, стало быть, его жребий равен $(bb + bcz)/aa$. Следовательно, $z = (bb + 2bcz)/aa$ или $z = bb/(aa - 2bc) = bb/(bb + cc)$. И игроку B остается жребий $cc/(bb + cc)$, так что шансы этих двух игроков находятся в соотношении $bb:cc$.

Если каждый игрок начинает с трех жетонов, после первого броска A будет иметь либо 4, либо только 2. Пусть его ожидания в этих двух состояниях будут x и y. Если у него 4 жетона, то он либо первым добудет 2 жетона у другого игрока и выиграет, либо другой игрок получит 2 жетона от него, так что у A всё еще останется 2. Но имеется bb шансов, при которых он получит следующие 2 жетона и cc шансов, при которых их получит его противник (как можно заключить из того, что только что было сказано в сочетании с Замечанием **I** к Предложению 11). Таким образом, A имеет bb шансов, при которых он может получить 1 и cc шансов, чтобы получить жребий y и вместе это стóит ему $(bb + ccy)/(bb + cc)$. А поскольку это было также обозначено x, то $x = (bb + ccy)/(bb + cc)$ или $y = (bbx + ccx - bb)/cc$.

Аналогично, когда у него остается только 2 жетона у него будет bb шансов, при которых он сможет дополнительно получить еще 2, т. е обеспечить себе жребий x, и cc шансов, при которых он может потерять свои жетоны и, вместе с ними, всю ставку. Всё это вместе равносильно тому, будто он имеет $bbx/(bb + cc)$. А так как он по предположению имеет также y, то $y = bbx/(bb + cc)$. Но выше было также найдено, что $y = (bbx + ccx - bb)/cc$ и поэтому $(bbx + ccx - bb)/cc = bbx/(bb + cc)$.

Следовательно, $x = (b^4 + bbcc)/(b^4 + bbcc + c^4)$. И также $y = bbx/(bb + cc) = b^4/(b^4 + bbcc + c^4)$.

Если, вычислив это, мы теперь вернемся к предположенному исходному состоянию и учтем, что когда каждый игрок начинал с трех жетонов, было b шансов, при которых игрок A после первого броска имел 4 жетона, т. е. приобретал жребий x или $(b^4 + bbcc)/(b^4 + bbcc + c^4)$, и c шансов, при которых у него оставалось только 2 жетона, т. е. получал жребий y или $b^4/(b^4 + bbcc + c^4)$, откуда следует, что ожидание A становится равным

$$(b^5 + b^4c + b^3cc)/(b^5 + b^4c + b^3cc + bbc^3 + bc^4 + c^5) = b^3/(b^3 + c^3), –$$

сокращая на $(bb + bc + cc)$. И противнику B остается $c^3/(b^3 + c^3)$, так что их шансы теперь находятся в отношении b^3/c^3.

Поскольку в самом деле шансы игроков A и B оказываются в простом отношении чисел b и c когда каждый из них начинает с одного жетона, в двойном отношении этих чисел когда они начинают с двух, и в тройном – когда с трех, мы заключаем по индукции, что если они начинают с любого числа жетонов, их шансы всегда будут в отношении чисел b и c, умноженных друг на друга столько раз, сколько жетонов имеет каждый игрок в начале игры[27]. Следовательно, в примере автора, в котором предположено, что каждый игрок в начале имеет 12 жетонов, шансы будут относиться как b^{12}/c^{12}, т. е., если вернуться к значениям 5 и 9 для b и c, как 244 140 625:282 429 536 481, как указал автор.

К тому же самому результату можно придти без всяких вычислений следующим образом. Если A имеет все жетоны кроме одного, у него b шансов, при которых он может выиграть, а если B имеет все жетоны кроме одного, у него c шансов, при которых он может выиграть. Далее, если A имеет все жетоны кроме двух, у него b шансов, при которых он сможет заиметь все жетоны кроме одного, т. е. b шансов, при которых он может получить b предыдущих шансов, т. е. он имеет b раз b или bb шансов, при которых он может выиграть. Аналогичным образом, если B имеет все жетоны кроме двух, он может выиграть в cc случаях. Итак, для каждого жетона, которого нехватает игрокам для победы, у A есть b шансов, а у B – c шансов, при которых **[150]** они могут получить доступ к своим предшествующим жребиям. Поэтому, раз в начале игры каждый игрок имеет 12 жетонов и, соответственно, каждому нехватает столько же для победы, числа b и c, умноженные сами на себя 12 раз, выявят, как и раньше, отношение шансов.

Если, однако, кто-либо полагает, что этот довод недостаточно ясен или если у кого-то нет достаточной веры в индукцию, они могут действовать, используя тот же сокращенный прием, который автор применил в Предложении 11, а именно непосредственно продвигаясь к шести, а затем к 12 жетонам минуя все промежуточные положения. Тем не менее мы, по правде говоря, не нуждаемся в этом дальнейшем вычислении, ибо тот же результат, выведенный выше в предположении двух начальных жетонов, имеет силу также если взамен одного жетона мы предположим любое число n жетонов, а вместо двух – $2n$ жетонов, если только вместо b и c, – количеств шансов, при которых один из игроков приобретает или теряет жетон, – мы подставим количества шансов, при которых игроки могут приобрести или потерять n жетонов.

И в той же степени законно заключить, далее, что жребии, которые игроки имели, когда каждый начинал с $2n$ жетонов, всегда находится в двойном отношении сравнительно с тем же отношением, когда они начинали, имея лишь по n жетонов. Поэтому, поскольку в положении, рассмотренном выше, когда в начале игры каждый игрок имел 3 жетона и отношение шансов оказалось равным b^3/c^3, то при шести начальных жетонах у каждого это отношение станет равным b^6/c^6, и, далее, при 12 начальных жетонах у каждого, равным b^{12}/c^{12}, в точности как мы заключили по индукции.

И таким образом действительно ясно,что́ следует сказать об отношении шансов, когда игроки начинают игру с равным числом жетонов, но ещё неясно, что надо сказать про жребии, которые они приобретут при любом возможном положении, когда у одного из них будет больше жетонов, а у другого – меньше. Тем не менее, можно указать общее правило для таких положений. Пусть A имеет m жетонов, а B – n. Я определил, что отношение шансов A и B если $b = c$ будет всегда равно m/n. Если, однако, $c > b$, отношение станет равным $(b^n c^m - b^{m+n})/(c^{m+n} - b^n c^m)$**28**. Так как эта формула требует более утомительных вычислений, я оставляю доказательство этого результата решимости читателей. Мы же, однако, без дальнейшей проволочки переходим к следующей из намеченных частей [книги].

Примечания переводчика

1. Ван Схутен никогда не приписывал себе сочинения Гюйгенса, фраза которого неудачна.

2. Диофантовы задачи, как их назвал Гюйгенс, оказались исключительно важными и ему, пожалуй, не следовало упоминать их несколько пренебрежительно.

3. Принцип, или исходное начало, был(о) тем же самым: математическое ожидание выигрыша в азартной игре.

4. Справедливой игрой сейчас более четко называется игра, при которой математические ожидания выигрыша (или проигрыша) игроков одинаковы. Предположение, которое Гюйгенс сформулировал чуть выше, Хаусснер (с. 144) справедливо назвал несколько туманным и добавил, что изменить его нельзя без изменения всего дальнейшего.

5. Под автором Бернулли неизменно понимает Гюйгенса.

6. Здесь и в нескольких случаях ниже Гюйгенс фактически сформулировал не предложения, а задачи.

7. Это обещание не было выполнено.

8. Фактически имея в виду свое замечание (начало Предложения 4) о том, что в подобных задачах можно и не обуславливать заранее количество партий в игре, Гюйгенс ни здесь, ни в следующих двух предложениях этого количества и не указывает.

9. Мы выписали знаменатели только в первых трех строках и столбцах, поскольку закон их образования ясен.

10. До Гюйгенса случай трех игроков рассматривали Паскаль и Ферма. Бернулли также несколько раз обращался к этому случаю (и даже в Замечаниях к Предложению 14 ввел бесконечное множество фиктивных игроков), но раздел ставки между ними не комментировал (Хаусснер, с. 145).

11. Первые три числа в каждой шестерке указывают количества недостающих партий, а последние три числа пропорциональны долям соответствующих игроков. Гюйгенс дополнительно привел единые знаменатели вторых троек чисел; так, в первом случае он указал 4/9, 4/9 и 1/9, т.е. доли игроков.

12. Для двух, трех, ... , шести костей мы приводим лишь последние строки, относящиеся к ним (для шести костей – двойную строку); для шести костей так же поступил и Бернулли. По его примеру и также ввиду недостатка места мы не заканчиваем ни эти строки, ни строки для числа очков.

13. Здесь и в нескольких других случаях ниже Гюйгенс ошибочно ссылается на свое Предложение 2 вместо Предложения 3.

14. Todhunter (1865, p. 60) заметил, что Prevost (1783) критиковал это рассуждение Бернулли, но что последний ограничился популярным изложением вопроса.

15. Мы исключили из таблицы первые две строки, в которых Бернулли повторно указал точные значения a и c и aa и cc соответственно.

16. Бернулли разделил, как это и было положено, но не сделано нами, все выражения в первой строке на a, во второй – на a^2 и т. д.

17. Хаусснер (с. 147) пояснил это решение как определение точки пересечения кривой $y = c(a/c)^x$ и прямой $y = 2bx + 2c$. Прямая CH здесь является осью Ox, но кривую FEG можно назвать логарифмической если считать CH осью Oy.

18. Мы указали знаменатели только в трех выражениях; закон их образования ясен.

19. Первую и третью задачи предложил Ферма, а пятую – Паскаль.

20. Хаусснер (с. 147) указал, что указанные задачи являются частными случаями игры двух игроков в соответствии со схемами 3 и 4 (см. ниже в этом же *Решении* Бернулли) при $m = 5/6$. Biermann (1957), который описал решения, предложенные Лейбницем и Бернулли, не согласился с тем, что пояснения первого плохо понятны. Об указанной заметке Лейбница см. также De Mora-Charles (1986).

21. См. прим. 16. Таблица составлена для схемы 4, чего Бернулли не указал.

22. См. прим. 16.

23. Круговое число Лудольфа это приближенное значение числа π с 33 верными знаками, найденное голландским математиком Лудольфом ван Цейленом, 1540 – 1610 (Struick 1971).

24. Следует таблица, величины в которой полностью совпадают с соответствующими величинами, составленной при решении Задачи 1 для схемы 4, однако игроки теперь вступают в игру поочередно.

25. Бернулли записывает суммы соответствующих дробей, приводит каждое слагаемое каждой суммы к единому общему знаменателю и отбрасывает его. Сокращая, далее, все слагаемые на произведение общих множителей, затем на общие множители 6 и 3, он получает 77, 53 и 35, как и выше.

26. Подобные задачи, приводящие к гипергеометрическому распределению, оказались важными для статистического контроля продукции.

27. Двойное, тройное отношение: эти термины восходят к *Элементам* Евклида (гл. 5, Определение 9). Бернулли вновь употребил их в гл. 5-й части 4, см. ее русский перевод 1986 г., с. 51, где, однако, они не сохранены: “Отношение первого члена к третьему будет квадратом ...”

28. Эту формулу, притом с доказательством, впервые опубликовал Муавр (De Moivre 1712, задача № 9); современное истолкование его результата см. Seneta (1983, pp. 78 – 79). Оговорка Бернулли ($c > b$) не имеет никакого значения. Указание на формальный приоритет Муавра, равно как и вывод указанной формулы (при помощи разностного уравнения) см. Todhunter (1865, pp. 62 – 63) и Хаусснер (с. 149).

[151] Часть вторая
Содержащая Учение о перестановках и сочетаниях

Введение

Бесконечное разнообразие, которое обнаруживается и в действиях природы, и в поступках человеческих и которое является основной прелестью вселенной, несомненно происходит от разнообразия состава, перемешивания и перемещения ее частей друг относительно друга. Но поскольку множество вещей, действующих совместно при появлении [некоторого] результата часто оказывается столь большим и неоднородным, так что исключительно трудно перечесть все виды, в которых состав или соединения этих вещей могут появиться или нет, то даже у самых предусмотрительных и осторожных нет более часто допускаемой ошибки, чем та, которую логики обычно называют *недостаточным перечислением* частей.

Это настолько верно, что я смею сказать, что указанная причина является почти единственным источником бесчисленных и самых серьезных ошибок, которые мы ежедневно совершаем при обдумывании и того, что следует понять, и того, что надо сделать. Таким образом, искусство, называемое *комбинаторикой*, должно почитаться, как оно и заслуживает, наиболее полезным. Действительно, оно исправляет это несовершенство нашего рассудка и учит нас, как перечислять все возможные способы, которыми несколько вещей могут быть объединены, переставлены или соединены друг с другом, так чтобы мы были уверены, что не упустили ничего, что могло бы содействовать нашей цели.

На самом деле эта комбинаторика является математическим предметом, поскольку она завершается вычислениями, но приглядевшись к ее приложениям и необходимости [убеждаешься, что] она абсолютно универсальна и столь прочно укоренилась, что ни мудрость философа, ни точность историка, ни одаренность врача, ни предусмотрительность государственного мужа не могут обойтись без нее. В качестве довода в пользу этого достаточно указать, что работа специалистов всех направлений зависит от *предположений*, каждое из которых включает в себя взвешивание объединений или сочетаний причин.

Более того, некоторые выдающиеся люди, а именно ван Схутен, Лейбниц, Валлис и Prestet[1] сочли возможным рассмотреть этот предмет, так что пусть никто не предположит, что всё, о чем мы здесь скажем, является новым. Но мы добавили кое-что свое собственное, которое не следует презирать. Прежде всего это общее и простое доказательство свойства фигурных чисел, от которого зависит многое другое, и которое, насколько мне известно, никто до нас не привел и не доказал.

Поскольку, с одной стороны, у нас еще нет полной системы этого искусства, и чтобы, с другой стороны, не нужно было искать то, что нам известно, где-то еще, мы озаботились начать всё учение с самого начала и, чтобы не оставить ничего без обоснования, выводить всё, исходя из первичных принципов. Это, однако, выполнено кратко, сжато и лишь постольку, поскольку видимо требовалось нашей целью. Мы представили весь трактат [всю часть вторую] в двух разделах, один из которых посвящен учению о перестановках, другой – учению о сочетаниях. К ним присоединен третий, в котором обе темы обозреваются совместно[2].

[152] Глава 1. О перестановках

Перестановками вещей я называю разновидности, которые, сохраняя одно и то же множество вещей, разными способами изменяют их порядок и положение. Так, если кто-то спросит сколькими способами несколько вещей могут быть так переставлены или смешаны друг с другом, чтобы все они всегда были взяты и изменялся (изменялось) лишь их порядок или положение, то говорят, что дело идет о всех перестановках этих вещей. Что касается переставляемых вещей, то либо все они, либо только некоторые из них могут быть различны. Это удобно представить столькими же буквами алфавита, которые могут быть либо различными, либо частично повторенными.

1.1. Пусть все переставляемые вещи отличаются друг от друга

Поскольку нельзя изучать число перестановок между несколькими вещами, если только нет тех же сведений о всех других вещах, взятых меньшим числом, то ясно, что в этом исследовании следует применять синтетический метод, т. е. начинать с первичных и простейших предположений.

Одна вещь или буква a может быть взята или помещена только одним способом. Из двух вещей или букв a и b либо a предшествует, а b следует, либо b предшествует, а a следует. И таким образом эти две вещи могут быть расположены двояко, *ab* и *ba.* Далее, три буквы a, b, c могут располагаться так, что первое место отдано a, или b, или c. Если на первом месте a, то оставшиеся две буквы, как мы сказали, могут быть расположены двумя способами. Если b переместить на первое место, то две оставшиеся буквы опять-таки могут быть размещены двумя способами и то же, как следует понимать, произойдет, если на первом месте окажется c. Таким образом, для трех букв имеется трижды два или шесть перестановок, *abc, acb, bac, bca, cab, cba.*

Аналогично, если даны четыре буквы a, b, c, d, каждая из них может занять первое место, а оставшиеся три, как только что было показано, могут изменить свое расположение трижды двумя или шестью способами. И поскольку первое место могут занимать четыре вещи, все четыре могут быть переставлены друг относительно друга четырежды по трижды двумя способами или четырежды шестью, т. е. 24 способами.

Применяя тот же довод, [убеждаемся], что если добавлена пятая буква, e, то разновидностей будет впятеро больше, чем в предыдущем случае, т. е. пять раз по 24 или 120. И вообще, сколько бы букв ни были даны, число перестановок, которым они могут подвергаться, превышает число перестановок букв, взятых на единицу меньшим, во столько раз, сколько единиц в данном числе букв. Отсюда немедленно вытекает следующее

Правило 1.1 для отыскания всех перестановок любого числа вещей

Если перемножить все числа от единицы, следующие в естественном порядке до данного числа вещей включительно, произведение укажет то, что было отыскиваемо.

[153] Например, если заданное число вещей n, то число перестановок окажется равным $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ и т. д. до n; или, поскольку умножение на единицу ничего не меняет, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ и т. д. до n. Здесь и в аналогичных случаях точки, вставленные между числами, означают [вместе с этими числами] произведение связки их всех. Так, перестановок из семи вещей будет 7! = 5040. Причина этого ясна из сказанного, а вычисления показаны в приложенной таблице[3].

1.2. Пусть некоторые переставляемые вещи одинаковы

Если одна или более букв повторяются более часто [просто: повторяются], т. е. если среди данного числа вещей некоторые оказываются одними и теми же, – например, если дано *aaabcd*, где буква *a* встречается трижды, число перестановок будет намного меньше. Чтобы выявить это, следует учесть, что будь все вещи различны, например будь вместо *aaa* написано *aαA*, эти три буквы можно было бы переставлять друг относительно друга шестью различными способами даже не изменяя места ни одной из остальных. Появилось бы, стало быть, столько же различных перестановок [всех шести букв].

Но поскольку они [*aaa*] те же самые, эти шесть [мыслимых] перестановок букв *aαA* не приводят ни к каким изменениям и их следует поэтому считать совпадающими друг с другом. То же самое должно равным образом относиться к любому расположению букв, и это указывает, что число перестановок данных вещей следует считать в шесть раз меньшим. Иначе говоря, во столько раз меньшим, чем число перестановок всех различных вещей, во сколько одинаковые предметы могут быть переставлены друг относительно друга. Но будь все шесть букв различны, их можно было бы переставить 720 способами и поэтому теперь, когда три из них совпадают, их можно переставить не более чем 120 способами.

И опять же, если дано 6 букв *aaabbc*, среди которых не только буква *a* повторяется трижды, но и *b* встречается дважды, то очевидно, что число перестановок окажется еще вдвое меньшим, чем в прошлом примере и равным лишь 60. Это действительно так, потому что перестановки, которые могли бы возникнуть просто от перемены мест двух букв *bb*, будь эти буквы различны, теперь совпадают. Таким же образом следует заключить, что если несколько букв повторяются более часто [просто: повторяются], число перестановок уменьшится из-за каждой из них во столько раз, во сколько они могут быть переставлены друг с другом. Это обосновывает следующее Правило: **[154]**

Правило 1.2 для отыскания числа перестановок вещей, если некоторые из них одинаковы

Если одна из вещей встречается более, чем один раз, количество перестановок, которые допускаются данными вещами, будь они все различны, следует разделить на количество перестановок, которым могут быть подвергнуты повторяющиеся вещи с учетом их числа. Или же, если имеется несколько вещей, встречающихся чаще чем один раз, количество перестановок из данного числа вещей, будь они все различны, следует разделить на произведение количеств перестановок, которым может быть подвергнута каждая группа повторяющихся вещей в соответствии с численностями этих групп. В каждом случае [одной или нескольких групп повторяющихся вещей] частное выразит искомое число.

Примечательно применение учения о престановках для отыскания числа анаграмм любого слова. Так, по Правилу 1.1 число всех

возможных перестановок букв в слове *Roma* [Рим] составляет 4! = 24, потому что в нем 4 различных букв. А по Правилу 1.2 в слове *Leopoldus* число перестановок равно
362 880/(2 ·2) = 90 720 и в слове *Studiosus* – 362 880/(2 ·6) = 30 240, потому что в каждом из них 9 букв и в первом из них 2 буквы *l* и 2 буквы *o*, а во втором – 2 буквы *u* и 3 буквы *s*.

Сюда же можно отнести некоторые строфы, называемые протейными, ввиду большого числа их разновидностей**[4]**. Прославленными среди них являются строфы Ланзиуса, Скалигера и Баухузия. Ланзиусу мы обязаны двустишию**[5]**

Lex, Rex, Grex, Res, Spes, Jus, Thus, Sal, Sol, (bona) *Lux, Laus*;
Mars, Mors, Sors, Lis, Vis, Styx, Pus, Nox, Fex, (mala) *Crux, Fraus*

В соответствии с предшествующим правилом, каждый из этих [двух] стихов, поскольку они состоят из 11 односложных слов (двусложные слова *bona* и *mala* должны всегда находиться в пятой стопе), могут быть видоизменены [11! =] 39 916 800 способами с сохранением метрики. И хотя в других случаях бывает так, что при некоторых разновидностях метрика нарушается, не говоря уже о том, что многие анаграммы либо бессмысленны, либо нарушают грамматику, все же, как правило, легко отделять полезные видоизменения от бесполезных и определять их число [число первых], если только соблюдать какой-то порядок при их исследовании. Как это должно быть сделано, можно распознать по гекзаметру, сочиненному Бернаром Баухузием, иезуитом из Louvain [Бельгия]**[6]**, в честь Беспорочной девы Марии:

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera coelo (Столько достоинств у тебя, сколько звезд на небе, о дева).

Многие именитые люди полагали этот стих достойным особого внимания. Erycius Puteamus в своей книжечке *Thaumata Pietatis* [Чудо благочестия] перечислил его полезные разновидности на целых 48 страницах и определил, что их столько же, сколько звезд на небе, число которых обычно полагается равным 1022**[7]**. Он притом весьма добросовестно исключал те видоизменения, которые, видимо, утверждали, что звезд столько же, сколько даров у Марии, которых у нее гораздо больше чем звезд.

Герхардт Фосс в гл. 7-й своей *De Scientiis Mathematicis* повторяет то же число 1022, взятое у Puteamus. Француз Prestet на с. 348 первого издания *Elementa mathematica* приписал этому протейному стиху 2196 разновидностей, но после пересмотра, во втором издании, т. 1, с. 133, увеличил это число почти вполовину до 3276. Усердные составители лейпцигских *Acta* [*Eruditorum*] в июне 1686 г., в рецензии на *Tractatus de Algebra* Валлиса определили это число (которое сам Валлис не посмел установить**[8]**) равным 2580. **[155]** А позднее сам Валлис в латинском издании своих трудов, опубликованных в Оксфорде в 1693 г., на с. 494, увеличил это число до 3096. Но все до сих пор ошибались и можно обоснованно поражаться, как могли ошибаться столь многие даже после тщательного и повторного рассмотрения нетрудного вопроса. Исследовав его, я обнаружил, что фраза Баухузия имеет всего 3312 разновидностей, сохраняющих метрику, исключающие спондеи, но не те, в которых отсутствует цезура. Но останавливаться на этом более подробно не очень интересно, да и не служит нашей цели**[9]**.

Глава 2. О сочетаниях вообще

Сочетания вещей это такие соединения, при которых из данного множества выбираются и объединяются некоторые из них без учета порядка или положения. Поэтому, когда спрашивается, сколько раз могут быть взяты 2, 3, 4 и т. д. вещи из их данного количества, так чтобы одни и те же вещи никогда не брались более одного раза, то говорят, что отыскиваются все различные сочетания данных вещей. Число объединяемых вещей называется *классом*[10] сочетания. Так, если отбираются 2 вещи, класс равен двум, если 3 – трем, если 4 – четырем. В соответствии с этими классами объединяемые вещи называются *парами, тройками, четверками* и т. д. или *бинионами, терпионами, кватернионами* и т. д. и, аналогично, *унионами* (соединяемые по одному) и *нулионами* (если вообще ничего не берется).

Некоторые называют эти соединения *комбинациями, кон3нациями, ком4нациями* и т. д. и все они обычно описываются единым словом *комбинации*, хотя в более строгом смысле оно, видимо, означает лишь такие комбинации, которые объединяют вещи по две зараз. По этой причине другие предпочитают применять более общие термины *complicatio, complexio*, некоторые же более подходяще называют их *выборами* (Electione) [выборками], чтобы можно было понимать [под этим] также и случаи, при которых отдельные вещи берутся сами по себе, по одной, или даже вообще ничего не отбирается.

Объединяемые вещи, однако, могут быть либо все различны, либо частично совпадать. Более того, их можно объединять либо так, что ни в одном сочетании одна и та же вещь не встретится чаще, чем во всем числе [исходных] вещей, либо без этого ограничения, т. е. может быть взята в сочетании сама с собой. И опять же, можно отыскивать число сочетаний либо совместно по всем классам, либо по отдельности для каждого из них. По поводу любого вида сочетаний может быть сформулировано много вопросов или проблем, из которых мы выберем только те, которые, полагаем, окажутся в какой-то степени полезными в дальнейшем.

2.1. Отыскать полное число сочетаний, т. е. для всех классов зараз, если все объединяемые вещи различны и ни в одном сочетании ни одна не должна встречаться дважды [156]

Пусть буквы *a, b, c, d, e* и т. д. сочетаются любыми способами и пусть [в нижеследующей таблице] будет столько же строк, сколько букв. В первую строку мы вставляем лишь букву *a*. Во вторую строку вставим *b*, сначала отдельно, затем в объединении с *a*, так что получим либо *ab*, либо *ba*, потому что соединения *b* с *a* и *a* с *b* представляют собой одно и то же сочетание, ибо порядок [следования букв] не имеет значения.

В третью строку вставим *c*, вначале отдельно, затем соединенное по очереди с *a* и *b*, так что образуются пары *ac* и *bc*, а затем с парой *ab*, так что образуется тройка *abc*. В четвертую строку вставим *d*, вначале отдельно, затем соединенное с одной из предыдущих букв *a, b, c*, затем также по-отдельности с их парами *ab*, *ac, bc* и после этого с тройкой *abc.* Таким образом будут образованы новые пары *ad, bd, cd*, [новые] тройки *abd, acd, bcd* и четверка *abcd.* Аналогично, пятый ряд начнется с буквы *e*, которая вначале включается отдельно, затем в соединении со всеми выборками в предыдущих строках.

a

b.ab
c.ac.bc.abc.
d.ad.bd.cd.abd.acd.bcd.abcd.
e.ae.be.ce.de.abe.ace.bce.ade.bde.cde.abce.abde.acde.bcde.abcde

И тем же самым методом следует продолжать, если имеются и другие буквы. При указанном рассуждении становится ясно, что данные буквы соединены в этих строках всеми возможными способами, что нет ни одной выборки, которая не входила бы в одну из этих строк и нет также ни одной, которая входила бы дважды. И таким образом все строки вместе доставят все возможные выборки, которые могут быть составлены из данных букв.

Их число может быть поэтому легко найдено, если учесть, что в любой строке можно отыскать на одну выборку больше, чем во всех предыдущих строках взятых вместе. Это так, потому что буква, которая находится в начале новой строки, поставлена в нее один раз отдельно и, вдобавок, вместе с каждой выборкой всех предыдущих строк. Отсюда следует, что раз в первом ряду имеется 1 выборка, во втором их будет 2, 4 – в третьей, 8 – в четвертой и т. д. в соответствии с геометрической прогрессией со знаменателем 2.

Но, действительно, это также соответствует сути подобной прогрессии с первым членом, равным 1: сумма любого числа ее членов, увеличенная на единицу, равна ее следующему члену. Поэтому сумма числа выборок во всех строках равна сумме числа стольких же членов геометрической прогрессии со знаменателем 2 и первым членом 1 и, следовательно, по только что цитированному свойству, равна последующему члену той же прогрессии без единицы. Кроме того, этот последний член также равен произведению числа 2, взятому сомножителем столько раз, сколько членов предшествуют ему в прогрессии, т. е. столько раз, сколько строк, количество выборок в которых отыскивается. Отсюда следует

Правило 2.1 для отыскания всех выборок для всех классов заданных вещей

Из произведения числа 2, взятого сомножителем столько раз, сколько вещей дано, вычесть единицу; разность окажется отыскиваемым числом.

[157] Пусть дано n вещей. Число всех выборок, т. е. всех единиц, пар, троек и т. д. будет $2^n - 1$. Поэтому, если включить и нулион, или выборки, в которые ничто из данных вещей не отобрано, и который всегда в единственном числе, то число выборок окажется равным 2^n. С другой стороны, если не считать ни нулиона, ни единиц, число которых всегда равно числу вещей, то число пар, троек и более многочисленных объединений будет $2^n - n - 1$.

Например, число всех различных соединений семи планет[11] равно $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$. Если вычесть 7 выборок, в которых планеты берутся по одной и которые не являются в собственном смысле соединениями планет, а их разобщениями, останутся соединения в строгом смысле слова, при которых планеты собираются по две, по три и т. д. до семи, числом $2^7 - 7 - 1 = 120$. И также, если имеется 12 регистров, как их называют, или групп труб в органе, при помощи которых звук можно заставить вначале свистеть, затем трепетать или изменяться как-то иначе, они могут быть видоизменены $2^{12} - 1 = 4095$ способами.

Замечание. Если кто-либо исследует ряды сочетаний, показанные в схеме выше, то будет заметно, что в любой строке (кроме первой, содержащей лишь единицу *a*) числа выборок с четным и нечетным количествами элементов равны друг другу. По крайней мере, окажись это верным в любой строке возле начала таблицы, то такое же заключение будет сделано для следующей строки, потому что буква, находящаяся в начале этой [следующей] строки, соединенная с выборками предыдущих строк [включая первую], изменит те, что имели нечетные классы на четные, а четные – на нечетные. Далее, когда эта буква добавляется к единичной букве *a* первой строки, она приводит к парному сочетанию, а взятая сама по себе новая буква является выборкой нечетного класса, так что в новой строке число сочетаний четного класса оказывается равным их числу нечетного класса. Поэтому во всех различных строках вместе взятых число выборок нечетных классов на единицу превысит их число четных классов, или будет равно ему если добавить нулевую выборку. Итак, поскольку число всех без исключения выборок включая нулион, как было показано, равно 2^n, а выборок нечетных классов окажется вдвое меньше этого, или равно последующей меньшей степени двух, а именно 2^{n-1}, то, исключая нулион, выборок четных классов будет $2^{n-1} - 1$. Это доказывается ниже, в гл. 4, в Следствии 6.

Глава 3. О сочетаниях единого класса, фигурных числах и их свойствах

Из схемы предыдущей главы, показывающей сочетания, ясно, что буква, стоящая в начале каждой строки, образует пары в своей собственной строке; присоединенная к парам, она образует тройки; к тройкам – образует четверки и т. д. Поэтому число пар в каждой строке равно количеству единичных элементов всех предшествующих строк, число троек – количеству пар [в этих строках], число четверок – количеству троек [там же] и вообще число сочетаний каждого данного класса в любой заданной строке равно количеству всех сочетаний **[158]** в предыдущих строках, имеющих на единицу меньший класс.

Отсюда следует: Единичные элементы, поскольку они находятся поодиночке в отдельных строках, все вместе образуют ряд 1. 1. 1. 1. 1 и т. д. или ряд единиц. В первой строке нет ни одной пары, во второй – 1, в третьей – 1 + 1 = 2, в четвертой – 1 + 1 + 1 = 3, в пятой – 1 + 1 + 1 + 1 = 4 и т. д. Поэтому все пары вместе образуют ряд 0. 1. 2. 3. 4. 5 и т. д., т. е. ряд чисел, находящихся в арифметической прогрессии или боковые числа[12]. Ни в первой, ни во второй строке нет троек, в третьей их только 1, в четвертой – 1 + 2 = 3, в пятой – 1 + 2 + 3 = 6, в шестой – 1 + 2 + 3 + 4 = 10 и т. д. Взятые все вместе по порядку они образуют ряд 0. 0. 1. 3. 6. 10. 15 и т. д., т. е. ряд так называемых треугольных чисел.

В первых трех строках нет четверок; в четвертой – 1, в пятой – 1 + 3 = 4, в шестой – 1 + 3 + 6 = 10, в седьмой – 1 + 3 + 6 + 10 = 20 и т. д. Взятые все вместе по порядку, они образуют ряд 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20 и т. д., а именно ряд пирамидальных (иначе: тетраэдальных) [чисел]. При помощи аналогичных рассуждений [устанавливается, что] все пятерки образуют треугольно-пирамидальный ряд 0. 0. 0. 0. 1. 5. 15. 35 и т. д. Шестерки образуют пирамидально-пирамидальный ряд 0. 0. 0. 0. 0. 1. 6. 21 и т. д. И другие сочетания старших классов образуют иные ряды фигурных чисел более высоких порядков до бесконечности.

Таким образом, при помощи учения о сочетаниях мы неожиданно начинаем изучать фигурные числа, которые обычно понимаются как числа, образуемые постоянным прибавлением или сбором натуральных чисел и чисел, которые [в свою очередь] образуются ими. Чтобы эти ряды фигурных чисел можно было бы сразу обозреть, и чтобы легче понять то, что еще будет сказано о них, я привел следующую таблицу[13], которую каждый без труда может легко продолжить насколько угодно вниз или вправо. **[159]** Номера строк указывают количества сочетаемых вещей, в колонках – классы сочетаний. Первая колонка это ряд монад или единиц; вторая – ряд натуральных или боковых чисел, начинающийся с одного нуля; третья – ряд треугольных чисел с двумя нулями вначале; четвертый – ряд пирамидальных чисел с тремя нулями; пятый ряд – треугольно-пирамидальные с четырьмя нулями и т. д.

Эта таблица поистине замечательна и удивительна, ибо помимо свойств, скрывающихся в ней и относящихся к секретам сочетаний, которые я уже показал, в ней спрятаны и самые важные тайны всей остальной математики, как это знают те, кто сведущ в менее известных частях геометрии. Некоторые из этих свойств мы здесь обсудим, – по существу, лишь коснемся их. Ни одно из них за исключением основного, которое служит нашей цели, мы не намерены более тщательно доказывать, ибо всё остальное может быть либо выведено из него, либо сделано достаточно очевидным по построению таблицы и структуре фигурных чисел.

Удивительные свойства таблицы сочетаний

1. Вторая колонка начинается с одного нуля, третья – с двух, четвертая – с трех и вообще колонка c – с $(c - 1)$ нулей.

2. Первые отличные от нуля члены колонок, продвигаясь по диагонали слева вниз направо, образуют члены первой колонки; вторые отличные от нуля члены – вторую колонку, третьи – третью и т. д. Так, первые члены образуют ряд монад, вторые – ряд боковых чисел, третьи – ряд треугольных чисел и т. д.

3. Номер каждой колонки совпадает с ее вторым членом, считая от единицы.

4. Каждое число таблицы равно сумме всех выше расположенных членов предыдущей колонки.

5. Каждый член таблицы равен сумме двух других членов, расположенных непосредственно над ним в той же и в предыдущей колонках.

6. В любой выбранной строке члены возрастают от единицы до какого-то значения, а затем убывают в той же мере. По Свойству 4 то же имеет место для сумм [членов] колонок, взятых до одной и той же глубины так же, как и для членов следующей строки[14].

7. Первый и последний ненулевые члены любой строки (они же – соответствующие члены колонок в той же строке) всегда равны друг другу. То же имеет место для второго и предпоследнего ненулевых членов, для третьего и третьего с конца и т. д., если в строке имеется большее число ненулевых членов.

8. Но если взять с начала таблицы равное число колонок и строк и суммировать члены одной и той же колонки [вплоть до последней взятой строки] первая сумма окажется равной предпоследней, вторая – третьей с конца, третья – четвертой с конца и т. д. Действительно, по Свойствам 4 и 7 эти суммы производят члены следующей строки кроме первого[15].

[160] 9. Каждая строка состоит по порядку из коэффициентов разложения бинома, возведенного в [соответствующую] степень. Так, вторая строка показывает коэффициенты 1. 1, соответствующие первой степени бинома, третья строка – коэффициенты 1. 2. 1 его квадрата […]

10. Суммы строк неизменно удваиваются, а суммы этих сумм, начиная с начала в самом деле являются уменьшенными на единицу членами геометрической прогрессии со знаменателем 2[16].

Из этих результатов следует то, что было сказано в предыдущей главе о сочетаниях всех классов.

11. Если разделить по очереди члены любой колонки (начиная либо с единиц, либо с предыдущего нуля) на соответствующие члены предшествующей колонки (начиная с единицы), частные образуют арифметическую прогрессию, разность которой окажется дробью с единичным числителем и знаменателем, равным второму члену, считая от 1 в [предшествующей] колонке делителей, например

Делитель	**Делимое**	**Частное**	**Делимое**	**Частное**
1	1	1	0	0
2	3	1.5	1	0.5
3	6	2	3	1
4	10	2.5	6	1.5
5	15	3	10	2
1	1	3/3	0	0
3	4	4/3	1	1/3
6	10	5/3	4	2/3
10	20	6/3	10	3/3
15	35	7/3	20	4/3

При необходимости это свойство можно было бы без труда вывести из последующего.

12. Сумма любого числа членов любой колонки начиная с ее нулей относится к сумме стольких же чисел, равных друг другу и последнему члену взятой суммы, как единица к номеру колонки[17]. Так, сумма любого числа натуральных чисел, чья колонка начинается с одного нуля, относится как 1:2 к сумме стольких же чисел, каждое из которых равно наибольшему или последнему из взятых натуральных чисел. Для суммы треугольных чисел, начинающихся с двух нулей, соответствующее отношение будет равно 1:3; для пирамидальных чисел, начинающихся с трех нулей, – 1:4 и т. д. То же самое отношение имеет место между суммами, которые берутся начиная с единицы [а не с нуля] и суммой стольких же чисел, каждое из которых равно следующему после наибольшего. Например **[161]**

0	3	1	5	0	6	1	15	0	10	1	56
1	3	2	5	0	6	3	15	0	10	4	56
2	3	3	5	1	6	6	15	0	10	10	56

3 3 4 5 3 6 10 15 1 10 20 56
6/12 10/20 6 6 20/60 4 10 35 56
10/30 10 10 70/280
15/60

Поскольку это свойство фигурных чисел является выдающимся и притом служит нашей основной цели, следует четко установить его и поэтому желательно указать здесь метод доказательства, которое и научно, и безоговорочно обосновывает требуемое. Поэтому я прежде всего устанавливаю следующие леммы.

Первая лемма. Сумма любого числа членов первой колонки находится в отношении равенства, т. е. относится как 1:1, к сумме стольких же чисел, каждое из которых равно последнему члену.

Доказательство. Поскольку колонка состоит из одних только единиц, сумма любого числа ее членов равна сумме стольких же единиц, т. е. стольких же чисел, равных последнему члену.

Вторая лемма. Если в любой колонке, начиная с ее нулей, взять число членов, равное ее номеру, то их сумма будет относиться к сумме стольких же чисел, равных последнему члену, как единица к номеру колонки.

Доказательство. По Свойству 1 число нулей, с которых начинается каждая колонка, на единицу меньше ее номера. Поэтому, если прибавить к ним следующий член, число членов окажется равным номеру колонки. Но по Свойству 2 член, следующий после нулей, это единица, так что сумма членов станет равной 1. И сумма стольких же чисел, равных последнему члену, будет [также] равна номеру колонки. Отсюда следует утверждение леммы.

Третья лемма. В каждом числовом ряду [таблицы], если сумма членов, считая с начала, всегда при любом количестве взятых членов находится в одном и том же отношении к сумме стольких же чисел, равных последнему члену (например, в отношении $1/r$, так что сумма членов равна сумме стольких же чисел, равных последнему члену, деленному на r), то число взятых членов, уменьшенное на r, будет в том же отношении к тому же числу, уменьшенному на 1, как предпоследний член к последнему.

Доказательство. Пусть любое число членов a, b, c, d числом n взято с начала [ряда], причем c – предпоследний, а d – последний член. Конечно же, $a + b + c = a + b + c + d - d$ и, ввиду предположения, $c(n - 1)/r = (dn/r) - d$. Умножая обе части этого равенства на одно и то же число [на r], получаем $c(n - 1) = [\ldots] = d(n - r)$, откуда $(n - r)/(n - 1) = c/d$, ч. т. д.

Четвертая лемма. Если из двух смежных колонок в таблице фигурных чисел в первой любое число членов, взятых с начала, имеют постоянное отношение $1{:}r$ к стольким же числам, равным последнему члену, и если, в самом деле, во второй колонке имеет место то же свойство с отношением $1/(r + 1)$, то сумма всех членов с добавленным следующим членом будет иметь отношение $1/(r + 1)$ к сумме стольких же членов, считая добавленный, равных ему.

Доказательство. Пусть во второй колонке взяты члены e, f, g, h и следующий член – i. Возьмем также в непосредственно предшествующей колонке столько же членов a, b, c, d и пусть в каждом случае число взятых членов n. Тогда $rh = r(a + b + c)$, – по Свойству 4 образования фигурных чисел, **[162]** – равно $(n – 1)c$, – по предположению, – и равно $(n – r)d$ по Лемме 3. Далее, $(n – r)/h = r/d = n/(a + b + c + d)$, – по предположению, – и равно n/i по Свойству 4 образования фигурных чисел.

Следовательно, $(n – r)i = nh = (r + 1)(e + f + g + h)$, – по предположению. И также $(n – r)/(r + 1) = (e + f + g + h)/i$ и (производная пропорция) $(n + 1)/(r + 1) = (e + f + g + h + i)/i$, т. е. $(e + f + g + h + i)/(n + 1)i = 1/(r + 1)$, ч. т. д.

Когда я некоторое время назад сообщил это своему брату [Иоганну I], он заметил, что может изящно сократить доказательство, объединив следующим образом три последние леммы в одну.

Лемма. Если сумма членов с начала любой колонки таблицы фигурных чисел всегда находится в отношении $1:r$ к сумме стольких же чисел, равных наибольшему члену, то сумма членов в соседней колонке будет иметь отношение $1/(r + 1)$ к сумме стольких же чисел, равных наибольшему члену.

Доказательство. Пусть смежные колонки будут $a.b.c.d.e.f$ и $0.g.h.i.l.p.q$, так что число членов предшествующей колонки равно n, а последующей – $(n + 1)$. Во-первых, по предположению и в соответствии с образованием фигурных чисел по Свойству 4,

$q + p + l + i + h + g + 0 =$
$[nf + (n – 1)e + (n – 2)d + (n – 3)c + (n – 4)b + (n – 5)a]/r =$
$[n(f + e + d + c + b + a) – e – 2d – 3c – 4b – 5a]/r =$ (в соответствии с образованием фигурных чисел) $= [nq – p – l – i – h – g]/r$.

Поэтому

$$rq + r(p + l + i + h + g) = nq – p – l – i – h – g,$$
$$(r + 1)(p + l + i + h + g) = nq – rq.$$

Разделив каждую часть на $(r + 1)$, сразу получим […]. Добавляя [к обеим частям] q имеем […], т. е.

$(g + h + i + l + p + q)/(n + 1)q = 1/(r + 1)$, ч. т. д[18].

И теперь следует

Основное Предложение[19]. В таблице фигурных чисел отношение суммы любого числа членов начиная с нулей к сумме стольких же чисел, равных последнему члену, а также отношение суммы любого числа членов начиная с 1 к сумме стольких же чисел, равных члену, следующему за последним, равно, в первой колонке (т. е. в ряду монад) 1:1; во второй колонке (или в ряду боковых чисел) 1:2; в третьей колонке **[163]** (в ряду треугольных чисел) 1:3; в четвертой (пирамидальных чисел) 1:4; и вообще в любой колонке это отношение равно отношению единицы к ее номеру.

Доказательство. 1. По отношению к первой колонке это ясно ввиду Первой леммы. По поводу второй, третьей, четвертой и т. д. это устанавливается при помощи оставшихся лемм. А поскольку в первой колонке отношение суммы любого числа членов к сумме стольких же чисел, равных последнему члену, равно 1:1, то ввиду лемм во второй колонке оно должно быть как 1:(1 + 1) = 1:2, в третьей оно окажется равным 1:(2 + 1) = 1:3; далее, в четвертой оно будет равно 1:(1 + 3) = 1:4, [...] и вообще в колонке *c* как 1:*c*.

2. Поскольку отношение $1/(r+1)$, упомянутое в последней лемме, здесь названо $1/c$, $r = c - 1$ = (по Свойству 1) числу нулей, с которых начинается колонка *c*. Но ввиду того, что в указанной лемме было выведено уравнение

$$g + h + i + l + p = (n - r)q/(r + 1) = (n - r)q/c,$$

оказывается, что

$$(g + h + i + l + p)/q(n - r) = 1/c,$$

где $g + h + i + l + p$ – сумма *n* членов, а $(n - r)$ – число членов без нулевых. Другими словами, сумма любого числа членов начиная с единиц находится в отношении $1/c$ к сумме стольких же чисел, равных члену, следующему за последним.

Следствие. По только что установленному свойству теперь нетрудно отыскать и любой желаемый член, и сумму членов любого ряда. Пусть взято равное число членов *n* с начала нескольких смежных колонок.Тогда число членов, взятых начиная с 1 (исключая исходные нули), по Свойству 1 будет во второй колонке $(n - 1)$, в третьей – $(n - 2)$, в четвертой – $(n - 3)$ и т. д.

Приняв это, я определяю искомое следующим образом. Сумма *n* членов первой колонки, конечно же равная *n* единицам или $n/1$, может быть по Свойству 4 структуры таблицы приравнена $(n + 1)$-му члену, т. е. члену, следующему после последнего, во второй колонке. Поэтому половина этого члена, умноженная на $(n - 1)$, т. е. на число членов второй колонки начиная с 1, равна C_n^2 и по Свойству 12 равна сумме членов второй колонки и в то же время по Свойству 4 равна члену, следующему за последним в третьей. Следовательно, аналогично, 1/3 этого члена, умноженная на $(n - 2)$, т. е. на число членов третьей колонки начиная с 1, равная C_n^3, будет по Свойству 12 равна сумме членов третьей колонки и в то же время по Свойству 4 равна члену, следующему за последним в четвертой колонке. Следовательно, 1/4 этого члена, умноженная на $(n - 3)$, т. е. на число членов четвертой колонки начиная с 1, составит C_n^4 и будет равна сумме членов четвертой колонки и в то же время члену, следующему за последним в пятой. И снова 1/5 этого члена, умноженная на $(n - 4)$, т. е. C_n^5, образует сумму членов пятой колонки и в то же время член, который следует за последним в шестой и т. д. по порядку.

Отсюда мы заключаем, что сумма первых *n* членов первой колонки равна $n/1$, второй – C_n^2, третьей – C_n^3, четвертой – C_n^4 [...] и вообще для колонки *c* – C_n^c. **[164]** А так как каждое из этих количеств выражает $(n + 1)$-й член следующей колонки, то искомый член или последний *n*-й член в колонке будет получен, если *n* всюду заменить на $(n - 1)$. И поэтому искомый член второй колонки будет $(n-1)/1$, третьей – C_n^2, четвертой – C_n^3 [...] и вообще для колонки c C_{n-1}^{c-1}.

Пояснительный комментарий. Многие, как мы можем вскользь заметить, посвятили себя размышлениям о фигурных числах. Среди них Фаульхабер и Реммелин из Ульма, Валлис, Меркатор в своей *Logarithmotechnia*, Prestet. Но я не знаю никого, однако, кто привел бы общее и научное доказательство этого свойства. Валлис, в своей *Arithmetica Infinitorum*, приступая к обсуждению основ своего метода, исследует по индукции отношения рядов квадратов, кубов и других степеней натуральных чисел к рядам стольких же чисел, равных наибольшему члену. Затем, в Предложении 176 он переходит к размышлениям о треугольных, пирамидальных и других фигурных числах. Но было бы более удовлетворительно и быть может более подходяще сути этого предмета вначале, в обратном порядке, рассмотреть фигурные числа и закрепить это общим и тщательным доказательством и только затем приступить к исследованию сумм степеней.

Не говоря о том, что способ доказательства по индукции недостаточно научен[20] и, кроме того, требует отдельного труда для каждого ряда, каждый наверняка согласится, что следует начинать с более простого и первичного по своей сути относительно другого (как по-видимому фигурные числа по сравнению со степенями). Это именно так и потому, что фигурные числа образуются сложением, а степени – умножением, и особо, в частности, потому что различные ряды фигурных чисел, начиная с их соответствующих нулей, составляют точную часть рядов равных чисел без какого-нибудь избытка и недостатка, тогда как ряды степеней не обладают в точности этим свойством (по крайней мере не при конечном числе членов) со скольких нулей мы не начинали бы их. В остальном, действительно, по известным суммам фигурных чисел не более трудно исследовать суммы степеней, чем при выводе Валлиса первых по последним. Как это делается я покажу в нескольких словах[21].

Пусть дан ряд натуральных чисел 1. 2. 3. 4. 5 до n и пусть ищется их сумма, а также суммы их квадратов, кубов и т. д. Поскольку в таблице сочетаний неопределенный [n-й] член второй колонки равен $(n-1)$, а сумма всех членов, или $\sum(n-1)$, была определена в предыдущем следствии равной $n(n-1)/2! = (nn-n)/2$, то $\sum(n-1)$ или $\sum n - \sum 1$ будет равна $(nn-n)/2$ и $\sum n = n(n-1)/2 + \sum 1$. **[165]** Но $\sum 1$ или сумма всех единиц равна n и поэтому сумма всех величин n или $\sum n$ равна $(nn-n)/2 + n = nn/2 + n/2$.

Снова, поскольку в соответствии с тем же следствием неопределенный [n-й] член в третьей колонке будет $C_n^2 = (nn-3n+2)/2$, а сумма всех членов, т. е. всех таких [трехчленов], равна $C_n^3 = (n^3-3nn+2n)/6$, то

$$\sum(nn-3n+2)/2 = \sum nn/2 - \sum 3n/2 + \sum 1 = (n^3-3nn+2n)/6$$
$$\text{и } \sum nn/2 = (n^3-3nn+2n)/6 + \sum 3n/2 - \sum 1.$$

Но $\sum 3n/2 = 3/2 \sum n =$ (как было только что показано) $3nn/4 + 3n/4$, а $\sum 1 = n$. Следовательно, если все эти результаты подставить в предыдущее уравнение, оно станет

$\sum nn/2 = (n^3 - 3nn + 2n)/6 + (3nn + 3n)/4 - n = n^3/6 + nn/4 + n/12$,

а удвоенная левая часть, $\sum nn$ (сумма всех квадратов всех n) = $n^3/3 + nn/2 + n/6$. Далее, поскольку n-й член четвертой колонки равен $C_n^3 = (n^3 - 6nn + 11n - 6)/6$, а сумма всех членов $C_n^4 = (n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n)/24$, то конечно же $\sum(n^3 - 3nn + 2n)/6$, т. е

$\sum n^3/6 - \sum nn + \sum 11n/6 - \sum 1 = (n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n)/24$ **[166]**
и потому $\sum n^3/6 = (n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n)/24 + \sum nn - \sum 11n/6 + \sum 1$.

Но так как по только что доказанному

$\sum nn = n^3/3 + nn/2 + n/6$, $\sum 11n/6 = 11/6\sum n = 11nn/12 + 11n/12$ и $\sum 1 = n$,

то, если всё это подставить в предыдущее, результатом окажется

$$\sum n^3/6 = (n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n)/24 + n^3/3 + nn/2 + n/6 - 11nn/12 - 11n/12 + n = n^4/24 + n^3/12 + nn/24.$$

Левая часть, умноженная на 6, т. е. сумма кубов, будет равна

$$\sum n^3 = n^4/4 + n^3/2 + nn/4.$$

И если постепенно переходить к более высоким степеням, можно легко составить следующую *таблицу сумм степеней*[22]

$$\begin{aligned}
&\sum n = nn/2 + n/2,\\
&\sum nn = n^3/3 + nn/2 + n/6,\\
&\sum n^3 = n^4/4 + n^3/2 + nn/4,\\
&\sum n^4 = n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30,\\
&\sum n^5 = n^6/6 + n^5/2 + 5n^4/12 - nn/12,\\
&\sum n^6 = n^7/7 + n^6/2 + n^5/2 - n^3/6 + n/42,\\
&\sum n^7 = n^8/8 + n^7/2 + 7n^6/12 - 7n^4/24 + nn/12,\\
&\sum n^8 = n^9/9 + n^8/2 + 2n^7/3 - 7n^5/15 + 2n^3/9 - n/30,\\
&\sum n^9 = n^{10}/10 + n^9/2 + 3n^8/4 - 7n^6/10 + n^4/2 - nn/12,\\
&\sum n^{10} = n^{11}/11 + n^{10}/2 + 5n^9/6 - 1n^7 + 1n^5 - n^3/2 + 5n/66.
\end{aligned}$$

[167] И действительно, каждый, кто внимательно исследует содержащийся здесь закон следования, сможет продолжить эту таблицу далее, не отвлекаясь, как выше, на вычисления, ибо если c – показатель любой степени, то сумма всех n^c будет

$$\sum n^c = [1/(c+1)]n^{c+1} + (1/2)\,n^c + (c/2)\,An^{c-1} + \frac{c\,(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}\,B\,n^{c-3} + \frac{c\,(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,Cn^{c-5} + \frac{c\,(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5)(c-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\,Dn^{c-7} + \ldots$$

Показатели степени n постоянно снижаются на две единицы пока степень не окажется равной либо n, либо nn. Заглавные буквы A, B, C, D, и т. д., взятые по порядку, обозначают коэффициенты последних членов сумм $\sum nn$, $\sum n^4$, $\sum n^6$, $\sum n^8$ и т. д. Так, $A = 1/6$, $B = -1/30$, $C = 1/42$, $D = -1/30$[23]. Но эти коэффициенты таковы, что каждый из них вместе с остальными коэффициентами его строки в сумме составляет 1. Например, мы говорим, что $D = 1/30$ потому что $1/9 + 1/2 + 2/3 - 7/15 + 2/9 + D = 1$ [...]. С помощью этой таблицы я менее чем за получетверть часа нашел, что сумма десятых степеней первой тысячи чисел начиная с 1 равна

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

Отсюда ясно, насколько бесполезной следует полагать работу Ismael Bullialdus, включенную в толстый том его *Arithmetica Infinitorum*, в которой он лишь показал, что может с громадным трудом просуммировать первые шесть степеней, [что составляет лишь] часть того, что мы записали на одной-единственной странице.

До того, как закончить эту главу, я хотел бы кратко показать, как, исходя из доказанного о фигурных числах, аналогичные ряды этих чисел (которые, например, имеют одинаковые первые, вторые, третьи и т. д. разности и образуются последовательным прибавлением равных друг другу членов некоторого ряда) могут быть сведены к подобным фигурным числам и таким же образом суммированы, либо найдены их последние члены.

Пусть любой ряд равных друг другу членов обозначен D; его суммирование приводит к ряду C, суммирование которого дает нам ряд B, и, наконец, пусть суммирование B приводит к ряду A, причем [однако] первые члены этих рядов произвольны и обозначены d, c, b, a. **[168]**

D	C	B	A
d	c	b	a
d	$c + d$	$b + c$	$a + b$
d	$c + 2d$	$b + 2c + d$	$a + 2b + c$
d	$c + 3d$	$b + 3c + 3d$	$a + 3b + 3c + d$
d	$c + 4d$	$b + 4c + 6d$	$a + 4b + 6c + 4d$
d	$c + 5d$	$b + 5c + 10d$	$a + 5b + 10c + 10d$

Ряд A называется аналогом рядов фигурных чисел и его первые разности составят ряд B, вторые разности – ряд C, третьи – ряд D и т. д.

Ясно, что ряд A составлен из ряда единиц 1, 1, 1, 1 и т. д., ряда боковых чисел 1, 2, 3, 4 и т. д., ряда треугольных чисел 1, 3, 6, 10 и т. д., пирамидальных чисел 1, 4, 10, 20 и т. д., умноженных соответственно на первые члены рядов, – на a, b, c, d. Для них [для этих рядов фигурных чисел] известны по предыдущему последние члены и суммы и понятно, что и для ряда A могут быть найдены и последний член, и сумма членов. Если число членов n, то, разумеется, последний член будет

$a + (n-1)b + C_n^2 c + C_n^3 d$, а сумма членов $na + C_n^2 b + C_n^3 c + C_n^4 d$.

Глава 4. Определить число сочетаний по отдельности для каждого класса и в то же время показать в скольких сочетаниях одна или более указанных вещей встречаются по отдельности или вместе

В предыдущей главе было установлено, что число сочетаний любого заданного класса равно сумме соответствующего ряда фигурных чисел, доведенного до числа членов, равного числу объединяемых вещей. Поскольку там было также доказано, что сумма n первых членов любой колонки c [таблицы] равна C_n^c, то это же количество выражает также число сочетаний, если n – число объединяемых вещей, а c – класс сочетания.

Ясно, однако, что это количество задано парой арифметических прогрессий, – одной, убывающей начиная с числа объединяемых вещей, и другой, возрастающей начиная с единицы. Обе прогрессии имеют разность 1 и в каждой столько членов, сколько единиц в классе сочетаний, т. е. c, ибо, действительно, в каждой прогрессии разность между первым и последним членами равна c – 1. Отсюда следует **[169]**

Правило 4.1 для нахождения сочетаний заданного класса

Пусть имеются две арифметические прогрессии, одна убывающая, начиная с числа объединяемых вещей, другая возрастающая, начиная с единицы, и пусть разность каждой равна 1, а число членов в каждой равно числу единиц в классе желаемых сочетаний. Пусть произведение членов первой прогрессии делится на произведение членов второй; частное будет желаемым числом сочетаний заданного класса. Так, например, число способов, которыми 4 вещи могут быть выбраны из 10 различных вещей, равно 10 ·9 ·8 ·7/(1 ·2 ·3 ·4) = 5040/24 = 210.

Замечание: Если предложено объединить несколько большее количество вещей, особенно в сочетания высокого класса, – например, если предложено выяснить сколькими способами можно выбрать 20 вещей из 100, то следование правилу потребует исключительно длинного и тягостного вычисления с определением произведения 40 членов [?]. И чтобы желаемый результат можно было бы найти быстрее, мы можем до умножения сократить члены прогрессий на общие множители[24].

Каждый, кто при таких длительных вычислениях не нуждается в полной точности и желает допустить то, что достаточно для применения, может с громадной пользой и сбережением труда обратиться к логарифмам. Так, если сумму логарифмов чисел от 1 до 20 (равную 18.3861244) вычесть из суммы логарифмов чисел от 81 до 100 (равной 39.1152756), либо если складывать только логарифмы [13] чисел (оставшихся после сокращений членов прогрессий), будет немедленно получено 20.7291512, т. е. логарифм искомого числа сочетаний. Поскольку этот логарифм имеет характеристику 20, искомое число должно быть установлено [записано] с 21 знаками. Из них, первые 4, найденные в *Canon*, равны 5359; следующие 3, **[170]** [полученные] по сравнению с ближайшим логарифмом, 833, а оставшиеся 14 цифр могут быть заменены нулями, так что примерно число сочетаний будет равно 535 983 300 000 000 000 000[25].

Далее, из приведенного правила для подсчета числа сочетаний отдельных классов могут быть получены такие следствия.

Следствие 1. При любом количестве вещей, по мере возрастания класса соединения до половины этого количества, число сочетаний возрастает. Если же класс возрастает и далее, число сочетаний убывает. Так, из восьми вещей больше пар, чем единиц, троек больше, чем пар и четверок больше, чем троек. Но при продолжении окажется меньше пятерок, чем четверок, меньше шестерок, чем пятерок и т. д., ср. Свойство 6 таблицы фигурных чисел. И действительно, 8 или 8/1, число единиц в восьми вещах, умноженное по очереди на 7/2, 6/3, 5/4, 4/5, 3/6, и т. д., приводит соответственно к C_8^2 , C_8^3, [...], C_8^6 и т. д., что соответствует правилу для подсчета числа пар, троек, [...] шестерок и т. д.

И, поскольку каждый из сомножителей 7/2, 6/3, 5/4 больше 1, тогда как остальные, 4/5, 3/6 и т. д., меньше 1, то указанные последовательные произведения, т. е. числа сочетаний, должны постоянно возрастать до некоторого значения, а затем убывать. И что они действительно возрастают до того, как класс сочетания достигнет половины [объединяемых] вещей, ясно, поскольку в [смежных] дробях 8/1, 7/2, 6/3, 5/4 и т. д. (последовательное умножение на которые приводит к числу сочетаний и числитель первой из которых всегда совпадает с количеством вещей, а знаменатель равен 1) числители и знаменатели сближаются на 2 единицы (первые убывают, вторые возрастают) и таким образом сближаются друг с другом на протяжении числа членов, равного половине первого числителя или половине заданного количества вещей. После этого знаменатели в свою очередь становятся больше числителей и интервал между ними постоянно возрастает.

Следствие 2. У двух классов, сумма которых равна количеству вещей (и которые мы будем называть *дополнительными* [друг к другу]), число сочетаний одно и то же. Так, если вещей 8, то будет равно число сочетаний по 7 и единичных сочетаний; столько же, содержащих 6 вещей и 2 вещи, столько же 5 и 3, потому что **[171]** 8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3. По этому поводу см. Свойства 6 и 7 таблицы фигурных чисел. Причина ясна: сколько раз из восьми вещей взято, например, две, столько же раз, разумеется, останется шесть. И обратно, то же число раз может быть отобрано шесть вещей и именно тех, которые раньше были оставлены, а выбранные раннее – теперь оставлены. То же самое может быть доказано следующим образом, исходя из указанного выше правила. Число пар из 8 вещей равно C_8^2; будем прибавлять к числителю и знаменателю равное число сомножителей прогрессий до тех пор, пока последний сомножитель, добавленный к знаменателю, не станет равным первому, добавленному к числителю. А именно, [добавим]
6 ·5 ·4 ·3/3 ·4 ·5 ·6. Таким образом частное добавленных членов равно 1, поскольку [...].

Полученное частное, т. е. C_8^6, не отличается от числа пар, C_8^2 . Нетрудно усмотреть, однако, что новое частное выражает количество шестерок, т. е. сочетания, сумма класса которых вместе с двойкой равно количеству объединяемых вещей. Более того, первый добавленный сомножитель в числителе [6] (который по предположению равен последнему добавленному сомножителю в знаменателе или классу сочетания) отличается от первого из всех сомножителей в числителе [от восьми] или от количества объединяемых вещей на столько же единиц, сколько сомножителей предшествует ему, т. е. на столько единиц, сколько содержится в классе сочетаний, количество которых определили предшествующие сомножители 8 ·7/1 ·2.

Следствие 3. Класс, равный половине вещей, если их количество четно, или два смежных класса, сумма которых равна количеству вещей, если оно нечетно, приводят к наибольшему числу сочетаний. Это выводится из предыдущих следствий. Пусть, к примеру, по Следствию 2 среди восьми вещей число сочетаний, содержащих 7 из них, равно числу единиц, число шестерок равно числу пар и число пятерок – числу троек. Тогда, стало быть, по Следствию 1 имеется больше четверок, чем троек, пар или единиц и больше, чем сочетаний любого иного класса. Аналогично, по Следствию 2 среди девяти вещей одинаково число восьмерок и единиц, также число семерок и пар, [...]. И раз пятерки и четверки и соответствующие классы наиболее близки к половине вещей, то по Следствию 1 ясно, что их количества превысят любые остальные.

Следствие 4. Число сочетаний любого класса или его дополнения при любом количестве вещей равно числу перестановок того же количества вещей только двух видов, численности которых равна классу сочетания и его дополнения. Так, в семи вещах столько же троек или четверок сколько перестановок из семи вещей трех – одного вида, и четырех – другого. **[172]** В соответствии с Правилом 1.2 число троек равно C_7^3 = C_7^4 и равно числу перестановок указанных вещей.

Следствие 5. При любом количестве вещей множество [количество] сочетаний данного класса равно сумме сочетаний двух классов, – предыдущего и того же классов, также для [меньшего на единицу] количества вещей. Например, имеется столько же четверок из 10 вещей, сколько троек и четверок вместе из девяти вещей. По Правилу [4.1] число четверок из 10 вещей равно

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\,(6+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=[\ldots]=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$$

и равно числу четверок и троек из девяти вещей.

То же может быть показано иначе следующим образом. Назовем одну из 10 данных вещей *A*. Ясно, что имеется в точности столько же четверок, в которых *A* не встречается, сколько их имеется в девяти оставшихся вещах. И имеется столько же других четверок, в которых находится *A*, сколько троек в оставшихся девяти вещах, поскольку, действительно, включив *A* в каждую из этих троек, получим столько же четверок, сколько по построению включают в себя *A*. Отсюда вытекает утверждение следствия, ибо четверки, либо включающие *A*, либо нет, исчерпывают все возможные четверки, которые могут быть образованы из данного количества вещей. Ср. Свойства 4 и 5 таблицы фигурных чисел.

Следствие 6. Количество сочетаний всех четных классов (включая нулион) равно количеству сочетаний всех нечетных классов, откуда следует, что каждое из них равно половине полного числа всех сочетаний (также включая нулион). Поскольку по Правилу 2.1 число сочетаний из n вещей равно 2^n, то каждое указанное выше количество равно 2^{n-1}. Это [следствие] было доказано в конце упомянутой главы, но может быть также выведено из предыдущего таким образом.

Из девяти вещей, например, есть одно сочетание из девяти так же, как есть одно из 10 по 10. Далее, в каждом случае имеется 1 нулион и, кроме того, по предыдущему Следствию 5, имеется столько же единиц и пар совместно из девяти вещей, сколько одних только пар из 10; столько же троек и четверок из девяти вещей, сколько одних только четверок из 10; [...]. Поэтому полное число сочетаний из девяти вещей равно числу сочетаний четных классов из 10 вещей. Опять же, по тому же самому следствию, имеется столько же нулионов и единиц совместно из девяти вещей, сколько одних только единиц из 10; столько же пар и троек вместе, столько же четверок и пятерок [...] в первом случае, сколько, по отдельности, троек, пятерок [...], во втором. И полное число всех сочетаний из девяти вещей также равно числу сочетаний нечетных классов из 10. Поэтому количества сочетаний четных и нечетных классов из 10 вещей равны друг другу. Вот сводка результатов[26]. **[173]**

Нам остается еще прояснить здесь несколько вопросов, которые могут быть поставлены по поводу сочетаний и которые иногда полезны, например, когда желательно исследовать в скольких сочетаниях одна или большее заданное число вещей могут находиться либо вместе, либо по отдельности. Поскольку число подобных вопросов можно умножать бесконечно, мы постараемся свести их к одному виду и обобщенно сформулировать их так:

Дано количество объединяемых вещей и класс сочетаний; найти в скольких сочетаниях встречаются некоторые указанные и определенные вещи из числа заданных и не встречаются некоторые другие. Например, из числа n вещей, объединяемых в сочетания класса c, указаны определенные вещи A, B, C, D, E числом m, которое может быть больше или меньше, чем c. И пусть спрашивается, в скольких сочетаниях встречаются некоторые из указанных вещей A, B, C числом b, но не другие, D и E. Я говорю, что решение этой таким образом обобщенно понимаемой задачи занимает не больше времени, чем решение любой специальной задачи и что искомое число сразу же будет соответствовать числу возможных сочетаний класса $(c - b)$ из $(n - m)$ вещей. [...].

Поскольку число объединяемых вещей равно n, из которых указано m, то, вычитая их, получим $(n - m)$ вещей. Если их объединить в группы класса $(c - b)$, получатся новые сочетания, в которые не войдет ни одна из указанных вещей. А если присоединить к ним указанные вещи A, B, C, число которых принято равным b, то ясно, что будут получены сочетания класса c, каждое из которых, как требовалось, из числа указанных вещей включит лишь A, B, C и не включит остальных из них. Если закреплено b – число указанных вещей, которые должны войти в сочетания, а сами эти вещи – нет, и они могут быть взяты любым способом из всех указанных, то ясно, что число возможных сочетаний следует умножить во столько раз, сколько раз b различных вещей могут быть выбраны из m указанных. По Правилу [4.1] это может быть сделано C_m^b способами, так что в этом случае число возможных сочетаний равно $C_m^b \cdot C_{n-m}^{c-b}$.

Заметим, что если $n - m < c - b$, то нет ни одного сочетания, удовлетворяющего поставленным условиям. Но применим полученный результат к некоторым специальным случаям. **[174]**

1. Спрашивается, во-первых, в скольких сочетаниях может встретиться любая заданная вещь. Поскольку здесь указана одна-единственная вещь, то $m = b = 1$ и число искомых сочетаний равно C_{n-m}^{c-b}

$= C_{n-1}^{c-1}$. Оно относится к числу всех сочетаний C_n^c как $c{:}n$, т. е. как класс сочетания к числу объединяемых вещей. [...]

2. Пусть теперь указаны две вещи, *A* и *B,* и отыскивается число сочетаний, в которых *A* встречается без *B*. Поскольку здесь $m = 2$ и $b = 1$, искомое число будет равно C_{n-2}^{c-1} и, соответственно, если удвоить его, мы получим число сочетаний, в которые входят либо *A* без *B*, либо *B* без *A*.

3. Далее, если спрашивается, в скольких сочетаниях встречаются и *A*, и *B*, то $m = b = 2$ и искомое число равно C_{n-2}^{c-2}.

4. Если, однако, спрашивается, в скольких сочетаниях не встречается ни одна из указанных вещей, то поскольку $m = 2$ и $b = 0$, требуемое множество [количество] сочетаний равно C_{n-2}^{c}.

5. И также, если указаны 3 вещи и спрашивается, сколько сочетаний включают 2 из них, *A* и *B*, без третьей, *C*, то $m = 3$ и $b = 2$ и искомое число сочетаний окажется равным C_{n-3}^{c-2}. И поскольку из трех вещей может быть выбрано три пары, то будет втрое большее число сочетаний, в которых встречаются любые 2 вещи, но не третья. И так далее в других случаях.

Приложение

После объяснения сути фигурных чисел и их применения к [учению] о сочетаниях, мы отклонимся от направления нашей мысли и, вспоминая обещанное в конце [Замечаний к] Предложению 7 части 1, покажем, как ожидания двух игроков, которым для победы недостает неопределенного [некоторого] числа партий, могут быть показаны [обобщенно] в символах. Эта та задача, которая одно время занимала Паскаля. Имеется, однако, два пути, по которым можно здесь следовать. Один из них, менее очевидный, **[175]** зависит от построения таблицы, включенной там [в Предложении 7], и от рассмотрения хода чисел в ней. В своем письме Ферма Паскаль (это можно видеть в *Трудах* Ферма, опубликованных в Тулузе в 1679 г. на с. 180)[27] пишет, что так и не смог понять этого пути. Другой путь проще, более очевиден и немедленно следует из учения о сочетаниях и Паскаль видимо использовал его при решении указанной задачи.

Первый путь. Пусть имеется два игрока, из которых *A* для победы нехватает *n* партий, а *B* – *m* партий. Пусть отыскиваются ожидания каждого, т. е. пусть в указанной таблице отыскивается клетка *n* в колонке *m*[28].

$m =$	1	2	3	4	5
	1	1	2		
		1	2	4	
		1	2	4	8
	1	2	4	8	16

$n = 1$	1/2	3/4	7/8	15/16	31/32
2	1/4	4/8	11/16	26/32	57/64
3	1/8	5/16	16/32	42/64	99/128
4	1/16	6/32	22/64	64/128	163/256

Перед каждой колонкой [выписан ее номер] выписано количество членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем 2, равное номеру колонки. С первого же взгляда видно, что эта прогрессия продолжена в колонках знаменателей дробей таким образом, что знаменатель клетки n любой колонки m есть ее $(m + n)$-й член, т. е. равен [...] 2^{m+n-1}.

Что касается числителей дробей, следует иметь в виду, что по построению таблицы, включенной [в Предложение 7], каждый из них равен сумме двух других [числителей], расположенных непосредственно над ним и слева от него. Отсюда можно заключить, что числитель клетки n любой колонки равен также сумме всех n числителей предыдущей колонки, считая сверху, плюс единица. Можно поэтому сообразить с несколько бóльшим трудом, что ряд числителей второй колонки (вместе с добавленными членами [степенями числа 2]) может быть разделен на два других ряда, третий – на три ряда, четвертый – на четыре и вообще числители любой m-й колонки – на m других рядов, из которых первый это всегда ряд монад, второй – ряд боковых чисел с добавленным сверху нулем, третий – ряд треугольных чисел с двумя нулями, четвертый – ряд пирамидальных чисел с тремя нулями и т. д., следующим образом.

					1 + 0 + 0 + 0 + 0
				1 + 0 + 0 + 0	1 + 1 + 0 + 0 + 0
			1 + 0 + 0	1 + 1 + 0 + 0	1 + 2 + 1 + 0 + 0
	1	1 + 0	1 + 1 + 0	1 + 2 + 1 + 0	1 + 3 + 3 + 1 + 0
	1	1 + 1	1 + 2 + 1	1 + 3 + 3 + 1	1 + 4 + 6 + 4 + 1
1	1	1 + 2	1 + 3 + 3	1 + 4 + 6 + 4	1 + 5 + 10 + 10 + 5
2	1	1 + 3	1 + 4 + 6	1 + 5 + 10 + 10	1 + 6 + 15 + 20 + 15
3	1	1 + 4	1 + 5 + 10	1 + 6 + 15 + 20	1 + 7 + 21 + 35 + 35
4	1	1 + 5	1 + 6 + 15	1 + 7 + 21 + 35	1 + 8 + 28 + 56 + 70

[176] И поскольку по Следствию главы 3 этой части член $(m + n)$ в ряду монад равен единице; в ряду боковых, треугольных, пирамидальных чисел и т. д. – числу сочетаний из $(m + n - 1)$ по одному, двум, трем и т. д. и вообще в m-м ряду он равен C_{m+n-1}^{m-1}, то числитель клетки n в m-й колонке будет равен сумме всех этих сочетаний включая единицу, – C_{m+n-1}^{m-1}. Таким образом, в соответствии с главой 4 эти же члены указывают также количества нулионов, единиц, пар, троек и т. д., включенных в $(m + n - 1)$ вещах, и числитель указанной клетки будет составлен из объединения всех нулионов, единиц, пар и других сочетаний из этих вещей до класса $(m - 1)$ включительно. И та же сумма, деленная на 2^{m+n-1}, укажет всю дробь в той же клетке таблицы, т. е. по предположению, ожидание, на которое надеется игрок A или долю единичной ставки, следуемой игроку, которому нехватает n партий до победы, когда другому игроку нехватает m партий.

Заметим, что если $m = n + 1$, т. е. если игроку B нехватает на одну партию больше, чем игроку A, доля ставки, причитающаяся A, будет считаться равной сумме сочетаний $2n$ вещей от нулиона до класса n включительно, деленной на 2^{2n} (т. е. в соответствии с главой 2 на полное число сочетаний из $2n$ вещей). Поэтому, если мы вычтем из этого половину всех сочетаний (от нулиона до половины числа сочетаний класса n, как можно сообразить по Следствиям 2 и 3 этой главы), деленную на сумму всех без исключения сочетаний, или иными словами вычтем половину (т. е. долю ставки, поставленную игроком A), то останется в качестве выгоды для A, или доли ставки, поставленной игроком B, но причитающейся игроку A, половина сочетаний одного только класса n, деленная на 2^{2n}, т. е. на сумму всех без исключений сочетаний. Но эта выгода относится к 1/2 (к ставке другого игрока B) как всё число сочетаний класса n, деленное на указанное отношение (т. е. по правилу этой главы как **[177]** $C_{2n}^{n}:2^{2n}$) к единице, и ясно, что доля, причитающаяся игроку A от ставки B, будет выражена отношением $C_{2n}^{n}:2^{2n}$.

Например, если $n = 8$ и $m = 9$, т. е. если игроку A нехватает восьми партий, а B – 9, первому будет причитаться из ставки второго $C_{16}^{8}:2^{16}$. Разделим 8 раз четные сомножители числа сочетаний на 2 и умножим каждый сомножитель знаменателя на 2 и дробь сведется к $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot [...] \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15/(2 \cdot 4 \cdot 6\ [...] \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16)$, – к дроби, получающейся от деления первых восьми нечетных чисел на произведение стольких же первых четных чисел. Таково было решение Паскаля, которое его так сильно обрадовало[29].

Второй путь. Второй путь решения задачи сразу же следует из рассмотрения сочетаний. Я спрашиваю, сколько партий должно быть сыграно пока один и только один игрок обязательно выиграет свое число партий и победит. И я вижу, что требуется $(m + n - 1)$ партий. Ибо если сыграно $(m + n - 2)$ партий, из которых один выиграл $(m - 1)$, а другой – $(n - 1)$, так что каждому все еще нехватает одной партии, то следующая непременно приведет к победе либо одного игрока, либо другого. И поэтому я предполагаю, что сыграно $(m + n - 1)$ партий (не потому, что их меньшее число не могло закончиться победой одного или другого, а потому что [в таком случае] оставшиеся до $(m + n - 1)$ партии, будь они все сыграны, были бы недостаточны для завершения игры вторым игроком и никак [поэтому] не смогли бы повредить победителю).

И я говорю, что предполагаю, что играется $(m + n - 1)$ партий и принимаю во внимание, что A должен получить ставку каждый раз, когда B не выиграет ни одной партии, или выиграет одну, две или три и т. д., или, наконец, $(m - 1)$ партии, но не больше. И это, в самом деле, конечно же может случиться в стольких случаях, сколько содержится нулионов, единиц, пар, троек и т. д. или, наконец, сочетаний класса $(m - 1)$ в $(m + n - 1)$ играх. И поскольку A имеет указанное количество случаев для получения ставки 1, а остальные случаи – для ее потери, и поскольку число всех случаев или всех возможных сочетаний равно 2^{m+n-1}, жребий A, по Следствию 3 к Предложению 1 части 1 равен сумме указанных сочетаний (от нулиона и до класса $(n - 1)$ включительно), деленной на 2^{m+n-1}.

Заметим, что если количества недостающих партий, m и n, различаются лишь незначительно, лучше отыскивать, по Следствию 5 к названному предложению, лишь выгоду, т. е. величину ожидания A не по отношению ко всей ставке, а относительно денег другого игрока. Пусть, например, $m = n + 1$, так что $m + n - 1 = 2n$. Число случаев, при которых A должен получить деньги другого игрока (т. е. в этом примере получить 1) будет равно числу сочетаний из $2n$ игр классов от 0 до n. А число случаев, при которых A потеряет столько же, т. е. получит – 1, будет равно оставшемуся числу сочетаний более высоких классов.

Поскольку **[178]** по Следствию 2 этой главы, более высокий и более низкий дополнительные классы имеют равное число сочетаний, которые исключают друг друга, для избытка числа первых сочетаний над вторыми остаются только сочетания класса n, – половина от $2n$, – число которых C_{2n}^{n}. И по указанному Следствию 5 выгода игрока A относительно денег игрока B оказывается равной $C_{2n}^{n}:2^{2n}$, точно как и выше. Аналогично может быть определена его выгода в случаях $m = n + 2$ или $m = n + 3$ и т. д. Я нахожу, однако, что при заданном n выгода A в случае $m = n + 1$ относится к его выгоде в случае $m = n + 2$ как $(n + 1)/(2n + 1)$. А для случаев $m = n + 2$ и $m = n + 3$, выгоды относятся как $(2n + 4)/(3n + 4)$ и т. д.

Для тех, кто наслаждается размышлениями о числах, я добавлю вскользь два свойства таблицы[30], присоединенной к [Замечаниям к] Предложению 7 части 1, каждое из которых может привести к тому же ответу. Одно из свойств состоит в том, что числители третьей колонки являются треугольными числами 3, 6, 10, 15, 21 и т. д., к которым добавлены числители второй колонки 4, 5, 6, 7, 8 и т. д.; числителями четвертой колонки – пирамидальные числа 4, 10, 20, 35, 56 и т. д., к которым добавлены числители третьей, – 11, 16, 22, 29, 37 и т. д.; и числителями пятой – треугольно-пирамидальные числа 5, 15, 35, 70, 126 и т. д., к которым добавлены числители четвертой, – 26, 42, 64, 93, 130 и т. д., причем добавляемые числа во всех случаях начинаются со второго члена [своей колонки].

Другое свойство состоит в том, что числители третьей колонки являются треугольными числами 6, 10, 15, 21 и т. д., к которым добавлены числители первой, – 1, 1, 1, 1 и т. д.; числители четвертой, – пирамидальными числами 10, 20, 35, 56 и т. д., к которым добавлены числители второй, – 5, 6, 7, 8 и т. д.; числители пятой, –треугольно-пирамидальные числа 15, 35, 70, 126 и т. д., к которым добавлены числители третьей, – 16, 22, 29, 37 и т. д., причем добавляемые числа во всех случаях начинаются с третьего члена [своей колонки] и т. д.

Глава 5. Найти число сочетаний, если все объединяемые вещи различны, но могут входить в одно и то же сочетание более одного раза

В сочетаниях предыдущей главы мы предполагали, что ничто не может соединяться с самим собой и не может быть включено более одного раза в то же самое соединение. Теперь, однако, мы добавляем следующее условие [изменяем предыдущее]: любая вещь может быть также соединена сама с собой и [таким образом] включена более одного раза в то же самое сочетание.

Пусть буквы *a, b, c, d* и т. д. соединяются при этом условии. Пусть будет столько же строк, сколько букв и, как в главе 2, каждая строка начинается с одной буквы или единицы. Чтобы найти число пар в каждом ряду, та буква, которая находится в нем в самом начале, должна соединяться не только со всеми предыдущими, но также и сама с собой. Так, в первой строке будет одна пара, *aa*; во второй – две пары, *ab* и *bb*; в третьей – три пары, *ac, bc, cc*; в четвертой – четыре, *ad, bd, cd, dd* и т. д. **[179]**

При образовании троек каждая буква должна быть аналогично соединена не только со всеми парами предыдущих строк, но также и с парами своей собственной строки, так что в первой строке будет одна тройка, *aaa*, во второй – три тройки, *aab, abb, bbb*; в третьей – шесть, – *aac, abc, bbc, acc, bcc, ccc* и т. д. И это должно быть также соблюдено в сочетаниях всех других классов. Таким образом ясно, что ни одна возможная выборка из данных вещей не будет упущена. Вот схема:

a.aa.aaa
b.ab.bb.aab.abb.bbb
c.ac.bc.cc.aac.abc.bbc.acc.bcc.ccc
d.ad.bd.cd.dd.aad.abd.bbd.acd.bcd.ccd.add.bdd.cdd.ddd

Теперь мы без труда сообразим, что единицы всех строк снова образуют ряд монад, пары – ряд боковых чисел, тройки – треугольные числа и таким же путем с единственным различием другие сочетания старших классов образуют ряды других фигурных чисел более высоких порядков, в точности как сочетания в предыдущей главе: там ряды начинались с нуля, здесь – сразу же с единиц. Если собрать эти результаты в таблицу, она будет выглядеть таким образом

Таблица сочетаний

В первой колонке указано количество объединяемых вещей, в остальных – класс сочетаний

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960

Удобно, однако, отметить два основных свойства этой таблицы. 1) Строки совпадают с сответствующими колонками: первая – с первой, вторая – со второй [...] и т. д. 2) Если взять равное число членов в любых двух смежных строках или колонках, сумма членов предыдущей строки или колонки будет равна последнему члену следующей строки или колонки.

Теперь легко будет определить сумму членов любого ряда, равно как и число сочетаний каждого класса. Если число членов, т. е. объединяемых вещей обозначить через n, то сумма единиц или членов первого ряда, т. е. последний член второго ряда, будет также равна n. Представим себе, что второй ряд предваряется нулем, так что число членов станет равным $(n + 1)$; если последний член n умножить на половину $(n + 1)$, произведение будет $n(n + 1)/2!$, т. е. по Свойству 12 главы 3 суммой пар или членов второго ряда [суммой членов ... или числом пар] и также по Свойству 2 этой главы последним членом третьего ряда. **[180]**

Представим себе, что третий ряд предваряется двумя нулями, так что число членов станет равным ($n + 2$). Если треть этого умножить на только что найденный последний член, произведение будет $n(n + 1)(n + 2)/3!$ или в соответствии с теми же следствиями [числом] троек или суммой членов третьего ряда и также последним членом четвертого ряда.

Таким же образом сумма членов четвертого ряда или [число] четверок оказывается равным $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)/4!$ […] и вообще сумма членов ряда c или [число] сочетаний класса c, – $n(n + 1)(n + 2) \dots (n + c - 1)/c!$ [$= C^{c}_{n+c-1}$]. Здесь следует заметить, что если $c > n$, то […] числитель и знаменатель можно сократить на $n(n + 1)(n + 2) \dots c$, так что результатом будет $(c + 1)(c + 2) \dots (c + n - 1)/(n - 1)!$ [$= C^{n-1}_{c+n-1}$]. А так как эта дробь точно в такой же форме указывает также сумму ($c + 1$) членов в ($n - 1$)-м ряду, то сумма [первых] n членов ряда c всегда равна сумме [первых] ($c + 1$) членов в ($n - 1$)-м ряду, что является еще одним не лишенным изящности свойством этой таблицы. Отсюда таким образом следует

Правило 5.1 для нахождения [числа] сочетаний данного класса, если одна и та же вещь может быть включена в одно и то же сочетание более одного раза

Пусть даны две возрастающие арифметические прогрессии, начинающиеся, одна – с числа объединяемых вещей, другая – с единицы, – и имеющие одну и ту же разность 1. Пусть каждая прогрессия будет состоять из стольких членов, сколько единиц в классе сочетаний, а произведение членов первой из них делится на произведение членов второй. Тогда частное будет равно искомому числу сочетаний данного класса. Таким образом, например, число четверок в 10 различных вещах равно $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13/4! = 17\,160/24 = 715$.

Заметим, что если класс сочетаний больше числа вещей (что, конечно же, возможно при принятом предположении), будет проще начинать первую прогрессию с класса **[181]** сочетания плюс 1 и в обоих случаях принимать число членов на 1 меньше числа вещей. Так, число сочетаний класса 10 из четырех вещей равно $11 \cdot 12 \cdot 13/3! = 1716/6 = 286$.

Но число сочетаний нескольких классов от одного до некоторого числа, т. е. сумма стольких же колонок, может быть найдена не с бóльшим трудом, ибо, например, 10 первых членов четвертой колонки совпадают с суммами четырех первых членов 10 первых колонок и, более того, суммы этих четырех первых членов [соответственно] равны 11 членам четвертой колонки, исключая [в обоих случаях] лишь первый член [четвертой колонки] или 1 (отдельные суммы равны отдельным членам как это следует из Свойства 2 таблицы [главы 3]). Ясно также поэтому, что [сумма] первых 10 членов первых четырех колонок, т. е. числа всех единиц, пар, троек и четверок из 10 вещей, окажется на 1 меньше, чем сумма первых 11 членов четвертой колонки, т. е. числа четверок, которые могут быть выбраны из 11 вещей или количества сочетаний из числа вещей, на единицу превышающего заданное, и в классе, равном наибольшему из данных.

Я могу также доказать то же самое следующим путем. В отдельных четверках, которые могут быть выбраны из 11 вещей, 11-я вещь либо совсем не входит, либо входит 1, 2, 3 или 4 раза. Но ясно, что четверки, в которые 11-я вещь не входит, это те, которые могут образовать 10 других и не менее ясно, что число этих четверок, в которые указанная 11-я вещь входит лишь один раз, должно быть равно числу троек, которые могут быть образованы из 10 других. Аналогично, количества четверок, в которые 11-я вещь входит дважды и трижды, должны равняться количествам пар и единиц из 10 вещей, ибо действительно […]. И ясно далее, что имеется одна четверка, которая состоит из 11-й вещи, повторенной четырежды. Отсюда мы заключаем, что число четверок в 11 вещах, т. е. в количестве вещей на единицу превышающем заданное, на единицу больше, чем все одиночки, пары, тройки и четверки из 10 данных вещей. А если мы хотим добавить к сочетаниям из 10 вещей нулион, то эти числа окажутся равными.

И поскольку при n данных вещах и при самом старшем классе c, число сочетаний из $(n + 1)$ того же класса c окажется, по Правилу 4.1, $(n + 1)(n + 2) \ldots (n + c)/c!$ [= C_{n+c}^{c}], так что число сочетаний из n вещей при всех классах от 1 до c (поскольку оно на 1 меньше) равно $(n + 1)(n + 2) \ldots (n + c)/c! - 1$. А если c больше n […], то члены этой дроби могут быть сокращены на $(n + 1)(n + 2) \ldots (n + c)$ и, соответственно, полученная величина может быть более кратко записана как $(c + 1)(c + 2) \ldots (c + n)/n! - 1$ [= $C_{n+c}^{n} - 1$]. Отсюда следует **[182]**

Правило 5.2 для отыскания [числа] сочетаний [с повторениями] для всех классов, начиная с единицы

Пусть даны две возрастающие арифметические прогрессии, начинающиеся, одна – с числа, на единицу превышающего количество объединяемых вещей, другая – с единицы, с одной и той же разностью 1, причем членов каждой из них столько, сколько единиц в самом старшем классе сочетаний. (Но если этот класс превышает количество вещей, лучше начинать первую прогрессию с числа, на единицу превышающего его, а число членов каждой прогрессии принять равным числу данных вещей.) И пусть произведение членов первой прогрессии делится на произведение членов второй. Тогда частное будет равно искомому множеству [числу] сочетаний, если только включить в него нулион. Если же мы хотим исключить его, то искомым будет то же частное минус 1. Так, общее число всех единиц, двоек, троек и четверок вместе с нулионом из 10 вещей будет $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14/4! = 24\,024/24 = 1001$. Если вещей только 3, то это число равно $5 \cdot 6 \cdot 7/3! = 210/6 = 35$. Без нулиона числа сочетаний будут соответственно 1000 и 34.

Глава 6. Найти число сочетаний, если некоторые из объединяемых вещей одни и те же, но ни одна из них не может повториться в сочетании более часто, чем она встречается во всем количестве вещей

В предыдущей главе любая из данных различных вещей могла объединяться в сочетаниях сама с собой столько раз, сколько единиц в классе сочетаний. При этом могло быть выбрано сочетание любого класса, состоящее только из одной, часто повторяемой вещи. Другое дело если любая заданная вещь может быть объединена сама с собой ограниченное число раз. Например, *a, b, c, d* объединяются при условии, что ни в одном сочетании буква *a* не повторится более пяти раз и *b, c, d* –

более четырех, трех и двух раз соответственно. Ясно, что в этом случае ни одно сочетание более чем из пяти вещей не может состоять лишь из одной буквы.

Но не имеет значения, соединять ли эти 4 буквы на указанных условиях, или 14 букв, среди которых 5 букв *a*, 4 буквы *b*, 3 – *c* и 2 – *d*, но так, чтобы ни одна из них не встречалась в сочетаниях чаще, чем в полном наборе вещей. Иными словами, нам будто бы дано [взамен] алгебраическое количество *aaaaabbbbcccdd* или $a^5b^4c^3d^2$, для которого отыскиваются все делители, поскольку делители любого количества выражаются не иначе, как **[183]** стольким же числом сочетаний, сколько образуют его сомножители. Таким образом, учение этой главы можно специально приложить к определению числа сомножителей любого данного количества.

Ясно, во-первых, что для одной буквы *a* может быть выбрано столько выборок или делителей, сколько раз она повторяется среди вещей, т. е. столько, сколько размерности она привносит в их количество. И вдобавок если мы желаем включить в делители нулион в выборки или единицу в делители, то число выборок или делителей будет на единицу больше, а именно 1, a, aa, a^3, a^4, a^5.

Теперь, если добавить букву *b*, то наверняка она может быть взята с каждой из предыдущих шести выборок (делителей), так что появится то же число новых выборок: b, ab, aab, a^3b […]. Если прибавим еще одно *b*, то получим шесть новых выборок, – bb, abb, $aabb$, a^3bb и т. д. Добавляя третье и четвертое *b*, получим еще шесть и еще шесть других выборок. Таким образом, буква *b* привносит в шесть раз больше новых выборок по сравнению с тем числом раз, с которым она содержится в данном количестве вещей или в шесть раз больше той размерности, которую она привносит в данное количество. Итак, имеется четырежды шесть выборок, в которые *b* включено по построению, а если добавить первые шесть, в которых ее не было, их общее число окажется равным пяти шестеркам или 30.

Снова, если третья буква *c* берется с каждой из этих выборок или делителей, появится 30 новых выборок, а если к ним снова прибавить ту же букву, образуется 30 других и еще раз 30, если добавить *c* в третий раз. Таким образом, появится трижды 30 выборок, в каждой из которых участвует *c*. И снова, если добавить предыдущие 30, в которых ее не было, получим всего четырежды 30 или 120 выборок.

Наконец, если к каждой из этих выборок или делителей дважды добавить букву *d*, потому что ее размерность – 2, появится дважды 120 новых выборок, которые все содержат *d*. А всего вместе (включая также предыдущие 120 выборок, в которых не было *d*) окажется трижды 120 или 360 выборок. И каждый раз всего окажется столько же делителей предложенного количества $a^5b^4c^3d^2$, коль скоро, как всегда должно быть здесь принято, буквы *a, b, c* и *d* обозначают столько же простых чисел, отличных от 1 и друг от друга. Ясно, однако, что добавление каждой буквы умножает все предыдущие выборки или делители в число раз, равное ее размерности плюс 1. После восприятия всего этого станет понятным обоснование следующего правила.

Правило 6.1 для отыскания числа делителей любого данного количества или числа сочетаний нескольких частично одинаковых вещей

Увеличьте на единицу числа размерностей, которыми обладают отдельные различные буквы, составляющие предложенное количество и перемножьте числа, увеличенные таким образом, друг на друга. Произведение, связывающее их всех, будет числом всех делителей или сочетаний, которые допускают составляющие буквы. Если желательно исключить нулион из числа сочетаний или 1 из числа делителей, следует вычесть 1.

Например, в предложенном количестве $a^5b^4c^3d^2$ буквы a, b, c, d имеют размерности 5, 4, 3, 2. Если каждое из этих чисел увеличить на 1, они становятся равными 6, 5, 4, 3 и если **[184]** их перемножить друг на друга, они образуют 360 в качестве числа всех сочетаний включая нулион или число всех делителей включая 1.

Заметим, что если число различных букв, составляющих данное количество, равно n и все они обладают одной и той же размерностью p, то число сочетаний или делителей окажется в соответствии с Правилом 6.1 $(p + 1)^n$. И, более определенно, если $p = 1$, т. е. если отдельные буквы заданного количества имеют размерность, равную только единице, или если все данные объединяемые вещи различны, число делителей или сочетаний устанавливается равным 2^n, что возвращает нас к предположению главы 2. Соответственно, то решение можно сравнить с этим, так что их согласие очевидно.

Но тот, кто обратил хотя бы малейшее внимание на обсуждение [темы] этой главы, может также легко определить, если потребуется, в скольких выборках или делителях встречается любая данная вещь или буква. Если, например, спрашивается, в скольких делителях предложенного количества $a^5b^4c^3d^2$ встречается буква a, нужно будет лишь исследовать, сколько делителей, включая 1, допускает остаток количества – $b^4c^3d^2$. Если к этим делителям добавим одно a (ибо в них нет этой буквы), мы получим все делители, в которых a встречается с размерностью 1. Если добавить a дважды, трижды и т. д., мы получим все те делители, в которых эта буква имеет размерность 2, 3 и т. д. Отсюда мы заключаем, что любая буква встречается при заданной размерности в стольких делителях, сколько допускают остальные буквы все вместе.

И так как, следовательно, по предыдущему Правилу 6.1 количество $b^4c^3d^2$ имеет $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ делителей (включая 1), то всё количество $a^5b^4c^3d^2$ будет дополнительно включать столько делителей, в которых буква a встречается один раз и столько же, в которых она входит 2, 3 или более раза. Поэтому, раз a имеет размерность 5, будет пять раз 60 или 300 делителей, в каждом из которых a встретится с какой-то размерностью. И не более затруднительно найти число выборок или делителей, в которых встречается, например, две буквы, a с размерностью 2 и b с размерностью 3, ибо если к отдельным делителям остатка заданного количества, c^3d^2 (число которых, найденное в соответствии с Правилом 6.1, равно $4 \cdot 3 = 12$), добавить a^2b^3, то ясно, что появится столько же делителей, подчиняющихся желаемому условию, но не больше и так же в других случаях.

Может показаться более трудным найти число всех делителей, имеющих одну и ту же размерность, т. е. число сочетаний заданных классов по отдельности. Ибо при исследовании этого я применяю метод, аналогичный тому, который употребил в части 1 после Предложения 9 [в

Замечаниях к Предложению 9] для исследования числа бросков при игре в кости. Я выписываю по очереди все классы сочетаний или все размерности, возможные для предложенного количества, т. е. от 0 до 14 для $a^5b^4c^3d^2$. Под первыми из них я вначале помещаю шесть единиц, на одну больше размерности первой буквы, к которым присоединяю шесть других и снова шесть других и т. д. пока не получу на один ряд больше единиц, чем размерность второй буквы, но каждый ряд я сдвигаю на одно место вправо. Затем я складываю единицы, появившиеся в одной и той же колонке, и получаю числа 1, 2, 3, 4 и т. д. Из этих чисел я снова образую ряды, числом на единицу больше размерности третьей буквы и аналогично сдвигаю каждый из них на одно место вправо, а затем складываю числа в каждой колонке, получая числа 1, 3, 6, 10, 14 и т. д. Далее я снова выписываю эти новые числа в ряды числом на единицу больше размерности четвертой буквы, каждый раз сдвигая […] и продолжаю таким же образом, если есть и другие буквы. В таблице это выглядит так.

Таблица [185]

Первая колонка: количества или объединяемые вещи; остальные колонки: размерности или классы сочетаний

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
a^5	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
						1	1	1	1	1	1				
a^5b^4	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1					
		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
$a^5b^4c^3$	1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1		
		1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
$a^5b^4c^3d^2$	1	4	10	19	30	41	49	52	49	41	30	19	10	4	1

Затем, отдельные числа, полученные после последних сложений, обозначают число делителей или сочетаний в соответствии с размерностью или классом, указанным над каждой колонкой. Таким образом я нахожу в таблице, что предложенное количество имеет 1 делитель при нулевой размерности, 4 делителя при размерности 2 […] или 1 нулион, 4 единицы, 10 пар […]. Их общая сумма, как и должно было быть, равна 360. Тот, кто понял рассуждение, которое основывало аналогичную операцию для игральных костей, без труда воспримет и это.

Дальнейшие результаты, особенно относящиеся к делителям (хотя с другой точки зрения) могут быть изучены в пяти первых разделах различного содержания книги ван Схутена (van Schooten) и также в главах 3 и 4 Валлиса *Dissertatio de combinationibus*, приложенной к его *Tractatus de Algebra.* Кто желает, может справляться у этих авторов, мы же торопимся перейти к другим темам.

Глава 7. О сочетаниях и перестановках, рассматриваемых совместно

В сочетаниях, которые мы рассматривали до сих пор, порядок или следование не принималось во внимание и, например, буквы *a, b, c*, записанные в любом порядке, *abc, acd, bac* и т. д., понимались как одна-единственная тройка. Иногда, однако, изменения в порядке и расположении, как это происходит в случае слов и чисел, тоже учитывается вдобавок к разнообразию в типах объединяемых вещей. Так, слово или слог *ab* отличен от *ba*, а число 12 не совпадает с числом 21, хотя оба слога образованы одними и теми же буквами, а оба числа – одними и теми же цифрами, так что всё различие происходит от их неодинакового расположения.

[186] И нам остается в этой и в последующих главах рассмотреть совместно учение о сочетаниях и перестановках и исследовать как по-разному несколько различных вещей, возможно даже частично повторяющихся, могут быть соединены друг с другом в одном и том же классе или в нескольких классах, а затем переставлены. Вначале мы будем полагать, что ни одна из данных вещей не должна объединяться сама с собой, но затем допустим, что любая из них может быть повторена несколько раз в одном и том же сочетании.

7.1. Найти число выборок нескольких различных вещей, ни одна из которых не может объединяться сама с собой, в сочетаниях одного и того же класса

Эта задача может быть решена легко и быстро на основе предыдущего. Если имеется n объединяемых вещей и класс сочетаний c, то без учета расположений число сочетаний в соответствии с главой 4 равно C_n^c. И поскольку по предположению каждое из этих сочетаний состоит из c различных вещей, которые, как было указано в главе 1, могут быть перемещены $c!$ способами, то при учете порядка следования вещей в сочетаниях их число должно быть в точности во столько раз больше, чем если бы порядком пренебрегать. Соответственно, их число будет $C_n^c \cdot c! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots\ (n-c+1)$. И это приводит к следующему правилу.

Правило 7.1 для нахождения числа сочетаний данного класса [с учетом расположения вещей][31]

Найдем арифметическую прогрессию с разностью 1, которая начинается с числа объединяемых вещей и убывает, насчитывая столько членов, сколько единиц в классе сочетаний. Произведение всех этих членов будет искомым числом сочетаний. Например, всех четверок из 10 вещей с учетом всех их различных перемещений насчитывается $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Следствие 1. Если класс сочетаний равен числу объединяемых вещей, то это то же самое, как если бы отыскивалось просто число перестановок данных вещей, потому что, действительно, все они должны были бы каждый раз выбираться как было предположено в главе 1. Их число равнялось бы […] $n!$, что согласуется с Правилом 1.1. **[187]**

Следствие 2. Если выбираются все вещи, т. е. все они включаются в соединения класса, равного их количеству, то перемещений их порядка будет столько же, сколько их допускают сочетания тех же вещей на единицу низшего класса. Так, в соответствии с правилами этой главы и главы 1 число перестановок всех пяти вещей допускает в 5 раз больше перестановок, чем [сочетаний из пяти по 4]. А число перестановок всех четверок равно 5 ·4 ·3 ·2 […] и т. д.

Следствие 3. Общее число единиц и пар из любого количества вещей равно квадрату этого количества. Если дано *n* вещей, то по Правилу, число единиц равно *n*, а число пар – $n(n-1)$ […], так что их сумма равна […] *nn.* Так, 9 цифр от 1 до 9, взятых по одной или попарно в любом порядке, составят 9 раз по 9 или 81 различных числа и это действительно в точности столько, сколько мы находим от 1 до 100 и не больше, если вычесть те числа, которые начинаются с нуля или в которых одна и та же цифра появляется дважды.

Следствие 4. Количество сочетаний любого класса равно количеству перестановок точно стольких же вещей, если число совпадающих среди них равно числу единиц в дополнительном классе, остальные же вещи отличаются друг от друга. Так, из восьми вещей есть столько троек, сколько перестановок из стольких же вещей, если 5 из них совпадают: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 8!/5!$, т. е. по Правилу 1.2 равно числу перемещений.

7.2. Найти полное, т. е. для всех классов, число выборок из нескольких различных вещей, ни одна из которых не может быть объединена сама с собой

Если сложить количества сочетаний, найденное по предыдущему правилу для отдельных классов, будет получено их искомое полное число. Оно, однако, определяется несколько быстрее, если обратить внимание на немаловажное свойство, которое может быть выявлено по сравнению двух таких [искомых] чисел.

Во-первых, пусть объединяются 4 вещи. Предыдущее правило установило, что количество единиц равно четырем, двоек – $4 \cdot 3$, троек – $4 \cdot 3 \cdot 2$ и, наконец, четверок – $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Следовательно, число всех сочетаний равно [сумме этих чисел]. Далее, пусть объединяется 5 вещей. Аналогичным путем определяется, что число единиц, двоек, троек, четверок и пятерок, или число всех сочетаний равно

$5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

$5\,(1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$, т. е. число [всех] сочетаний из пяти вещей в 5 раз больше [чем полное] число [всех] сочетаний из четырех плюс 1. Таким образом мы узнаем, что количество сочетаний любого числа вещей на единицу превышает их количество из меньшего на единицу числа вещей, умноженное на [новое] число вещей, понимая при этом, что нулион не входит ни в одно из этих количеств.

И поскольку существует одна выборка из одной вещи, а сложив 1 и 1 и умножив сумму, т. е. 2, на 2, получим произведение 4, которое является количеством всех сочетаний двух вещей. **[188]** Снова, сложим 1 и 4 и умножим сумму 5 на 3, получим произведение 15, которое является количеством [всех] сочетаний трех вещей. Аналогично […] получим количество сочетаний четырех вещей. Увеличив полученное количество сочетаний на 1 и умножив на 5, получим все сочетания из пяти вещей и так до бесконечности, как это видно из следующей сводки.

[Полное] количество сочетаний для последовательно возрастающего числа вещей 1, 2, 3, ...

1, 4, 15, 64, 325, 1956, 13 699, 109 600, 986 409, 9 864 100 и т. д.

Исходя из подобных рассуждений, мы заключаем, что 9 цифр, взятых поодиночке, попарно, тройками и т. д. и, наконец, девятками, и расположенных в любом возможном порядке, могут привести к 986 409 вариациям и, соответственно, образовать столько же различных чисел, в которых ни одна цифра не встречается более одного раза[32].

Глава 8. Найти число выборок (сочетаний) данного класса из нескольких различных вещей, если любая из них может быть объединена сама с собой[33]

В предыдущей главе отыскивалось число сочетаний, в которых ничто не могло встречаться более одного раза. Теперь мы предполагаем, что любая вещь может быть объединена сама с собой и повторена дважды, трижды или более часто в одном и том же сочетании. И, как и раньше, мы также определим при этом условии число сочетаний, если к тому же примем во внимание различие в расположениях.

Пусть дано любое число m вещей или букв a, b, c, d и т. д. Ясно, что число единиц, образованных из них, будет таким же, т. е. m. Предварив их по очереди первой буквой a, получим aa, ab, ac, ad и т. д. Это даст пары, которые все начинаются с a и число которых должно равняться числу вещей m. Далее, предварив их по очереди второй [буквой] b, получим ba, bb, bc, bd и т. д., – всё это пары, начинающиеся с b. И, соответственно, их число аналогичным образом равно m.

Таким же образом присоединяется третья вещь c и четвертая d и другие вещи, если их больше, по одному разу к данным вещам, взятым поодиночке; образуются новые пары и некоторые из них начинаются с буквы c или с d, или с одной из остальных вещей. Число этих пар, которые начинаются с одной и той же буквы, всегда равно m. После этого становится ясно, что вообще все пары уже найдены и что они переставлены всеми возможными способами. Соответственно, их число будет во столько раз больше числа вещей, во сколько вещей имеется. Поскольку имеется m вещей, число пар будет mm.

Если снова продолжить предварять эти пары по очереди заданными вещами, будут образованы все тройки $aaa, aab, aac, aad, aba, abb$ и т. д., притом начинающихся с одной и той же буквы окажется всегда столько же, сколько пар было найдено. Соответственно, число всех троек превысит число двоек во столько раз, во сколько имеется вещей, так что их будет m^3. **[189]** Аналогично, если представить себе, что одиночные буквы приставлены к началу каждой тройки, будут выявлены все возможные четверки, число которых, следовательно, снова превысит число троек в m раз и будет равно m^4.

И таким образом оказывается, что число сочетаний любого класса должно всегда быть превышено в m раз числом сочетаний следующего старшего класса. Так, поскольку число четверок m^4, число пятерок будет m^5, шестерок – m^6 и вообще для класса n число сочетаний будет равно m^n. Отсюда легко выводится

Правило 8.1 для нахождения числа сочетаний для данного класса с перестановками любого рода, если любая вещь может быть также объединена сама с собой

Данное число вещей возводится в степень, равную классу сочетаний и результат есть искомое число. Например, все четверки из девяти цифр, расположенные всеми возможными способами, образуют 9^4 = […] 6561 вариаций. Таким образом, необходимо, чтобы столько различных чисел находилось между 1000 и 10 000 (между границами для чисел, записанных четырьмя цифрами), исключая те, которые включают один или более нулей. И также 4 гласные, *a, e, i, o*[34], в соответствии с которыми логика проводит четырехкратное различие предложений по количеству и качеству, допускает 4^3 троек = 64. Из них вытекает столько же верных или ошибочных модусов категоричных силлогизмов, а не только 36, как утверждают Аристотель и его толкователи. Если отделить неопределенные и особые предложения от всеобщих и частных, между ними возникнет восьмикратное различие и число модусов возрастет до 512, т. е. до куба восьми.

8.3. Найти число сочетаний этого вида, соответствующих нескольким классам

Из только что сказанного ясно, что число единиц в m заданных вещах равно m, число пар, троек […] и т. д. равно mm, m^3 […] и т. д. и что поэтому установлено, что число сочетаний нескольких классов, взятых по естественному порядку от 1 до n будет $m + mm + [\ldots] + m^n$, т. е. будет равно сумме геометрической прогрессии с отношением предыдущего члена к последующему, равным $1{:}m$, первым членом m и последним – m^n. И, в соответствии с общеизвестным методом, эта сумма более кратко и притом в едином количестве выразится как $(m^n - 1)m/(m - 1)$, так что [если указать подходящую пропорцию, то] $(m - 1)$ так относится к m, как $(m^n - 1)$ к искомому числу. Отсюда вытекает следующее **[190]**

Правило 8.2 для нахождения числа сочетаний нескольких классов, старший из которых задан

Пусть число заданных вещей без единицы относится к всему их числу как всё число в степени, равной самому старшему классу, из которого вычтена единица, к некоторому четвертому числу. Тогда это последнее будет желаемым числом сочетаний. Например, чтобы исследовать сколькими возможными способами 10 цифр могут быть перемещены друг относительно друга, если они берутся вначале поодиночке, затем парами, тройками […] и шестерками, можно либо сложить первые 6 членов геометрической прогрессии 10, 100, 1000 и т. д., либо, если это проделать легче, [воспользоваться тем, что] 9 (число цифр без единицы) относится к 10 (к полному числу цифр) как 999 999 (шестая степень или квадрат куба десяти минус единица) к искомому числу. По каждому способу желательное число расположений оказывается равным 1 111 110.

Следует, однако, заметить, что не все эти расположения однозначно определяют числа, ибо числа, которые начинаются с одного или нескольких нулей, не отличаются от составленных лишь оставшимися цифрами, если начальные нули не принимаются во внимание. И, чтобы отделить полезные числа от избыточных, следует учесть, что из 10 единичных цифр только одна, а именно 0, не приносит пользы. Из чисел, состоящих из двух цифр, 10 излишних, поскольку 0 может быть присоединен к каждой из 10 цифр. Из трехзначных чисел, 100 лишних, потому что либо 0 записан трижды, либо он дважды присоединен к началу каждого из первых девяти чисел, либо один раз к каждому из чисел между 9 и 100. Из чисел, выраженных четырьмя цифрами, 1000 излишних, потому что к каждому числу, записанному меньшим количеством цифр, и таких (если включить 0), понятное дело, 1000, может быть присоединен какой-нибудь из нулей, чтобы тем самым дополнить это число до четырехзначного.

По аналогичному рассуждению, из пятизначных чисел должно быть исключено 10 000, и 100 000 из шестизначных. Так, если из числа

1 111 110 = 10 + 100 + 1000 + 10 000 + 100 000 + 1 000 000

или из суммы шести членов прогрессии со знаменателем 10, начинающейся с 10, вычесть 111 111 = 1 + 10 + […], т. е. сумму стольких же членов той же самой прогрессии, начинающейся с 1 (что может быть сделано просто вычитанием первого члена этой прогрессии из последнего члена предыдущей, поскольку все остальные члены взаимно уничтожаются), разность 999 999 укажет число всех различных расположений, которые приписаны 10 цифрам, взятым в каждом случае не более шести раз, и выражающее собой столько же различных чисел. Соответственно, наверняка совершенно очевидно, что, считая от 1 до 1 000 000, т. е. до первого и наименьшего из семизначных чисел, найдется в точности 999 999 различных чисел, а за числом 999 999, последним и наибольшим из шестизначных, немедленно следует 1 000 000, которое отличается от него лишь на 1.

Аналогично, можно определить все сочетания с перестановками 24 букв алфавита[35]. Пусть 23 относится к 24 как 24-я степень 24 (без вычитания единицы, что при столь большом числе не является необходимым) к искомому числу. При помощи логарифмов быстро устанавливается, что оно состоит из 34 цифр и [стало быть] превышает 1391 миллионов в пятой степени. Именно, столь велико число всех полезных и бесполезных слов, которые могут быть образованы из 24 букв алфавита при любом их расположении, по крайней мере если понимать, что ни одно из них не содержит более 24 букв.

[191] Здесь уместно отметить своеобразную аналогию между подобными сочетаниями и степенями многочленов. Чтобы найти все пары букв *a, b, c, d* следует все буквы предварить одной из них по очереди, а чтобы найти все тройки – снова так же предварить все пары и т. д., как мы сказали в начале этой главы. Поскольку то же самое делается, когда буквенное выражение ($a + b + c + d$) возводится в квадрат, в куб и т. д., то те же буквы, если считать их одночленами некоторого многочлена, выражают своими парами все составляющие его квадрата, своими тройками – все составляющие его куба […] и т. д., так что составные части любой степени не выражаются никак иначе, чем множеством сочетаний класса, равного показателю степени из этих одночленов.

Но различие здесь в том, что все компоненты, которые составлены из тех же самых и лишь расположенных различными способами букв, обозначают одно и то же количество и для краткости они обычно сводятся вместе в единый член, предваряемый их числом, который обычно называется коэффициентом члена. Нетрудно поэтому распознать, что коэффициент любого члена выражает число перестановок составляющих его букв. Действительно, при любом показателе степени число членов равно числу сочетаний класса, равного этому показателю, и составленных из одночленов многочлена без учета их расположения. Число таких сочетаний было найдено в главе 5.

Учет сказанного будет иногда иметь существенное значение, поскольку с его помощью может быть быстро найдено и число членов, и коэффициент любого из них при любом показателе степени [многочлена]. Так, например, по Правилу 5.1 10-я степень трехчлена $(a + b + c)$ состоит из 11 ·12/2! = 66 членов, из которых a^5b^3cc, по Правилу 1.2 будет иметь коэффициент 10!/5!3!2! = 2520. Аналогично, куб четырехчлена $(a + b + c + d)$ будет состоять из 4 ·5 ·6/3! = 20 членов, а коэффициенты его членов *aab* и *abc* равны 3 и 6 соответственно.

Глава 9. Найти число выборок из нескольких частично повторяющихся вещей, ни одна из которых не должна включаться в выборку более часто, чем она содержится в их общем количестве

Таковы были предположения главы 6, но только там все различные расположения в сочетании считались одними и теми же, теперь же они представляют собой столько же различных выборок. По поводу таким образом сформулированной задачи я нахожу, что [предшествовавшие] авторы ничего определенного не установили и я исследую ее следующим образом.

Пусть, например, буквы *a, b, c* сочетаются и переставляются всеми способами при условии, что *a* не должно встречаться ни в одном сочетании более четырех раз, *b* – более трех раз, и *c* **[192]** – более двух. Иными словами, пусть всеми способами сочетается и переставляется выражение $aaaabbbcc = a^4 b^3c^2$, в котором совпадают 4 буквы, 3 других буквы, и, снова, 3 других. И пусть определено число этих сочетаний и для одного-единственного класса, и для всех классов совместно. Выше было установлено, что всех сочетаний, которые состоят только из a^4, включая нулион, который мы обозначим цифрой 1, пять: 1, *a*, *aa*, a^3, a^4. Пусть к каждому из них присоединяется буква *b*, – сначала один раз, потом дважды и трижды, так что, точно как это произошло в главе 6, образуются новые выборки

b, ab, aab, a^3b, a^4b, и также *bb, abb, aabb*,
a^3bb, a^4bb, и b^3, ab^3, aab^3, a^3b^3, a^4b^3.

Но те выборки, в которые *b* включается один раз, по Правилу 1.2 допускают 1, 2, 3, 4 и 5 перестановок. Первая [выборка] – единственная перестановка *b*; вторая – две перестановки *ab* и *ba*; третья – три перестановки *aab, aba, baa* и т. д. Те же [выборки,] в которые *b* входит дважды, допускают в соответствии с треугольными числами, по порядку, 1, 3, 6, 10 и 15 перестановок. Первая из них – *bb*; вторые три – *abb, bab, bba*; третьи шесть – *aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa* и т. д. Выборки, в которые *b* входит трижды, переместимы по порядку 1, 4, 10, 20 и 25 раз в соответствии с пирамидальными числами.

Тем же путем, выборки, в которые *b* входит возможно еще чаще, переставляемы в соответствии с постепенно все более и более старшими до бесконечности видами фигурных чисел. После этого третья буква *c* присоединяется один раз, потом дважды к каждой перестановке предшествующих выборок:

1; *a, b*; *aa, ab, ba, bb*; a^3, *aab, aba, baa, abb, bab, bba*, b^3 и т. д., так что появляются новые выборки

c; *ac, bc*; *aac, abc, bac, bbc;* a^3c и т. д.,
cc; *acc, bcc*; *aacc, abcc, bacc, bbcc*; a^3cc и т. д.

В первых из них, с одной только буквой *c*, эта буква переместима 1, 2, 3, 4 и т. д. раз в соответствии с натуральными числами, тогда как расположение остальных букв не меняется: одно *c* само по себе имеет 1 перестановку, каждая пара *ac, bc*, – 2 перестановки, каждая тройка *aac, abc, bac, bbc*, – 3 перестановки и т. д. Но вторая группа перестановок, содержащая букву *c* дважды, в соответствии с треугольными числами допускает по порядку 1, 3, 6, 10 и т. д. перестановок, ибо пара *cc* имеет 1 перестановку, тройки *acc* и *bcc* – по 3 перестановки, четверки […] – по 6 перестановок и т. д.

Я говорю, что расположение трех остальных букв кроме *c* [при этом] не изменяется, ибо иначе, например, *abcc* допускало бы не 6, а 12 перестановок, половина которых, однако, оказалась бы излишней, ибо их надо приписать следующей четверке *bacc*. Если теперь добавить четвертую букву, пришлось бы аналогично присоединять ее ко всем предыдущим перестановкам со всеми ее [возможными] размерностями для образования новых выборок, они же будут снова переставляться в соответствии с боковыми, треугольными или пирамидальными и т. д. числами в зависимости от присоединения добавляемой буквы 1, 2 или 3 раза. Таким образом, ни одно из желаемых сочетаний не ускользнет от нас и не будет сосчитано дважды.

Из сказанного действительно нетрудно понять обоснование построения следующей таблицы. По ней я легко определяю число таких сочетаний и для данного класса, и для всех из них. Я выписываю по порядку все классы сочетаний от 0 до 9, которым могут подвергаться предложенные вещи $a^4b^3c^2$. Под этими классами я вначале располагаю единицы в количестве на одну больше чем размерность первой буквы, а именно 5 единиц. К ним я сразу же присоединяю 5 боковых чисел 1, 2, 3, 4, 5, а к ним – столько же треугольных и пирамидальных чисел, – 1, 3, 6, 10, 15 и 1, 4, 10, 20, 35 [и поступаю так] до тех пор, пока, не считая ряда единиц, не получу число рядов, равное размерности буквы *b*, причем каждый раз, как и в главе 6, я сдвигаю строку [на одно место] вправо.

Затем я складываю члены, оказавшиеся в одной и той же колонке, и получаю числа 1, 2, 4, 8, 15 и т. д. Их я сразу же умножаю соответственно на то же количество боковых и треугольных чисел 1, 2, 3, 4 и т. д. и 1, 3, 6, 10 и т. д., так что кроме ряда 1, 2, 4, 8 и т. д. появляются **[193]** другие числовые ряды 1, 4, 12, 32 и т. д. и 1, 6, 24, 80 и т. д. по числу размерности третьей буквы *c*. Эти [новые] ряды я снова сдвигаю каждый раз [на одно место] вправо и складываю члены, оказавшиеся в одной и той же колонке – и продолжал бы и дальше, будь букв больше. Таким образом, наконец, после последнего сложения появятся числа, которые указывают число сочетаний каждого класса. И, если, далее, сложить их все, мы получим полное число сочетаний.

Таблица

В первой колонке указаны объединяемые вещи, в остальных колонках – классы сочетаний

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^4										
	1	1	1	1	1					
		1	2	3	4	5				
			1	3	6	10	15			
				1	4	10	20	35		
a^4b^3	1	2	4	8	15	25	35	35		
		1	4	12	32	75	150	245	280	
			1	6	24	80	225	525	980	1260
$a^4b^3c^2$	1	3	9	26	71	180	410	805	1260	1260

Из этой таблицы мы узнаем, что предложенные вещи $a^4b^3c^2$ содержат 1 нулион, 3 единицы, 9 пар, 26 троек и т. д. и, наконец, 1260 девяток и что всего всех сочетаний 4025. Следующая таблица[36] придает полную уверенность в этом методе. В ней, во-первых, [в колонке 1] видны все 60 выборок данных вещей в соответствии с предпосылками главы 6, а справа [в двух следующих колонках] – число перестановок каждого сочетания по Правилу 1.2 и суммы этих чисел[36].

1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
0	1	1	a^3	1	
a	1		*aab*	3	
b	1	3	*aac*	3	
c	1		*abb*	3	
aa	1		*abc*	6	26
ab	2		*acc*	3	
ac	2	9	b^3	1	
bb	1		*bbc*	3	
bc	2		*bcc*	3	
cc	1				

[194] Мы заключаем, что из трех различных цифр (не считая нулиона, в котором нет ни одной из них) может быть составлено 4024 различных чисел, ни в одном из которых одна из цифр не повторяется более четырех раз, другая – более трех раз и третья – более двух раз. И все цифры вместе взятые и повторенные столько раз, сколько возможно, т. е. в сочетаниях наивысшего класса, непременно составляют столько же чисел, сколько те же цифры в сочетаниях смежного низшего класса. Этот результат достоин называться теоремой[37].

Вот что мы взялись сообщить о *комбинаторном искусстве* в данном сочинении. В этих последних главах [5 – 9], в которых принимались во внимание и сочетания, и расположения, и допускалось, что одна и та же вещь включалась в ту же самую выборку более одного раза, можно было бы также разрешить различные вопросы и исследовать в скольких сочетаниях одна или более вещей встречаются совместно или по отдельности, как это было сделано в главе 4. Или мы могли бы спросить, в скольких сочетаниях некоторая предположенная вещь входит 1, 2, 3 или 4 раза, либо ни одна из таких вещей не включена более чем 1, 2, 3 или более раза. Или в [скольких] сочетаниях некоторая предположенная вещь либо занимает первое, второе, третье и т. д. место, либо встречается при других обстоятельствах.

Подобные вопросы можно умножать бесконечно, и мы предпочитаем сохранить за собой право применить и прояснить те, которые окажутся полезными для нас в последующем, в остающихся частях сочинения, а не опускаться здесь до частностей и брать на себя невыполнимую задачу. Соответственно, мы устанавливаем здесь границу части 2 и непосредственно переходим к другим темам нашего начинания, в которых мы ясно покажем при помощи многих задач различного вида широту применения этого Учения о Сочетаниях в Искусстве предположений.

Примечания переводчика

1. Бернулли упоминает этих ученых в своем основном тексте; здесь и всюду ниже см. также нашу Библиографию. Сам Бернулли обратился к комбинаторике еще раньше (1692). Многие комментаторы заметили, что Бернулли не был знаком с трактатом Паскаля об арифметическом треугольнике (Pascal 1665; Эдвардс). Эдвардс также описал историю фигурных чисел и вообще комбинаторики, включая данное сочинение Бернулли 1713 г.

2. Фактически же Бернулли разбил эту часть не на три раздела, а на девять глав.

3. В ней автор выписал значения $n!$ при $n = 1(1)12$ для соответствующего количества вещей.

4. Протей – древнегреческое божество, способное менять свой облик.

5. Хаусснер (с. 151) посчитал это не двустишием, а двумя гекзаметрами.

6. О Баухузии см. Предисловие Николая Бернулли (и прим. 7 к нему).

7. Иначе: достоинств гораздо больше, чем звезд. Число 1022: это их количество в каталоге Птолемея, на самом же деле мы видим простым глазом около шести тысяч звезд.

8. Эдвардс (с. 169) заметил, что Валлис все-таки указал это число уже в 1685 г.

9. Далее в оригинале все же приводятся эти анаграммы, составленные автором. Он, однако, не предназначал их к публикации и в текст они попали по недоразумению, что, собственно, отметил уже Николай Бернулли в своем Предисловии.

10. Вслед за Лейбницем (Leibniz 1666, p. 14) автор пользовался термином *экспонента* и ввел, упоминаемые Бернулли, но также не вошедшие в обиход термины (там же, с. 15) *complexiones, conternationes* (*con3nationes*), *conquaterniones* (*con4nationes*) как бы в качестве дополнений к *combinationes* (*com2nationes*), которые, однако, ввел еще Мерсенн (Mersenne 1637), см. Эдвардс, с. 169.

11. Семь светил, блуждающих среди звезд: Солнце, 5 планет и Луна; Земля в этом смысле не считалась планетой, а Уран и более далекие планеты не были еще известны.

12. Бернулли употребляет этот термин (lateralium) неоднократно.

13. Таблица сочетаний или фигурных чисел, которую мы опустили. См. ниже Свойство 9. Вместо несуществующих сочетаний (например, в 8-й строке начиная с 9-й колонки) в таблицу вписаны нули. В главе 5, при пояснении Правила 5.1, Бернулли рассматривает пирамидальные числа, и мы заметим, что они образуются по закону $n(n + 1)(n + 2)/6$.

14. Не совсем так: суммы членов колонок вплоть до строки 8, – 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, – почти совпадают с соответствующими членами девятой строки.

15. В качестве примера Бернулли выписывает суммы первых пяти членов первых пяти колонок, которые оказываются равными 5, 10, 10, 5, 1, т. е. совпадают с соответствующими членами шестой строки начиная с ее второго члена.

16. Бернулли выписывает суммы первых пяти строк, – 1, 2, 4, 8, 16, – и суммы этих сумм, – 1, 3, 7, 15, 31, – которые при увеличении на единицу представят собой геометрическую прогрессию 2, 4, 8, 16, 32.

17. Паскаль (Pascal 1665, pp. 290 – 291) опередил Бернулли, притом доказав это следствие по методу математической индукции (к которому мы вернемся в следующем примечании).

18. Эта лемма и Лемма 4 доказаны по методу математической индукции, который Якоб Бернулли применил еще в 1686 г. (Cantor 1898, p. 341). Впрочем, еще за несколько столетий до Паскаля (см. предыдущее примечание) его применил Леви бен Гершон (Rabinovitch 1870).

19. Хаусснер (с. 153 – 154) доказал это предложение заново.

20. См., однако, предыдущее примечание.

21. Эдвардс (с. 128 – 129), который подчеркнул заслуги Паскаля (и описал результаты более ранних ученых), особо отметил, что Бернулли указал на связь сумм степеней натуральных чисел с фигурными числами и тем самым существенно облегчил вычисления.

22. Эдвардс (с. 128) заметил, что последний член строки $\sum n^8$ должен иметь коэффициент – 3/20.

23. Коэффициенты *A, B, C, D* и т. д. , взятые по абсолютной величине, называются числами Бернулли и играют важную роль во многих разделах анализа.

24. В приложенном примере Бернулли соответственно получил число сочетаний в виде произведения 13 сомножителей и вычислил его.

25. Силла (с. 219) предположила, что упомянутый Canon это Vlack (1633), что по крайней мере возможно: в этом источнике число 5 359 833 с нулями действительно соответствует линейной интерполяции соответствующих логарифмов (табличные антилогарифмы: 5359 и 5360). Заметим, что в более поздних семизначных таблицах, например, в общеизвестной таблице логарифмов Вега) антилогарифмы (иначе говоря, исходные числа) даны с пятью, а не с четырьмя знаками; в данном случае, 53 598 и 53 599).

26. Не применяя современных обозначений, Бернулли выписывает все равенства типа $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$ для $m = 10$ и $1 < n < 10$, равно как и равенства $C_{10}^{10} = C_9^9$ и $C_{10}^0 = C_9^0$.

27. Его переписку с Паскалем см. также Fermat(1894, pp. 288 – 314). О своих затруднениях Паскаль сообщил в письме 24 августа 1654 г., см. Pascal (1654, p. 156); Шейнин (2006, с. 16).

28. Строки $n = 1 – 4$ повторяют соответствующие строки указанной выше таблицы.

29. Письмо 29 июля 1654 г.; Pascal (1654), Шейнин (2006, с. 12).

30. Доказаны Хаусснером (с. 157 – 158).

31. Перестановки из *n* элементов по *c*.

32. Среди этих цифр мог находиться и нуль (и тогда некоторые числа оказались бы восьмизначными), однако по контексту видимо следует, что этот случай исключен.

33. Это заглавие Бернулли предварил цифрой 3 (в наших обозначениях это означало бы 7.3) и тем самым показал связь этой главы с предыдущей.

34. Общеутвердительное, *a*, общеотрицательное, *e*, частноутвердительное, *i*, частноотрицательное, *o,* высказывания.

35. Бернулли, конечно же, имел в виду латинский язык. По поводу количества букв в его алфавите мы можем сослаться на М. А. Журинскую (Латинский алфавит. БСЭ, 3-е изд., т. 14, 1973, столбец 625): "Регулярное употребление букв *j* […], *u* и *w* относится только к эпохе Возрождения". Если и на рубеже XVII – XVIII вв. эти буквы всё же мало употреблялись, то оставалось только 23 буквы (а не 24). Но вот *Латинско-русский словарь* И. Х. Дворецкого и Д. Н. Королькова (М., 1949) не содержит только буквы W (остается 25), однако с буквы K там начинаются только три слова типа Kalendae = Calendae.

36. Бернулли продолжает эту таблицу, указывая выборки размерностей 4 – 9 с числом перестановок, соответственно, 71, 180, 410, 805, 1260 и 1260; всего перестановок 4025.

37. Доказана Хаусснером (с. 158 – 160).

[195] Часть третья
Разъясняющая приложение предшествующего учения к различным способам жеребьевки и в азартных играх

[Предисловие автора]

Закончив в предыдущей части этого сочинения [описание] учения о перестановках и сочетаниях, в этой части я должен разъяснить его полнейшее применение для определения ожиданий игроков при различных способах жеребьевки и в азартных играх. Общая основа этого исследования состоит в том, чтобы полагать в них все сочетания и перестановки, которые допускаются содержанием темы, столькими же равновозможными случаями и усердно учитывать, сколько из них благоприятны тому или иному игроку или противодействуют ему. После этого всё остальное решается по [методам] учения, описанного в части 1.

Однако, поскольку конкретное применение этой основы нередко требует большого труда и может быть лучше усвоено на примерах, а не на правилах, мы не хотели бы задерживать читателя более подробными предисловиями и обращаемся без промедления к решению следующих предложенных мной задач, которые я выбирал почти случайно, просто как они мне попадались, и которые либо предваряются некоторыми более легкими задачами, не требующими применения сочетаний, либо перемежаются с ними.

Задача 1. Некто, имеющий два камешка, белый и черный, предлагает награду трем лицам, *A, B* и *C*, при условии, что ее получит тот, кто вытянет белый камешек, и что если это никому не удастся, то она никому и не достанется. Первым извлекает камешек *A* и [при неудаче] возвращает его в урну, вторым – *B* и третьим – *C*. Каковы их жребии?

Ясно, что эта задача является лишь частным случаем более общей, решенной в [Замечаниях к] Предложению 11 части 1. Там мы исследовали жребии нескольких игроков, которые попытались что-то выиграть, имея по очереди равные или неравные количества попыток [бросков игральных костей]. Мы там выразили жребий каждого общей формулой $(a^{n}c^{s} - c^{n+s})/a^{n+s}$. В нынешнем примере буква a (число всех случаев) обозначает 2, потому что камешков всего 2, c (число случаев, при которых условия [для получения награды] не выполнены) – 1, потому что черный камешек только один. Также и $n = 1$, ибо каждому игроку положена одна попытка, но s (число всех предшествовавших извлечений) обозначает 0 для первого игрока, *A*, 1 – для второго, *B*, и 2 – для *C*. Следовательно, подставляя эти значения вместо букв, мы найдем жребии игроков: первого игрока, *A*, – 1/2, второго, *B*, – 1/4, третьего, *C*, – 1/8, так что для того, кто предлагает награду, остается еще ее 1/8 часть.

Задача 2. При сохранении прочих условий, указанных в предыдущей задаче, каковы будут жребии игроков, если предпринявший эту азартную игру, желая лишить себя всех прав на награду, предлагает им в случае их общей неудачи разделить ее между собой?

[196] Поскольку теперь вся награда достается трем остальным, ясно, что ожидание каждого из них повысилось на 1/24, т. е. на треть той величины, которая по прежнему предположению доставалась предпринимателю. Поэтому, добавляя 1/24 по отдельности к 1/2, 1/4 и

1/8, найдем, что ожидания игроков стали равны 13/24, 7/24 и 4/24 соответственно.

Задача 3. Шесть игроков *A, B, C, D, E, F,* взялись участвовать в азартной игре, предприниматель которой больше расположен к последним из них, чем к первым. Первые два, *A* и *B*, начинают игру отдельно от остальных. Победитель играет с третьим, *C*, а тот, кто превзойдет – с *D* и так далее до последнего игрока *F* и награду получит победитель последней игры.

Предположим, что каждая пара [игроков] состязается при равных жребиях, т. е. что никто из игроков не обладает более высоким ожиданием выигрыша [партии], чем кто-либо другой. Каковы их жребии? Первый игрок *A* не может надеяться получить награду, если только не окажется победителем всех остальных пяти, т. е. если он не выиграет 5 раз сряду, и таково же положение второго игрока *B*. Но и третий игрок *C* не унесет пальму первенства, если не преодолеет одного или другого из своих предшественников, *A* и *B*, а также всех трех последующих игроков, т. е. если он не выиграет 4 раза подряд. И четвертый игрок *D* не победит, если не выиграет у одного из своих трех предшествующих и обоих последующих игроков, т. е. если он не выиграет 3 раза подряд и аналогичное [имеет место] для остальных.

Ясно, стало быть, что эта задача является частным случаем той, в которой отыскиваются ожидания игроков, взявшихся достичь чего-то определенное число раз при некотором числе попыток. Я решил эту общую задачу в [Замечаниях к] Предложению 12 части 1 и составил таблицу, в соответствии с которой жребии первого и второго игроков равны b^5/a^5, третьего – b^4/a^4, […] и шестого – b/a. Другими словами, поскольку отношение *a* к *b* вдвое больше отношения равенства [$a = 2b$], ибо в каждой партии равное число шансов выиграть и проиграть, жребий первого или второго игрока равен 1/32, третьего – 1/16, […] и шестого – 1/2. Понятно поэтому, что кроме первых двух игроков, обладающих равными ожиданиями, каждый из остальных получает жребий вдвое выше своего непосредственного предшественника, а ожидания всех игроков вместе исчерпывают всю награду.

Задача 4. Полагая остальные обстоятельства прежними, вообразим, что ни в одной игре шансы [противников] не равны друг другу, но что каждый игрок при состязании со следующим после себя имеет вдвое больше шансов выиграть чем проиграть, при состязании с третьим – вчетверо больше, с четвертым – в 8 раз больше и т. д., кроме лишь первых двух, которые, как мы полагаем, играют на равных. Спрашивается, не приобретают ли в этом случае все 6 игроков равные права на предложенную награду, поскольку вдвое низшие ожидания предыдущего предположения [предыдущей задачи возможно] возмещаются двойным отношением [удваиванием] шансов.

Здесь, ввиду различия шансов, которое господствует во всех играх, вычисления несколько труднее. Примем во внимание правило в конце [Замечаний к] Предложению 12 части 1 и формулу, которую оно предлагает (*beh …/adg …*), где буквы *b, e, h* и т. д. означают шансы выигрыша, а *a, d, g* и т. д. – количества всех шансов в последовательных играх. Эта формула выражает ожидание любого игрока, который взялся выиграть некоторое число раз подряд, притом количества случаев, при которых это может случиться, не остаются одними и теми же в различных партиях, как это имело место в предыдущей задаче.

Ясно, однако, что эта величина (*beh …/adg …*) = *b/a* ·*e/d* ·*h/g* … **[197]** Другими словами, общее ожидание или надежда выиграть все партии образуется умножением частных жребиев выиграть отдельные партии, ср. Следствие 1 [к Замечаниям] Предложения 3 части 1. По этой причине, чтобы наша задача могла быть решена методически, надо в соответствии с этой формулой последовательно определить жребий первого игрока *A*, если, первое, он берется победить одного противника, *B*; если двоих, – *B* и *C*; и, далее, – если троих, четырех и, наконец, победить всех пять остающихся игроков. Всё это является предварительно необходимым для исследования жребиев остальных.

Жребий этого игрока, если он берется лишь победить *B*, равен 1/2; если он состязается, чтобы победить двоих, *B* и *C*, его ожидание равно 1/2 ·2/3 = 1/3. Чтобы победить троих, *B, C* и *D*, – 1 ·2 ·4/(2 ·3 ·5) = 4/15 и т. д., что очевидно по приложенной [здесь] схеме[1]. Таков же оказывается результат, как следует понимать, для второго игрока, *B*. Что касается игрока *C*, ему приходится играть с тем или другим из предшествующих (которого мы обозначили буквой *P*). Кто бы он ни был, ожидание победы над ним у *C* равно 1/3. Если вдобавок *C* берется выиграть у следующего игрока, *D*, [его ожидание] будет 1 ·2/(3 ·3) = 2/9, а если и у *E*, то 1 ·2 ·4/(3 ·3 ·5) = 8/45. Аналогично, четвертый игрок *D* будет состязаться с одним из предшествующих, *P*. Если ему придется играть с *C*, у него будет [ожидание] победы над ним 1/3, а если с *A* или *B* – 1/5.

Но одинаково легко может оказаться, что ему придется состязаться с *A* или *B* или с *C*, потому что все трое имеют одно и то же ожидание выигрышей вплоть до **[198]** того, как очередь состязаться дойдет до четвертого, *D*. Действительно, как ясно из схемы, ожидание каждого из них равно 1/3. По этой причине, в соответствии с Предложением 3 части 1, [ожидание] для победы над тем из трех предшествующих игроков, которого может ему противопоставить случай, равно [1 ·(1/3) + 2 ·(1/5)]/3 = 11/45. Поэтому следует считать, что если он кроме того пытается победить пятого игрока, *E*, его [ожидание] равно 11 ·2/(45 ·3) = 22/135 и т. д.

Жребии пятого игрока, *E*, и шестого, *F*, могут быть исследованы так же само, но только оказывается, что их шансы состязаться с любым из предшествующих игроков не равны друг другу. Например, в соответствии со схемой *A* имеет 4/15, чтобы подряд победить *B, C* и *D*, но третий игрок, *C*, – 2/9, чтобы победить *P* и *D*, а четвертый игрок, *D*, – 11/45, чтобы победить *P*, т. е., если привести к общему знаменателю, *A* и *B* имеют 12/45, *C* – 10/45 и *D* – 11/45, чтобы побеждать подряд вплоть до того, как дойдет очередь до пятого игрока, *E*. Поэтому у игрока *E* будет 12 шансов играть с первым игроком *A*, столько же, чтобы играть со вторым игроком, *B*, 10 шансов, при которых *E* придется состязаться с третьим игроком, *C*, и 11 – для состязания с четвертым, *D*. И по Предложению 3 части 1 у него будет ожидание
[24 ·(1/9) + 10 ·(1/5) + 11 ·(1/3)]/45 = 5/27 для победы над тем неопределенным игроком, которого случай предоставит ему из числа его предшественников.

И далее, если все вычисления верны, обнаружится, что окончательные ожидания игроков, или их надежды выполнить все условия состязания и завладеть наградой, выражаются последними дробями схемы [...]. Если привести их к общему знаменателю, 34 425, они окажутся крайне различными и относящимися друг к другу как 7680, 7680, 5440, 4488, 4250 и 4887. Поскольку их сумма исчерпывает одно целое, они тем самым подтверждают верность метода и [безошибочность] вычислений.

Задача 5. *A* держит пари против *B* на то, что из колоды в 40 карт, по 10 каждой масти, он вытянет 4 карты, по одной каждой масти. Каково отношение их жребиев?

Мы уже указали решение этой, третьей [дополнительной] задачи Гюйгенса, в [нашем] Приложении к части 1. Теперь мы покажем, как то же самое может быть достигнуто иным путем, посредством учения о сочетаниях. Спросим для этой цели, сколькими способами можно выбрать 4 карты из 40, т. е. каково количество четверок в 40 вещах. Однако, в главе 4-й части 2 мы уже нашли, что их насчитывается C_{40}^{4} = 91 390. Эти четверки следует считать столькими же случаями в игре, притом происходящими с равной дегкостью. Из них 10 000 удовлетворяют условию задачи, т. е. соответствуют наличию одной карты каждой масти. Это можно показать следующим образом.

Я заменяю четыре масти карт четырьмя игральными костями, а 10 карт каждой масти – соответствующими 10-ю гранями каждой кости. Таким образом, будет иметься столько же различных бросков этих костей, сколько четверок карт выполнят поставленное условие. Как для его выполнения необходимо иметь одну и только одну карту каждой **[199]** масти, так и при любом броске костей обязательно выпадет одна и только одна грань. Но из замечаний Гюйгенса, которыми он предварил Предложение 10 части 1[2], можно заметить, что у подобных костей имеется 10 ·10 ·10 ·10 = 10 000 бросков.

Поскольку, стало быть, столько же выборок карт благоприятны для *A*, а остальные 81 390 против [него], жребии *A* и *B* относятся как [...] 1000 к 8139.

Задача 6. Пусть имеются 12 жетонов, 4 белых и 8 черных. *A* держит пари против *B*, что из 7 жетонов, которые он выберет вслепую, 3 окажутся белыми. Требуется определить отношение их шансов.

Эту задачу, которая является четвертой [дополнительной] по счету в [нашем] Приложении [к трактату] Гюйгенса, мы были вынуждены отложить вплоть до этой части [3], потому что ее решение можно исследовать лишь с трудом, если только не воспользоваться учением о сочетаниях, представленным только в части 2.

Ясно, во-первых, что в предложенной игре всего столько случаев, сколько способов выбрать 7 вещей из 12, т. е., в соответствии с главой 4-й части 2, C_{12}^{7} = 792. Далее следует принять во внимание, что если кто-то спрашивает, сколько случаев благоприятны *A* и сколько противостоят ему, то это то же самое, что спросить в скольких выборках из семи вещей находятся три, но не четвертый, из указанных заранее жетонов. Мы выразили решение этой задачи в общей форме, в конце упомянутой главы, перед Приложением к ней: $C_{m}^{b} \cdot C_{n-m}^{c-b}$. Здесь *n* обозначает число объединяемых вещей, *c* – класс сочетаний, *m* – число указанных вещей и *b* – число этих вещей, которое требуется включить в сочетания. И если принять *n* = 12, *c* = 7, *m* = 4 и *b* = 3, то окажется, что [$C_{m}^{b} \cdot C_{n-m}^{c-b}$] = 280 будет числом всех сочетаний из семи вещей, каждое из которых включает 3 белых жетона, но не четвертый. Поэтому *A* выигрывает в стольких же случаях, оставшиеся же 512 случаев благоприятны *B*, так что отношение их жребиев, если учесть, что должно быть выбрано в точности 3 белых жетона, не более и не менее, будет равно 280/512 или 35/64.

Если, с другой стороны, понимать, что должны быть включены *по крайней мере* 3 жетона, так что смысл задачи в том, что *A* выигрывает также, если он выберет больше трех, т. е. все 4 белых жетона, то ясно, что число случаев, при которых он выигрывает, должно быть увеличено на количество выборок, включающих все эти 4 жетона. В соответствии с тем же правилом, это количество, если положить, что $m = b$, или заменить значение *b* на 4, окажется равным $8 \cdot 7 \cdot 6/3! = 56$. Прибавляя это к предыдущим 280, получим 336 как количество выборок, благоприятных *A*. Для *B* остается лишь 456, так что в этом случае их жребии относятся как [...] 14/19.

[200] Задача 7. Некоторое число игроков *A, B, C* и т. д. поочередно снимают верхнюю карту [из колоды] и выигрывает тот, кто получит единственную фигурную карту; остальные карты пустые (cartes blanches). Пусть первым снимает *A, B* – вторым, *C* – третьим и т. д. вплоть до последнего, после чего *A* снимает следующую карту и так далее до конца игры. Каково соотношение их жребиев?

Ясно, что имеется столько же случаев, которые могут произойти с равной легкостью, сколько карт, поскольку фигурная карта может быть с равной легкостью снята при первой, второй, третьей [и т. д.] и, наконец, при последней попытке. Каждый игрок имеет столько шансов выиграть, сколько карт он может снять. Поэтому, если число игроков является делителем количества карт, т. е. если количество карт в точности делится [делится без остатка] на число игроков, то каждый получит одно и то же число карт и жребии их всех тоже будут одни и те же. Так, если игроков *a*, а карт *ma*, то каждый получит по *m* карт и жребий окажется равным [...] $1/a$, так что порядок игры не предпочтителен никому из них.

Если, однако, не все игроки получают одно и то же количество карт, что происходит, когда этот количество нельзя в точности разделить на число игроков, – например, если игроков *a*, а карт $(ma + b)$ и $b < a$, то и жребии не будут равны друг другу. В этом случае каждый из *b* первых игроков получит $(m + 1)$ карт, однако каждый их оставшихся – только *m*. Таким образом, жребий одного из первых игроков будет относиться к жребию одного из остальных как $(m + 1)/m$. Пусть, например, [...].

Задача 8. Пусть при прежних условиях в колоде имеется несколько фигурных карт и тот, кто снимет первую из них, будет считаться победителем. Каково будет тогда отношение жребиев [игроков]?

Является ли их число делителем количества карт или нет, но их жребии здесь уже не равны друг другу, а каждый из предшествующих игроков находится в более выгодном положении, чем любой из последующих. Действительно, первая фигурная карта, от которой только и зависит победа, может находиться на первом месте скорее, чем на втором, на втором – скорее, чем на третьем и т. д., ибо, если эта карта занимает более близкое к началу колоды место, то она оставляет после себя больше мест, на которых могут находиться остальные фигурные карты.

Чтобы иметь возможность определить число случаев, которое причиняется каждым [ее] местом, примем, например, – ибо метод [исследования] в любом случае один и тот же, – что имеется 12 карт и 4 из них фигурные. Тогда, если первая фигурная карта занимает первое место, ясно, что для трех остальных таких карт остается 11 мест. Эти 3 карты занимают любые из указанных мест, так что будет столько различных случаев, сколько троек из 11 вещей, а именно [...] 165. Аналогично, если первая фигурная карта занимает второе место, остальные 3 окажутся на любых из 10 оставшихся мест, так что будет столько различных случаев, сколько троек из 10 вещей, а именно [...] 120.

И снова, если первая фигурная карта занимает третье место, то [...] окажется столько случаев, сколько троек из 9 вещей. Мы продолжаем это [вычисление] в приложенной схеме, первая строка которой показывает порядок игры, например, для трех игроков, *A, B* и *C*, которые снимают карты **[201]** по очереди. Во второй строке показаны места карт, в третьей – числа случаев, которые могут представиться, когда первая фигурная карта займет соответствующее место.

1	***A***	***B***	***C***	***A***	***B***	***C***	***A***	***B***	***C***	***A***	***B***	***C***
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	165	120	84	56	35	20	10	4	1	0	0	0

Те же самые случаи, которые определяют число троек из 11, 10, 9 и т. д. вещей, могут быть получены как число пар из того же количества вещей, если полагать, что фигурных карт только 3, или как число единиц, если этих карт 2. Все эти случаи [при четырех фигурных картах] могут иметь место одинаково легко и их общее число равно числу четверок из 12 вещей, т. е. [...] 495. Каждый из них включает очень большое число вторичных случаев (а именно, тех, которые возникают просто из перестановок и четырех фигурных карт, и восьми остальных), которые, однако, могут быть очень быстро определены дополнительно, ибо они способны появляться в равной мере и каждому первичному случаю соответствует одно и то же число вторичных (ввиду постоянного числа 4 фигурных и 8 других карт), а именно, $4!\cdot 8! =$ [...] 967 680, см. главу 1-ю части 2.

Действительно, по Следствию 2 [Замечаний к] Предложению 3 части 1 одни и те же количества вторичных случаев, способных появляться в равной мере, приводят к первичным случаям того же вида. Установив это, и желая узнать жребии игроков, нам остается лишь сложить количества случаев, соответствующих очереди игры каждого. Так, число случаев, благоприятных игроку *A*, оказывается равным
$165 + 56 + 10 = 231$, благоприятных *B* и *C*, – [...] 159 и 105 и относятся эти жребии как $231:159:105 = 77:53:35$. Следует заметить, что эта задача фактически совпадает с [дополнительной] Задачей 2 Гюйгенса, см. [наше] Приложение [к части 1], разве только жетоны [здесь] заменены игральными картами, так что мы теперь показали, что решение его задачи можно найти не так, как раньше, а принимая в расчет сочетания. Несколько более затруднительна следующая задача.

Задача 9. Игроки договариваются друг с другом, что побеждает тот, кто снимет из колоды больше фигурных карт, [чем другие игроки] и что если двое или большее число из них снимут одно и то же количество этих карт, то они поделят ставку поровну между собой, остальные же, которые сняли меньшее число фигурных карт, не получат ничего. Найти отношение жребиев игроков, если остальные обстоятельства остаются без изменения.

Если число игроков является делителем количества карт, то специального установления случаев не требуется. Можно пояснить без всяких вычислений, что как бы ни были велики эти величины и сколько бы ни было фигурных карт, жребии игроков должны быть равными друг другу. Действительно, все игроки снимают из колоды одно и то же число карт, а фигурные карты могут безразлично занимать любые места, так что нет причин, почему бы при равном числе взятых ими карт этот игрок мог бы ожидать большее или меньшее число фигурных карт, нежели тот.

Если, однако, количество карт не является точным кратным числа игроков, или если по какой-то иной причине не все игроки (которые вполне могут снимать либо по одной карте, либо сразу все карты, причитающиеся каждому, потому что порядок игры здесь ничего не меняет) получают одно и то же число карт, то жребии не будут равны друг другу, а их определение окажется тем труднее, чем больше игроков или фигурных карт. Я отмечаю, однако, что если этих карт только 2, то жребии игроков, сколько бы их ни было, всегда находятся в отношении чисел снимаемых ими карт, – в точности как это было выше, в Задаче 7, в предположении, что фигурная карта лишь одна.

Действительно, пусть имеется a карт, из которых b получает один игрок, c – другой, d – третий и пусть среди b карт первого игрока может находиться либо одна фигурная карта, либо обе, либо ни одной. Если оказывается какая-либо одна, она займет первое, или второе, или третье и т. д. место **[202]** среди b карт, тогда как вторая может безразлично оказаться на любом оставшемся из $(a – b)$ мест. Соответственно, это приведет к $b(a – b)$ [...] случаям. Если, однако, первый игрок получил обе фигурные карты, они смогут занять первое и второе место, первое и третье, и т. д. и также второе и третье и т. д., так что различных случаев будет столько же, сколько пар содержится в b вещах, т. е. $b(b – 1)/2! =$ […]. Таким образом и по той же причине общее число случаев будет равно числу пар во всех a картах, т. е. $a(a – 1)/2! =$ […]. Заметим, что вторичными случаями, которые происходят просто при перестановке и фигурных карт, и остальных карт, мы пренебрегаем, потому что их число всегда одно и то же ввиду постоянного количества тех и других карт. Так же следует всегда считать в непосредственно следующем варианте, равно как и в последующей задаче и в аналогичных примерах, даже если это [замечание] и не сформулировано явно.

Теперь, если указанный [первый] игрок снял одну фигурную карту, он получает в соответствии с соглашением половину ставки, а если обе, – то всю ставку. Поэтому он имеет $(ab – bb)$ шансов, при которых он может получить 1/2, $(bb – b)/2$ шансов для получения 1 и другие шансы, которые дополняют их число до $(aa – a)/2$, чтобы заиметь 0. По Предложению 3 части 1 это стоит b/a. Таким же образом жребий того игрока, который получил c карт, будет равен c/a [...] и т. д., так что отношение их жребиев оказывается равным a:b:c:d, т. е. равным отношению чисел полученных ими карт, что и требовалось показать.

Но за исключением этого варианта вычисления становятся несколько длиннее и часто чрезвычайно утомительными, тем более, если предположить немного большее число фигурных карт и игроков. В таких случаях особое разнообразие соединений лишь с трудом можно подчинить общему правилу. Однако, подход к этой задаче всегда один и тот же и состоит в том, чтобы вначале установить число способов, по которым фигурные карты могут быть распределены между игроками, – иначе говоря, чтобы выяснить, сколько существует возможных вариантов для такого распределения этих карт по числу игроков на части, ни одна из которых не превышает числа карт, получаемых соответствующим игроком.

[Всё] это можно осуществить почти тем же методом, который мы применили выше, в части 1 [в Замечаниях к Предложению 9][3] для исследования количества очков при бросках игральных костей, но только здесь мы допускаем в качестве части такж и нуль, потому что, конечно же, может случиться, что тот или иной игрок не снимет ни одной фигурной карты.

Далее, подсчитывается число случаев, которые соответствуют каждому распределению. Оно определяется последовательным перемножением сочетаний из стольких вещей, сколько карт имеет каждый игрок, и из классов, равных соответствующему числу фигурных карт. Так, пусть из 40 карт, 10 из которых фигурные, один из игроков получил 16, другой – 10, третий – 8 и четвертый – 6, и спрашивается, в скольких случаях может оказаться, что при этом среди карт первого игрока найдутся 4 фигурных, у второго и третьего игроков – по 3 и у четвертого – ни одной фигурной карты. Я умножаю число четверок из 16 вещей на число троек из 10 и из 8 и число нулионов из 6 вещей и произведение

$(16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13/4!) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8/3!) \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6/3!) \cdot 1 =$ [...] $= 12\ 230\ 400$

дает нам желательный результат, что легко понять по сказанному выше.

Однако, поскольку при решении существенной задачи иногда можно воспользоваться более коротким вычислением, не будет излишним объяснить всё дело на конкретном примере. Пусть 20 карт, из которых 10 фигурных, так распределены между тремя игроками, *A, B* и *C*, что первый и второй получают по 7, третий же только 6. Каковы их ожидания?

Ясно прежде всего, что среди 7 карт первого игрока может оказаться 0, 1, 2, [...], 6 или, наконец, 7 фигурных. И понятно также, что если их только 1, или 2, или 3, то первый игрок непременно проиграет, поскольку один или другой из остальных наверняка получит более трех и таким образом победит в соответствии с соглашением. По этой причине я отбрасываю число случаев, соответствующих этим возможностям, и начинаю с предположения, что игроку *A* достается 4 фигурные карты. Один из остальных игроков может заиметь 6 остающихся фигурных карт, или 5, или меньше, но 5 или 6 приведут к поражению **[203]** *A* и поэтому я откладываю в сторону и эти варианты как ненужные и перехожу к случаю, когда фигурных карт 4 и 3 и отдаю 4 игроку *B* и 2 – игроку *C*, или 2 – *B* и 4 – *C*, или, наконец, по 3 каждому из них. Первые две возможности оставляют игроку *A* половину ставки, третья же отдает ему всю ставку целиком. По предыдущему учению я нахожу, что в 18 375 случаях игроки *A, B* и *C* получат 4, 4 и 2 фигурные карты соответственно, в 11 025 случаях – 4, 2 и 4, и в 24 500 случаях – 4, 3 и 3. Далее, я полагаю, что *A* снял 5 фигурных карт и тогда или только *B*, или только *C* получит оставшиеся 5, или каждый из них получит лишь часть из оставшихся. Поскольку в семи вещах имеется 21 пятерка, я умножаю 21 на 21, – на то же число пятерок в других пяти вещах, – и [это же число] на 6, – на число пятерок в шести вещах, и получаю 441 + 126 = 567 случаев, при которых *A* получает 5 фигурных карт и кто-то из остальных игроков – остающиеся 5, так что *A* забирает половину ставки. Вряд ли отлично вычисление для вариантов, при которых *A* [как и раньше] снимает 5 фигурных карт, один из остальных игроков – 4, а другой – 1 или один из них – 3, а другой – 2, но входить в такие подробности не нужно, потому что я могу считать игроков *B* и *C* одним и тем же лицом и решить задачу более коротким путем не различая указанных вариантов.

Если из 1287 пятерок, находящихся в 13 картах, которые попадают к остальным двум игрокам, вычесть предыдущие 21 + 6 = 27 случаев, когда все 5 фигурных карт оказываются у кого-то одного из них, и умножить остающиеся 1260 на 21, – на число пятерок в семи картах первого игрока, – получится 26 460 случаев, при которых этот игрок единолично заберет всю ставку. Наконец, я предполагаю, что *A* снимает 6 или 7 фигурных карт и тогда, поскольку он заимеет более половины их числа, я вижу, что он несомненно победит, как бы не распределились остальные 4 или 3 фигурные карты между игроками *B* и *C*. Поэтому я и здесь пренебрегаю более подробными вариантами и принимаю этих двух игроков за одно и то же лицо. Из их 13 карт я выбираю без разбора все четверки и тройки и умножаю их количества на количества шестерок и семерок в семи картах первого игрока и получаю 5005 + 286 = 5291 новых случаев, которые отдают *A* всю ставку, что очевидно по приложенной схеме.

Схема (Таблица)

	A	***B***	***C***	**Случаев**	**Причитающаяся доля ставки**
Всего карт	7	7	6		
Фигурных	4	4	2	18 375	1/2
	4	2	4	11 025	1/2
	4	3	3	24 500	1
	5	5	0	441	1/2
	5	0	5	126	1/2
	5	5		26 460	1
	6	4		5005	1
	7	3		286	1

Вторые числа в последних трех строках относятся к игрокам *B* и *C* совместно

После этого я собираю воедино количества случаев, при которых он заберет всю ставку и, отдельно, случаи, отдающие ему половину. И я также нахожу полное число случаев, возможных при 10 фигурных карт среди общего числа 20, которое оказывается равным 184 756. И таким образом я устанавливаю, что имеется 56 251 случай, когда *A* получает всю ставку, 29 967, при которых он забирает половину, в оставшихся же случаях он не получает ничего и это дает ему ожидание 142 469/369 512.

А поскольку второй игрок, *B*, снимает столько же карт, сколько первый, он получает равное ожидание, так что третьему, *C*, остается 84 574/369 512, причем эта доля могла также быть вычислена тем же путем с самого начала. Таким образом, жребий любого из первых двух игроков относится к жребию третьего как [...], что намного превышает отношение 7:6, т. е. отношение между количествами снятых ими карт.

Задача 10. Четыре игрока, *A, B, C, D*, договорившись друг с другом как и в предыдущей задаче, играют с 36 картами, 16 из которых фигурные, и снимают их один за другим по одной. Случилось так, что после распределения 23 карт у *A* оказалось 4 **[204]** фигурных карты, у *B* – 3, у *C* – 2 и у *D* – 1, так что осталось 13 карт, среди которых 6 фигурных. Четвертый игрок, *D*, чья очередь снимать теперь наступила, замечая, что почти вся его надежда на выигрыш исчезла, желает продать свои права кому-либо из остальных. За сколько [ему следует это продать] и каковы ожидания каждого игрока?

Эта задача не отличается от предыдущей, разве лишь предположено, что игроки уже играли какое-то время. Поскольку мы приняли, что осталось 13 карт, первая из которых назначена игроку *D*, следующая – *A*, третья – *B* и так далее по порядку вплоть до последней карты, которую вновь получит *D*, ему достанется 4 карты, а каждому из остальных – по 3. И также оказывается, что *D* не сможет получить более четырех фигурных карт и никто из остальных – более трех (не считая тех, которые они уже заимели по предположению). Имея это в виду, следует определить, сколькими способами могут быть так распределены оставшиеся 6 фигурных карт среди игроков, чтобы *D* никак не досталось более четырех, и никому из других – более трех. Далее надо будет вычислить скольким вариантам каждый из этих различных случаев может быть подвержен, что показано в первой колонке Таблицы.

[205] Таблица

1	2	3	1	2	3
0.3.3.0	1	1.7.6.2	3.3.0.0	4	4.7.3.2
0.3.0.3	1	1.7.3.5	3.0.3.0	4	4.4.6.2
0.0.3.3	1	1.4.6.5	3.0.0.3	4	4.4.3.5
0.3.2.1	9	1.7.5.3	3.2.1.0	36	4.6.4.2
0.3.1.2	9	1.7.4.4	3.2.0.1	36	4.6.3.3
0.2.3.1	9	1.6.6.3	3.1.2.0	36	4.5.5.2
0.1.3.2	9	1.5.6.4	3.0.2.1	36	4.4.5.3
0.2.1.3	9	1.6.4.5	3.1.0.2	36	4.5.3.4
0.1.2.3	9	1.5.5.5	3.0.1.2	36	4.4.4.4N
0.2.2.2	27	1.6.5.4	3.1.1.1	108	4.5.4.3
1.3.2.0	12	2.7.5.2	4.2.0.0	3	5.6.3.2
1.3.0.2	12	2.7.3.4	4.0.2.0	3	5.4.5.2N
1.2.3.0	12	2.6.6.2	4.0.0.2	3	5.4.3.4N
1.0.3.2	12	2.4.6.4	4.1.1.0	9	5.5.4.2N
1.2.0.3	12	2.6.3.5	4.1.0.1	9	5.5.3.3N
1.0.2.3	12	2.4.5.5	4.0.1.1	9	5.4.4.3N
1.3.1.1	36	2.7.4.3			
1.1.3.1	36	2.5.4.5			
1.1.1.3	36	2.5.4.5			

Дополнительная таблица

1035	188	22	12	1
399	342	66	21	1/2

1.2.2.1	108	2.6.5.3	9	9	9	0	1/3
1.2.1.2	108	2.6.4.4	36	36	36	36	1/4
1.1.2.2	108	2.5.5.4	237	1141	1583	1647	0
			1716	1716	1716	1716	
2.3.1.0	18	3.7.4.2					
2.3.0.1	18	3.7.3.3					
2.1.3.0	18	3.5.6.2					
2.0.3.1	18	3.4.6.3					
2.1.0.3	18	3.5.3.5					
2.0.1.3	18	3.4.4.5					
2.2.2.0	54	3.6.5.2					
2.2.0.2	54	3.6.3.4					
2.0.2.2	54	3.4.5.4					
2.2.1.1	162	3.6.4.3					
2.1.2.1	162	3.5.5.3					
2.1.1.2	162	3.5.4.4					

Сверху, в дополнительной таблице, указаны количества случаев для четырех игроков и соответствующие доли ставки и далее общие количества случаев

В основной таблице указаны, в первой колонке, распределение фигурных карт среди игроков (начиная с игрока *D*). Во второй колонке – количества соответствующих случаев, в третьей – снова распределение фигурных карт, но с учетом имевшихся раннее. Следующие три колонки повторяют предыдущие

[204, продолжение] Этот метод в точности тот же, что и в предыдущей задаче и поэтому нет необходимости разъяснять его более подробно. Следует, однако, заметить, что после подсчета количества случаев и до того, как можно будет определить, которые из них благоприятны тому или иному игроку, количества фигурных карт должны быть увеличены на их число, уже имевшихся у игроков прежде, чем *D* продал свой жребий.

Действительно, победа зависит от [наличия] тех и других вместе. Число фигурных карт, которыми владеет *D*, должно быть увеличено на 1, а тех, которыми владеют *A, B, C*, – на [...], как можно усмотреть в колонке 3 Таблицы, [новые числа] в которой заменяют исходные данные. После этого надо сложить все случаи, в которых игроки забирают всю ставку; ее половину; треть; или четверть; и в которых они не получают ничего. Соответственно, можно установить, что в 1035 случаях *A* получает всю ставку, в 399 случаях – половину и т. д., как указано в дополнительной таблице. Всего этих случаев 1716, в точности столько, сколько шестерок в 13 картах. По этой причине жребий *A* составляет[4]

$[1035 \cdot 1 + 399 \cdot (1/2) + 9 \cdot (1/3) + 36 \cdot (1/4) + 237 \cdot 0]/1716 = 2493/3432.$ Аналогично, жребии *B* и *C* составляют 742/3432 и 134/3432 соответственно и, наконец, жребий *D* равен 63/3432, так что соотношение жребиев оказывается [...].

Следует заметить, что, будь число остававшихся карт не столь незначительно, или не будь возможным так легко определить количества случаев, стоило бы применить тот же краткий путь вычислений, как и в предыдущей задаче, особенно если бы требовалось лишь установить ожидание *D.* Тогда разрешалось бы исключить все виды распределений, которые предоставляли ему не более двух фигурных карт, т. е., вместе с одной, которую он по предположению уже имел, не более трех. А из оставшихся распределений можно было бы принять во внимание лишь те немногие, которые не давали бы ни одному из других игроков больше фигурных карт, чем игроку *D*.

Эти распределения помечены в таблице буквой *N* (notatio), поскольку ясно, что в соответствии с соглашением при всех других распределениях фигурных карт *D* не получит ничего. Заметим, однако, что тип задачи не изменится, если игроки не снимают карты по одной, а вытаскивают частично помеченные камешки, записки или иные сходные вещи, спрятанные в небольшой коробке или урне, – одни игроки большее число, другие – меньшее, либо зараз, либо по одному (по одной), – и если тот, кто выберет наибольшее число помеченных вещей, считается победителем. Пояснение метода подсчета не изменится, притом, как я снова предупреждаю, не будет никакой разницы, вытаскивать ли камешки каждому по очереди либо зараз, либо по одному.

[205] Задача 11. При шести бросках кости предлагается выкинуть все ее шесть граней, по одному разу каждую из них, так чтобы ни одна из них не повторилась. Каково ожидание успеха?

Ясно, что здесь ввиду шести граней при каждом броске кости возникнет 6 случаев. Из них, ни один не противостоит бросающему при его первой попытке. При втором броске неблагоприятна та грань, которая выпала при первом, а благоприятны лишь остальные 5 граней. При третьем броске грани [, выпавшие] в двух предшествовавших бросках, вредят бросающему, а помогают ему лишь 4 оставшихся. Аналогично, при четвертом броске [...], а при пятом и шестом [...]. Задача, стало быть, сводится к следующему: Определить ожидание того, кто должен чего-то добиться 6 раз, притом что общее количество всех случаев при каждом броске остается равным **[206]** 6, а число благоприятных случаев равно, при первом броске, 6, при втором – 5 [...] и т. д. Это [ожидание], найденное в [Замечаниях к] Предложению 12 части 1 в общем виде, равнялось $beh\ldots/(adg\ldots)$, где b, e, h и т. д. в частности равны 6, 5, 4 и т. д., а каждое из a, d, g и т. д. равно 6. Следовательно,

$beh\ldots/(adg\ldots) = 6!/6^6 = [\ldots] = 5/324$.

Задача 12. При шести бросках кости предлагается выкинуть все ее шесть граней по порядку, – при первом броске, 1 очко, при втором – 2 очка, [...]. Каково ожидание успеха?

Поскольку грани должны выпасть по порядку, благоприятным игроку при каждом броске может быть лишь 1 случай. Стало быть, поскольку каждая из букв b, e, h и т. д. принимает значение 1, его ожидание равно $1^6/6^6 = 1/46\,656$.

Задача 13. Три игрока, *A, B* и *C*, каждый их которых выписал себе первые 6 цифр [начиная с 1], бросают по очереди кость при условии, что тот, кто выкинет какое-то число очков, зачеркивает у себя соответствующую цифру, либо, если ее уже нет [если она уже зачеркнута], передает очередь следующему игроку. Так продолжается, пока кто-то [из них] первым не зачеркнет всех своих цифр. Случилось, однако, что после некоторого времени игры, *A* все еще имеет 2 [незачеркнутые] цифры, *B* – 4 и *C* – 3 цифры и очередь перешла к *A*. Каковы их жребии?

Эта задача требует не столько изобретательности, сколько труда и терпения. Ввиду громадного разнообразия случаев, числа сразу же становятся очень большими и средства от этого затруднения я не знаю, разве только мы сможем несколько сократить работу исследованием лишь тех жребиев игроков, изменяющихся после каждого броска, которые оказываются у них после трех бросков, когда очередь играть возвращается к *A*.

Для этого я принимаю во внимание, что после каждых трех бросков может случиться, что либо никто из игроков, либо один или двое из них, либо все трое выкидывают [число очков, равное] какой-то оставшейся у них цифре. Правило, приложенное к [Замечаниям к] Предложению 12 части 1, разъясняет, сколько случаев может соответствовать каждой из этих возможностей. Если обозначить количество цифр, оставшихся у каждого игрока по порядку их следования, через $b, e, h,$ а число зачеркнутых цифр через c, f, i, то суммы, – $b + c = e + f = h + i = a = 6$, – равны количеству граней кости. Тогда, в соответствии с Правилом, количество случаев, при которых ни один игрок не зачеркнет ни одной из оставшихся у него цифр, и оставляющих игроков в их первоначальном состоянии, оказывается равным cfi. Количество случаев, при которых только *A* зачеркнет свою цифру, равно bfi; при которых это сделает только *B* – eci и т. д., как показано в прилагаемой схеме.

Количества случаев, при которых игроки (1. – Никто из них;
2. – Только *A*; ... 5. *A* и *B*; ... 8. – *A* и *B* и *C*) зачеркивают свои цифры
1. cfi 2. bfi 3. eci 4. hcf 5. bei 6. bhf 7. ehc 8. beh

Число всех случаев равно a^3 = [...] = 216 и, после отбрасывания в соответствии со Следствием 4 [в Замечаниях к] Предложению 3 части 1, тех случаев, при которых жребии игроков остаются неизменными, число оставшихся оказывается равным $a^3 - cfi$.

Имея это в виду, я вычисляю жребии игроков при каждом положении, начиная с простейших, в котором они могут оказаться в дальнейшем пока не дойдут **[207]** до предложенного состояния. Я указываю их по порядку, поскольку ни один из последующих жребиев не может быть определен, пока не установлены все предыдущие.

A	1.1.1	1.1.1	1.1.1	1.1.1	2.2.2	2.2.2	2.2.2	2.2.2
B	1.1.1	2.2.2	3.3.3	4.4.4	1.1.1	2.2.2	3.3.3	4.4.4
C	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2.3

Во-первых, я принимаю, что у каждого игрока осталась лишь одна цифра и в этом случае каждая из букв b, e, h равна 1, а каждая из c, f, i – 5. И я учитываю, что первый игрок, *A*, одержит победу, если он, либо один, либо вместе с другим или с обоими остальными, выкинет свою оставшуюся цифру за следующие три броска. Но *B* может победить только, если достигнет того же либо один, либо с *C*, а *C* – только, если он один добьется успеха. Поэтому их жребии становятся соответственно[5]

$$(bfi + bei + bhf + beh)/(a^3 - cfi) = aab/(a^3 - cfi) = 36/91,$$
$$(eci + ehc)/(a^3 - cfi) = 30/91, \; hcf/(a^3 - cfi) = 25/91.$$

Далее, я предполагаю, что у каждого из первых двух игроков осталось по одной цифре, а у третьего, *C*, – 2 цифры. Тогда $h = 2$ и $i = 4$ и я принимаю в расчет, что при следующих трех бросках всё будет происходить в точности как и при предыдущем предположении, но только если C выкинет одну из оставшихся у него цифр, никто не выиграет, а все окажутся в том положении, в котором они находились в соответствии с указанным предположением. И жребии оказываются равными

$$\frac{aab\cdot 1+hcf\cdot(36/91)}{a^3-cfi}=\frac{36\cdot 1+50\cdot(36/91)}{116}=2538/5278,$$

$$\frac{aec\cdot 1+hcf\cdot(30/91)}{a^3-cfi}=\frac{30\cdot 1+50\cdot(30/91)}{116}=2115/5278,$$

$$\frac{hcf\cdot(25/91)}{a^3-cfi}=\frac{50\cdot(25/91)}{116}=625/5278.$$

И таким образом можно продолжать определение жребиев в остающихся положениях. Но всё вычисление в целом возможно лишь для того, у кого достаточно свободного времени, мы же более заняты и переходим к другим вещам.

Задача 14. Два игрока, выбрасывающие кость на игральную доску, договариваются друг с другом, что каждый заимеет столько бросков, сколько очков окажется на кости при первом броске, и что ставку получит тот, кто в общей сложности выбросит большее число очков. Если, однако, окажется, что они оба наберут одно и то же число очков, то ставку они разделят поровну между собой. Тем не менее, один из игроков, B, устав от игры, решает заменить неопределенное число очков на достоверное и принять 12 очков за свой результат и A соглашается. Кто из них имеет более, и насколько более сильную надежду на победу?

Прежде всего надо определить, **будет ли первый [пробный] бросок кости причислен к броскам *A* или нет. Вначале мы примем, что не будет.** Тогда, **[208]** если при первом броске выпадет 1 очко, A получит только 1 бросок, что даст ему не более 6 очков. Следовательно, поскольку B имеет по соглашению 12 очков, A наверняка проиграет и не получит никакой доли ставки.

Если при первом броске окажется 2 очка, у A будет 2 броска или (что по [Замечанию **L** к] Предложению 12 части 1 равнозначно) 1 бросок двух костей. Но при этом броске имеет место 36 случаев, из которых только 1 приносит 12 очков, что по соглашению даст A половину ставки, а все остальные – менее 12 очков, не дающие ему ничего. Его жребий поэтому равен $[1\cdot(1/2) + 35\cdot 0]/36 = 1/72$.

Если же при первом броске откроется 3 очка, игроку A должно быть дано 3 броска одной кости или, что равносильно, 1 бросок трех костей, для которых имеет место 216 случаев. Из них, 25 дают 12 очков, 135 – меньше, а остальные 56 – больше. Поэтому, по соглашению, A получит 25 шансов заиметь половину ставки, 135 шансов не получить ничего и 56 – получить всю ставку. И это стоит [...] 137/432.

При том же соглашении, если при первом броске появляется 4 очка, жребий A оказывается равным $[125\cdot(1/2) + 310\cdot 0 + 861\cdot 1]/1296 =$ 1847/2592. Если же появится 5 очков, то его жребий будет [...] 14 333/15 552. Если, наконец, 6 очков, то [...] 7661/7776.

Теперь, однако, 1, 2, [...], 5 или 6 очков могут открыться при первом броске одинаково легко и по этой причине в начале игры жребий A, по Предложению 2 части 1, равен 1/6 суммы всех отдельных жребиев, – 0, 1/172, [...], 7661/17 776, а именно 15 295/31 104, что оставляет 15 809/31 104 жребию игрока B.

Мы теперь положим, что первый бросок кости, который определяет число попыток игрока *A*, причисляется к его броскам. Тогда, если A выбрасывает 1, то ясно, что он проигрывает. То же верно, если он выкидывает 2 очка, ибо тогда у него остается один бросок, при котором может быть выброшено [не более] 6 очков. Добавление их к двум очкам первого броска приводит лишь к 8 очкам, тогда как другому игроку, B, было дано 12.

Если при первом броске выкинуто 3 очка, то игроку A остается еще 2 броска, которым соответствуют 36 случаев. Из них, 4 дают 9 очков (т. е., включая первый бросок, 12 очков), 26 дают меньше, и 6 – больше. Он поэтому имеет 4 шанса получить половину ставки, 26, при которых он не заимеет ничего, и 6, дающих ему всю ставку, что в целом приводит к жребию 2/9.

Если при первом броске игроку A выпадет 4 очка, у него останется 3 броска, которым соответствуют 216 случаев. Из них, 21 дают ему 8 очков (т.е., **[209]** вместе с четырьмя очками первого броска, 12), 35 – меньше, и 160 – больше. Его жребий поэтому оказывается равным $[21 \cdot(1/2) + 35 \cdot 0 + 160 \cdot 1]/216 = 341/432$. Таким же образом, если при первом броске открылось 5 или 6 очков, его жребий будет равен 1271/1296 и 15 545/15 552.

Поэтому, раз при первом броске все 6 граней кости выпадают с равной легкостью, жребий A в начале игры равен 1/6 суммы всех отдельных жребиев, 0, 0, 2/9, [...] и 15 545/15 552, а именно 46 529/93 312, так что [...] остается игроку B, который таким образом при каждом предположении имеет более сильную надежду выиграть.

Чтобы читатели могли на этом примере понять, как осторожно следует всё обдумывать при подобных рассуждениях и не схватить облака вместо Юноны[6], надеюсь, что будет небесполезно добавить здесь пример ложного и обманчивого решения этой же самой задачи. В этом ложном решении отыскивается значение ожидания количества очков и, если не знать прежнего решения, его можно легко посчитать правильным и достоверным.

При первом предположении, если случится, что игрок A получит 1 бросок, он может выкинуть 1, 2, [...] и, наконец, 6 очков. Поскольку каждое из них может произойти одинаково легко, это будет стоить ему, по Предложению 2 части 1, $(1 + 2 + [...] + 6)/6 = 3½$ очка, что является средним арифметическим из 1 и 6. Если, однако, окажется, что он получит 2 броска, то после них он сможет набрать 2, 3, 4 и т. д., и, наконец, 12 очков. Поскольку он заимеет 2 очка в одном случае и также в одном случае 12, но в двух случаях – 3 и [еще] в двух – 11, и, далее, в трех случаях он получит 4 очка и в стольких же случаях – 10 и т. д., его ожидание количества очков по Предложению 3 части 1 будет полагаться равным
$(1 \cdot 2 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 11 + [...] + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7)/36 = [...] = 18 \cdot 14/36 = 7$, что также является средним арифметическим между крайними очками, 2 и 12.

Если A получит 3 броска, он сможет набрать 3, 4, 5 и т. д. вплоть до 18 очков, из которых равноудаленные от крайних, 3 и 18, каждый раз соответствуют равному числу случаев. И, стало быть, таким же образом может быть показано, что его ожидание в этом случае стоит 10½ очков. Аналогично, если он получит 4, 5 или 6 бросков, его ожидание будет средним между 4 и 24, между 5 и 30 или между 6 и 36, – крайними количествами очков, которые можно выкинуть при этих бросках соответственно. Его ожидания будут поэтому равны 14, 17½ и 21, а поскольку может одинаково легко случиться, что игрок A получит 1, 2, [...] или 6 бросков, у него будет также равное ожидание 3½, 7, 10½, 14, 17½ и 21 очков. Раз эти числа также образуют арифметическую прогрессию, а среднее между крайними [числами] составляет 12¼, они указывают, что ожидание следует [окончательно] полагать равным 12¼.

[210] Можно действовать вполне аналогично при втором предположении. Конечно же, если игрок A при первом броске выкинет 1 очко, он и получит 1 очко; если выбросит 2, то получит 2 очка и еще 1 бросок, который, по сказанному выше, стоит 3½ очка. Поэтому при двух бросках он заимеет 5½ очков. Если [при первом броске] вскроется 3 очка, он получит, помимо них, 2 броска, которые, как мы сказали, стоят 7 очков, так что всего он будет иметь 10. Точно таким же образом, если при первом броске выпадет 4, 5 или 6 очков, можно будет показать, что он получит 14½, 19 или 23½ очка. Поэтому, раз он вначале с равной легкостью мог выкинуть 1, 2, [...] или 6 очков, тем же путем он получит ожидание, равное среднему из 1, 5½, 10, 14½, 19 и 23½ очков, и среднее арифметическое снова, как и раньше, равно 12¼ очков.

При каждом предположении можно полагать, что игрок A получит 12¼ очков, тогда как лишь 12 допущено для игрока B, и поэтому представляется, что следует заключить, что у A ожидание больше, чем у B. Однако, из предшествующего и очевидного решения явствует противное, хотя, конечно, трудно сказать, почему первый игрок [при ложном решении] ожидает большее число очков нежели второй и в то же время – меньшую долю ставки [при верном решении], если по соглашению ее получение зависит от преобладания количества очков[7].

Задача 15. Игрок B просит уступить ему в качестве его доли количества очков квадрат числа очков, открытых при первом броске. Каково теперь отношение жребиев [игроков], если остальные условия остались прежними?

Предположения снова подразделяются. **Первое предположение.** Полагают, что первый бросок не причисляется к броскам A. Следовательно, если при этом броске выпадет 1 очко, игрок B по соглашению также получает только 1 очко, а игрок A – 1 бросок. Из шести случаев, имеющих при этом место, 1 дает 1 очко и 5 – большее количество. Поэтому 1 шанс приносит ему половинную победу и 5 – безраздельную. Это обеспечивает жребий $(1 \cdot 1/2 + 5 \cdot 1)/6 = 11/12$.

Если первый бросок дает 2 очка, B по соглашению получает дважды 2 или 4 очка, а игрок A – 2 броска. Будет иметь место 36 случаев, из которых 3 дадут ему столько же, сколько заимел B, а именно 4 очка, 3 – меньше и 30 – больше очков. Поэтому жребий A становится равным $[30 \cdot (1/2) + 3 \cdot 0 + 30 \cdot 1]/36 = 7/8$.

Если же результат первого броска – 3 очка, B получает [...] 9 очков, а A – 3 броска. Будет иметь место 216 случаев, из которых 25 дадут ему 9

очков (т. е. столько же, сколько получил *B*), 56 – меньше и 125 – больше очков. Это приводит к его жребию, равному
[25 ·(1/2) + 56 ·0 + 135 ·1]/216 = 295/432. Аналогичным образом устанавливается, что если при первом броске открывается 4, 5 или 6 [очков], жребий *A* становится равным 745/2592, 7/288 или 1/93 312. И поскольку при первом броске все 6 вариантов осуществляются с равной легкостью, искомый результат будет 1/6 суммы дробей [...], а именно 259 993/559 872, так что другому игроку, *B*, остается 299 879/559 872.

[211] Второе предположение. Пусть теперь первый бросок тоже причисляется к броскам игрока *A*. Тогда, если он приносит 1 очко, каждый игрок получит по одному очку и половине ставки. Если открывается 2 очка, *B* получает по соглашению 4 очка, а *A*, – в дополнение к уже учтенному, – второй бросок. Из 6 возможных случаев при втором броске 1 приносит 2 очка (т. е., если учесть их вместе с двумя первого броска, то 4 очка, именно столько же, сколько у *B*), также 1 случай, который даст менее и 4 – более очков. Его жребий таким образом будет [1 ·(1/2) + 1 ·0 + 4 ·1]/6 = 3/4.

Если открылось 3 очка, *B* получит 9, *A*, однако же, добавит к предыдущему еще 2 броска, которые подвержены 36 случаям. Из них 5 дают ему 6 очков (т. е., считая с тремя очками первого броска, столько же, сколько у *B*), 10 – меньше и 21 – больше очков. Это порождает для *A* жребий [5 ·(1/2) + 10 ·0 + 21 ·1]/36 = 47/72. Аналогичным рассуждением можно определить, что при четырех, пяти или шести очках первого броска жребий *A* будет 137/432, 35/864 или 1/15 552. И поскольку при первом броске 6 вариантов осуществляются с равной легкостью, искомый результат будет 1/6 суммы [...], а именно 35 155/93 312, так что *B* остается 58 157/93 312. Таким образом, ожидание *B* при каждом предположении оказывается бóльшим.

Задача 16. Оценка жребиев в игре, называемой Cinq et Neuf (пять и девять)

Во Франции, Дании, Швеции, Бельгии, Нижней Германии и соседних местах в ходу игра, которая там называется Cinq et Neuf. В нее играют двое, *A* и *B*, двумя костями. Кости бросает только один из них, *A*. Условия игры таковы. Если *A* при первой попытке выбросит 3 или 11 или любой дупель (un doublet, ein Pasch), т. е. 2 единицы, двойки, тройки и т. д., то он выигрывает, а если 5 или 9, выигрывает другой игрок, *B*. Если же *A* выкинет любое другое число очков, т. е. 4, 6, 7, 8 или 10 [но не дупель], то не выигрывает никто, но игра продолжается, пока либо не выпадет 5 или 9, – и тогда побеждает *B*, – либо снова не выпадет в точности то же число очков, что и при первом броске, – и тогда побеждает *A*. [Однако,] условие относительно появления 3 или 11 или любого дупеля никогда не помогает *A* кроме как при первом броске. Каково при этих предположениях соотношение жребиев?

Поскольку игрок *A*, если он выбросит 4, 6, 7, 8 или 10 очков при первом броске, получает еще не известные и не исследованные жребии, их следует установить прежде всего. Допустим, что при первом броске *A* выкинул 4 и готов бросать вторично. Так как существует 3 случая, чтобы снова получить эти 4 очка на двух костях и дают победу *A*, и 8 других случаев, которые приводят к 5 и 9 очкам и приводят к потере им ставки, тогда как все остальные [случаи] обязывают его повторить бросок **[212]** и поэтому, по Следствию 4 [к Замечаниям к] Предложению 3 части 1, могли бы никак не осуществляться, то его жребий становится равным $(3 \cdot 1 + 8 \cdot 0)/11 = 3/11$. Аналогично, он приобретет то же ожидание, если при первом броске откроет 10 очков, потому что при двух костях 4 и 10 осуществляются при одном и том же числе случаев.

Представим теперь, что первый бросок дал 6 очков. Поскольку те же 6 очков могут повториться при другом броске в 5 случаях, тогда как снова имеются 8 случаев, при которых могут появиться 5 или 9 очков, то игрок A имеет 5 шансов в свою пользу и 8 – против (мы пренебрегаем, как и раньше, остающимися случаями, которые оставляют его в том же положении), что предоставляет ему жребий $(5 \cdot 1 + 8 \cdot 0)/13 = 5/13$. Его ожидание окажется таким же, если при первом броске откроется 8 очков, потому что 6 и 8 подвержены одному и тому же числу случаев. Примем, наконец, что первый бросок оказался семеркой. Тогда, так как те же 7 могут вновь появиться в последующем броске в 6 случаях, в пользу игрока A имеется 6 шансов, и, как и раньше, 8 для его противника. Это приведет к жребию A, равному $(6 \cdot 1 + 8 \cdot 0)/14 = 3/7$.

Установив эти результаты, я продолжаю решать задачу, рассматривая положение игрока A перед первым броском и исследуя, в каких случаях он может затем получить какой-либо из найденных жребиев. Ясно, во-первых, что при двух костях имеется 6 случаев дупелей, которые, вместе с четырьмя дополнительными случаями, приводящими к 3 или 11 очкам, составляют 10 случаев. В соответствии с правилами игры, они отдают всю ставку во владение A. И так же очевидно, как было уже сказано, что имеется 8 случаев, приводящих к 5 или 9 очкам и к потере им всей ставки. Кроме того, есть еще 6 случаев для выбрасывания и 4, и 10 очков, но они включают 2 случая появления пары (2 двойки и 2 пятерки), которые отдают A всю ставку и которые были уже учтены. Вычитая их, получим лишь 4 случая, которые приводят его к жребию 3/11, найденному выше.

Далее, имеется 10 случаев для 6 или 8 очков. Если снова вычесть 2 случая для пары троек и четверок, останется 8 случаев, которые продвигают его к [также] найденному выше жребию 5/13. Наконец, имеется 6 остающихся случаев для 7 очков, при которых, как мы показали выше, он приобретает жребий 3/7. При составлении всего этого вместе, становится ясно, что ожидание A в начале игры будет

$$[10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot (3/11) + 8 \cdot (5/13) + 6 \cdot (3/7)]/36 = 4189/9009.$$

Соответственно, жребий B равен 4820/9009, так что отношение их жребиев равно [...]. Отсюда ясно, что положение B предпочтительнее, чем у A. Есть, однако, игроки, которые предпочитают считать иначе и скорее готовы принять на себя роль A.

Задача 17. Оценка жребия, возникающего в иной азартной игре

Я вспоминаю, что однажды видел здесь на ярмарке некоего коробейника, который разъяснял там игру следующего вида и привлекал к ней проходящих мимо. Круглый диск, немного возвышавшийся к центру, устанавливался [горизонтально] по ватерпасу. По его краям располагались 32 смежных одинаковых карманчиков или **[213]** отверстий, разделенных на 4 различных класса или ряда с четырежды написанными номерами 1 – 8, а над средней частью диска висел стаканчик для костей. Тот, кто собирался испытать свое счастье, опускал через его отверстие 4 шарика, попадавших в такое же число карманчиков на окружности диска, он же получал выигрыш, который мог быть больше или меньше, определялся суммой соответствующих номеров и был указан на приложенной схеме. За каждую попытку игрок уплачивал 4 монетки [пфеннига]. Каково было его ожидание?

Во-первых ясно, что всякий раз падение шариков приносило по меньшей мере 4 очка и не больше 32, притом каждый из этих вариантов происходил в одном случае, – 4 очка только, если каждый шарик попадал в первый из каждого ряда отверстий, и 32 – если в последний из каждого ряда. Далее, я замечаю, что количество случаев возрастает для промежуточного числа очков по мере удаления от любого крайнего, – от 4 или 32, – и достигает наибольшего значения, когда это число равно 18, среднему арифметическому из 4 и 32, тогда как паре номеров, равноудаленных по обе стороны от 18, соответствует равное число случаев.

В третьих, я принимаю в расчет, что отверстия, в которые попадают шарики при каждой попытке, либо все имеют один и тот же номер, либо 3 из них имеют общий номер, а четвертый – другой, либо 2 – один и тот же, и 2 других – также один и тот же, но отличающийся от первых двух, либо 2 – один и тот же, а 2 других – другие, притом отличные друг от друга, либо, наконец, все 4 [отверстия] помечены различными номерами.

Схема (таблица)

Колонки 1 и 2: число очков; 3 и 4: выигрыши за очки, указанные в колонках 1 и 2 соответственно. 5: совпадающие количества случаев для числа очков, указанных в колонках 1 и 2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
4	32	120	180	1	11	25	6	6	976
5	31	100	32	16	12	24	6	4	1369
6	30	30	25	52	13	23	5	4	1776
7	29	24	24	128	14	22	3	3	2204
8	28	18	16	245	15	21	3	3	2560
9	27	10	12	416	16	20	3	3	2893
10	26	6	8	664	17	19	2	3	3088
					18		2		3184

Из этих возможностей первая может произойти в одном-единственном случае, второй – в 16 случаях, третий – в 36, четвертый – в 96, а последний – в 256 случаях.

Пусть, поскольку имеется 4 сходных карманчика, помеченных одним и тем же номером, например, 1, некоторые шарики, например, 3, попадают в них. Это, очевидно, может произойти в стольких случаях, сколько троек содержится в четырех вещах, а именно в четырех случаях. Далее, четвертый шарик должен при этом попасть в карманчик с другим номером, например, с номером 2, что может иметь место четырьмя способами, потому что в четырех вещах содержится 4 единицы, так что мы заключаем, что всего имеется четырежды 4 или 16 случаев, при которых 3 шарика попадают в 3 кармана с номером 1, а четвертый – в карманчик с номером 2.

Аналогично, легко понять, что, поскольку в четырех вещах имеется 6 пар, то существует 6 раз по 6 или 36 случаев, при которых 2 шарика попадают в карманчики с номером 1 и другие 2 – в карманчики, помеченные номером 2. Так же само, имеется 6 раз четырежды 4, т. е. 96 случаев, при которых 2 шарика попадают в карманчик с номером 1, третий – в карманчик 2, а четвертый – в карманчик, помеченный номером 3, и что имеется 4 ·4 ·4 ·4, т. е. 256 случаев, при которых один шарик попадает в карманчик 1, другой – в карманчик 2, третий – в карманчик 3 и четвертый **[214]** – в карманчик 4.

И, наконец, мы должны здесь заметить, что пренебрегаем 24 вариациями, которые происходят лишь ввиду перестановок этих четырех шариков; мы могли бы иметь именно столько вторичных случаев [действительно] произведенных каждым из первичных.

Поняв эти предварения, мы теперь готовы установить количество случаев для любого числа очков тем же методом, которым мы исследовали число различных бросков игральных костей в [Замечаниях к] Предложению 9 части 1. А именно, это достигается разделением данного числа очков всеми возможными способами на 4 части (ибо имеется 4 шарика), из которых ни одна не превосходит 8 (потому что ни одному карманчику не приписан больший номер) и приданием каждому способу установленного выше количества случаев, причем сумма последних будет равна искомому количеству случаев. И поскольку, точно так же, как количество случаев было определено только для данного числа очков, тогда как нам необходимо определить их количество для всех [возможных] очков, мы можем применить более короткий метод и сразу установить все случаи таким путем.

В следующей таблице слева указано по порядку количество очков от 4 до 18. Заметим, что достаточно определить случаи для них, потому что, как было сказано, каждый из номеров выше 18 имеет то же число случаев, что и некоторый номер ниже 18. Если мы примем, что все шарики попадают в карманчики с одними и теми же номерами, то их сумма будет равна четырем единицам, четырем двойкам, тройкам, [...] и т. д., т. е. 4, 8, 12, [...] и т. д. Поэтому мы впишем слева 1.1.1.1 (мысленно понимая под этим и 2.2.2.2 и т. д. вплоть до 8.8.8.8) и в той же строке под номерами 4, 8, 12, [...] и т. д. поставим номер 1.

Вместо таблицы Bernoulli (1975, p. 215). Примечание переводчика

В ее колонке 1 указаны некоторые сочетания всех пяти типов (см. в основном тексте): номера всех четырех карманчиков совпадают; совпадают номера трех; совпадают номера первых двух и остальных двух; совпадают только номера первых двух; и все номера различны). Как разъяснено в тексте, под сочетанием 1.1.1.1 понимаются также сочетания 2.2.2.2 и т. д., а, например, под сочетанием 1.1.1.2 – также 1.1.1.3 – 1.1.1.8.

В колонках, помеченных суммами номеров карманчиков, указаны соответствующие количества случаев; для перечисленных выше вариантов они равны соответственно 1, 16, 36, 96 и 256. Так, в ряду 1.1.1.1 число 1 указано в колонках 4, 8, 12 и 16, потому что 1 + 1 + 1 + 1 = 4, ... и 4 + 4 + 4 = 16. В ряду 2.3.4.5 число 256 указано в колонках 14 – 17, потому что 2 + 3 + 4 + 5 = 14, ... и 2 + 3 + 4 + 8 = 17.

[214, окончание] Если считать, что 3 шарика попали в карманчики с одним и тем же номером, а четвертый – в карманчик с другим номером, то 3 одинаковых номера это либо 3 единицы, либо 3 двойки, тройки и т. д. Пусть одинаковые номера это 3 единицы, тогда четвертый номер – либо 2, либо 3, [...] и т. д., так что суммы четырех номеров оказываются равными 5, 6, 7, [...], 11. Поэтому впишем слева 1.1.1.2 (мысленно добавляя и 1.1.1.3 и т. д. вплоть до 1.1.1.8), а под номерами 5, 6, 7, 8, ..., 11 впишем 16. Если 3 одинаковых номера это двойки, то четвертый может быть 1, или 3 или 4 и т. д., так что их сумма равна 7, 9, 10, ..., 14. Поэтому впишем слева 2.2.2.1 (понимая под этим также 2.2.2.3 и т. д.), а под номерами 7, 9, 10, ..., 14 снова впишем 16. Аналогично следует поступать в том варианте, когда равные номера это 3 тройки, а четвертый – 1, 2, 4 или 5 и т. д., или 3 четверки, а четвертый – 1, 2, 3 или 5 и т. д., или 3 пятерки и т. д., причем четвертый номер всегда является одним из оставшихся, и вписываем 16 под каждой суммой очков, полученной сложением четырех номеров на карманчиках.

Если, далее, мы положим, что 2 карманчика имеют одни и те же номера, а другие 2 – также одни и те же, но отличные от первых, то этими номерами окажутся либо 2 единицы и 2 двойки, 2 тройки, четверки и т. д., суммы которых, считая и 2 единицы, равны 6, 8, 10, ..., 18; либо 2 двойки с двумя тройками, четверками и т. д., суммы которых, считая и 2 двойки, равны 10, 12, 14 и т. д.; либо 2 тройки со столькими же четверками и т. д.; либо 2 четверки и 2 пятерки и т. д. и т. д. Впишем поэтому в таблице слева 1.1.2.2, 2.2.3.3, 3.3.4.4 и т. д. (но исключим для краткости остальные, например, 1.1.3.3, 1.1.4.4, не говоря уже о 2.2.4.4 и т. д., 3.3.5.5) и под суммами этих чисел (также и под суммами других, лишь подразумеваемых) напишем 36.

И затем мы продолжаем, полагая, что 2 шарика находятся в карманчиках с одним и тем же номером, а оставшиеся 2 – в карманчиках, номера которых отличны от тех и друг от друга. И снова 2 совпадающих номера могут быть двумя единицами, или двумя двойками, тройками и т. д. Если это единицы, то третий может быть двойкой, а четвертый – 3, 4, 5 и т. д., или третий может быть тройкой, а четвертый – 4, 5, и т. д. Если 2 одинаковых номера это двойки, третий может быть 1, а четвертый – 3, 4, [...] и т. д., или третий – 3, а четвертый – 4, 5, 6, и т. д., или третий – 4, а четвертый – 5, 6, и т. д. Если одинаковые номера – тройки, третий может быть 1, а четвертый – 2, 4, 5, 6 и т. д. или же третий – 2, а четвертый – 4, 5, 6 и т. д., или же третий – 4, а четвертый – 5, 6, и т. д. и т. д. Если 2 одинаковых номера – четверки, то третий может быть либо 1, а четвертый – 2, 3, 5 и т. д. или третий – 2, а четвертый – 3, 5 и т. д. и т. д. и таким же образом и все остальные. И поэтому мы впишем слева первые из сочетаний 1.1.2.3, 1.1.3.4 и т. д. и 2.2.1.3 и т. д., 3.3.1.2 и т. д., мысленно добавляя также и другие подобные сочетания. А под суммами, полученными из каждого сочетания четырех чисел, впишем 96.

Наконец, если мы положим, что все карманчики, в которые попали 4 шарика, различны, то имеют место сочетания 1, 2, 3 с четвертым номером 4, 5, 6 и т. д.; 1, 2, 4 с четвертым номером 5, 6, 7 и т. д. и т. д. и также 1.3.4, 1.3.5 и т. д., 1. 4. 5 с [какими-то] четвертыми и т. д., не говоря о 2.3.4, 2.3.5 и т. д. с иным четвертым номером и т. д., и т. д., и т. д., вплоть до 3, 4, 5, 6, когда уже исчерпываются все возможные сочетания. **[216]** Поэтому, вписав первые из этих сочетаний слева и опустив остальные, впишем 256 под каждой суммой четырех чисел точно так, как показано в приложенной таблице.

И если сложить в единую сумму количества случаев в каждой колонке, результатом будет общее количество случаев для каждого числа очков, а именно 1 случай, при котором происходит 4 очка, 16 – при которых имеет место 5 очков, 52 для шести очков и т. д. до 18 очков, которые могут быть получены дважды 16 раз, четырежды 36, 10 раз 96 и 8 раз 256, т. е. всего в 3184 случаях. Поскольку каждое число очков, превышающее 18, однозначено согласуется в количестве случаев с числом очков менее 18, – например, 19 с 17-ю, 20 с 16-ю и т. д., как мы указали вначале и как может быть легко показано, то количества случаев для 4 – 17 очков удвоены и результат, 32 776, прибавлен к 3184 случаям для 18, так что сумма 35 960 показывает полное количество всех случаев без исключения. Что это перечисление осуществлено верно, и что ни одно сочетание не было упущено, может быть установлено тем, что число четверок из 32 вещей (т. е. карманчиков) оказывается в точности равным этому. А именно по главе 4 части 2, $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29/4! = 35\,960$.

И раз уж количества случаев для каждого числа очков таким образом найдены, остальные [шаги] чрезвычайно просты и могут быть исполнены по Предложению 3 части 1. Эти количества умножаются на выплаты, получаемые за каждый вариант. Так, поскольку за 4 очка [выплачивается] 120 монет [пфеннигов], как показано на схеме выше, за 32 очка – 180, за 5 очков – 100 монет, 21 очко – 32 [...] и т. д., умножим 1 случай на 120 и, снова, на 180; 16 случаев на 100 и, снова, на 32; [...] и т. д., или более кратко, 1 – на 300 (т. е. на 120 + 180), 16 на 132 [...] и т. д. до $3184 \cdot 2$ и, наконец, разделим сумму всех этих произведений на сумму всех этих случаев. Частное, 4349/3596, составляет ожидание игрока. Так как по предположению каждая попытка сто́ит всего 4 пфеннига, то очевидно, что жребий игрока превышает жребий коробейника и, соответственно, при такого рода игре, если только выплаты не будут уменьшены, коробейник много не заработает.

Задача 18. О карточной игре, называемой Trijaques

У немцев весьма распространен вид игры, называемой Trijaques, которая схожа с французской игрой Brelan. Из колоды отбирают 24 карты (остальные откидываются), по 6 каждой масти, – девятки, десятки, валеты, дамы, короли и тузы, которые ниже обозначены как Дв, Дс, В, Д, К, Т. По старшинству они располагаются так: на первом месте туз, затем король, потом дама, валет и десятка, но девятка выше их всех, равно как и трефовый валет (которого мы поэтому будем считать девяткой, так что девяток окажется 5, а валетов только 3). Превосходство девяток, которые, почти как карты, называемые матадорами в испанской игре Hombre, они [немцы?] называют бандитами и убийцами, состоит в том, что они считаются относящимися к любой масти и любому достоинству. Так, 2 девятки и туз или 1 девятка с двумя тузами равносильны трем тузам или *тройке* (Tricon) тузов. Одна, 2 или 3 девятки вместе с тремя, двумя или одним королем равнозначны *каре* королей; одна или 2 девятки вместе с тремя или двумя картами одной масти равносильны четырем картам той же масти, – например, четырем червонным, пиковым, трефовым и т. д., т. е. виду комбинации карт, обычно назывемой *флешь* (Fluß), которая оценивается выше соответствующего числа очков. Достоинство девятки или туза – 11 очков, а у каждой из остальных карт – 10 очков.

Вот как происходит игра. Каждый игрок получает по порядку 2 карты. Посмотрев на них, но не показывая их другим, первый игрок может поставить любую сумму денег. Другой игрок, который желает **[217]** присоединиться к игре, ставит столько же, или, если ему угодно, даже добавляет что-то, первый же [тогда] обязан добавить столько же, если он не хочет потерять ставку. После этого, каждый, кто остается в игре, получает еще 2 карты, которые выкладываются на стол в открытую, так что часть карт на руках у каждого видна другим игрокам, а часть спрятана. Затем они вновь начинают ставить, увеличивая ставку как и раньше и каждый раз заставляя остальных либо предложить ставку, либо уступить. Наконец, каждый показывает свои карты другим, и тот, у кого они лучше всех, забирает всю ставку.

Теперь, *каре* лучше *флеши*, а *флешь* лучше *тройки*, но лучше всего 4 девятки. В других случаях *троек* и *каре* порядок определяется достоинством карт, а в случае *флеши* – числом очков. Так, например, 3 или 4 туза выше трех или четырех королей, а *флешь* с 43-мя очками выше *флеши* с 42-мя. Если никто из игроков не имеет ни *троек*, ни *каре*, ни *флеши*, ставку забирает тот, у кого наибольшее число очков одной и той же масти. Если карты двух игроков равнозначны во всех отношениях, – если, например, 2 игрока имеют *тройки* или *каре* одного и того же достоинства, или у каждого *флешь* с одним и тем же числом очков, выигрывает либо тот, кто ближе к банкомёту, т. е. кто первым получал карты.

При этих предположениях, каждый, кто посмотрел на свои первые 2 карты, может вычислить свое ожидание выигрыша и понять, как ему следует играть, но только ставка не должна всегда быть пропорциональна качеству карт на руках, иначе игрок даст знать своим противникам, насколько они хороши. Действительно, суть игры в притворстве и особенно распространено, как говорят французы, faire bonne mine à mauvais jeu (делать хорошую мину при плохой игре), для обмана своей чрезмерной уверенностью других игроков, карты которых возможно лучше, чтобы они отказались от дальнейшей игры. Как бы то ни было, вряд ли можно отрицать, что своевременное знание своего ожидания может помочь видоизменять подобное притворство и управлять им. Мы покажем лишь один такой пример.

Поскольку я помню, что когда-то не раз видел, что игрок, получивший две девятки при первой раздаче карт, проигрывал несмотря на свои хорошие карты, я хотел бы выяснить, насколько выше надежда такого игрока выиграть, чем [ожидание] проиграть. Чтобы полностью определить положение, позвольте мне предположить, что я – первый игрок, получающий карты и что при первой раздаче я получил 2 девятки, и что другой получил одну девятку (либо я так предполагаю, потому что он принял мой вызов [не отказался от игры], либо это ясно мне по другой причине). Каково тогда ожидание каждого игрока?

Во-первых, я учитываю все свои возможные положения при продолжении игры. Может случиться, что оставшиеся 2 карты, которые я получу (как можно видеть в приложенной таблице в колонке A), будут либо 2 другие девятки или девятка с тузом, королем, дамой, валетом или десяткой. Или же мне могут дать 2 туза, короля, 2 дамы, 2 валета или десятки; или туза с королем, Д, В или Дс; или короля с Д, В или Дс; даму с валетом или десяткой; или, наконец, валета с десяткой. Кроме того, эти карты могут оказаться одной и той же масти или нет, и, опять-таки, одна или ни одна из них может быть трефовой (вспомним, что трефовый валет считается девяткой и поэтому изменяет жребий).

Затем устанавливаем, в скольких случаях может произойти каждый из этих результатов, принимая в расчет, что, после того, как я получил 2 девятки, а мой противник – одну, остается 21 карта, среди которых еще 2 девятки, 4 короля, столько же тузов, дам и десяток и 3 валета. Далее, мой противник также получил 2 карты, поэтому, точнее сказать, осталось только 20. Но раз одна из его карт мне неизвестна, я знаю не больше, чем знал бы не получи он ее и имей я равное ожидание по поводу каких-то двух из этих 21 карты[8]. Приняв это во внимание, очень легко перечесть случаи, потому что их столько, сколько сочетаний из остающихся карт. Оставшиеся 2 девятки могут быть получены кем-то только в одном случае; одну девятку с тузом, королем и т. д. можно сочетать дважды 4 раза, т. е. 8 раз, а одну девятку с валетом – только дважды 3 или 6 раз. Имеются 6 выборок двух тузов или королей и т. д. и 3 выборки двух валетов. Более того, поскольку существуют 4 масти, туз может сочетаться с королем, дамой и т. д. одной и той же масти четырьмя способами, хотя туз, король и т. д. с валетом – только тремя. Опять же, существует 6 разномастных сочетаний туза и короля и т. д., в которых одна из карт трефовая, потому что трефовый туз можно сочетать с каждым королем, а трефового короля – с каждым тузом трех оставшихся мастей. Таким же образом трефовый туз может сочетаться с валетом другой масти тремя способами. Наконец, туз может сочетаться с королем, **[218]** дамой, валетом и т. д. или с любыми из двух карт другого достоинства и другой масти, но не трефовой, шестью способами. Таким образом, например, любой из трех тузов может оказаться вместе с любым королем двух оставшихся мастей.

Этим методом количество отдельных сочетаний или случаев легко устанавливается, как показано в средней колонке *B* приложенной таблицы. Общее число всех этих случаев оказывается равным 210 = 21 ·20/2!, т. е. числу пар из 21 карты.

В третьих, я точно вычисляю свое собственное ожидание и ожидание моего противника в каждом из перечисленных вариантов. Для этого я прежде всего принимаю во внимание, что после получения двух моих дополнительных карт останутся 19 других, из которых 3 будут у моего противника, так что сочетаний, которым подвержены карты у него на руках, будет столько, сколько троек из 19 вещей, а именно [...] 969. Далее следует определить, сколько из них благоприятны ему и сколько против него для каждого возможного набора моих карт.

Ясно, однако, что если к моим двум девяткам добавятся 2 другие или девятка и туз, мой противник должен обязательно проиграть, потому что у меня будет 4 девятки или 4 туза и я по предположению по порядку предшествую в игре тому, кто в лучшем случае может иметь 4 туза. Если, однако, к моим девяткам добавятся девятка и король, у меня окажется 4 короля и, будь у моего противника 4 туза, он превзойдет меня. Так как в остающихся 19 картах имеются 5 (одна, как понятно, девятка и 4 туза), любые 3 из которых, добавленные к девятке, которую мой противник по предположению уже имеет, равнозначны 4 тузам, и поскольку число троек в пяти вещах равно 10, то из 969 случаев мой противник имеет 10, приводящих его к победе, а остальные случаи заставят его проиграть. И его жребий поэтому равен 10/969.

Если мне доведется получить девятку и даму, у меня будет 4 дамы и мой противник сможет победить, заимей он 4 туза или короля, так что вдобавок к прежним 10 выигрышным шансам у него будет еще 10 или всего 20, которые сто́ят ему 20/969. Аналогично, если я получу валета к девятке, мой противник сможет выиграть еще в 10 случаях кроме уже упомянутых, получи он 4 дамы, и его жребий будет тогда равен 30/969.

Если к моей [третьей] девятке добавится десятка, то 4 валета также приведут моего противника к победе, и к его прежним 30 добавится 4 новых шанса и его жребий станет равным 34/969. Это произойдет потому, что из 4 карт, а именно, из 3 валетов и одной оставшейся девятки, можно составить лишь 4 сочетания по 3.

Таблица

Колонка 1 – наименование карт; 2, 4, 6, 8 – количества случаев; 3, 5, 7, 9 – числители дроби со знаменателем 969, выражающей жребий противника. Колонки 4 и 5 соответствуют одномастным картам, 6 и 7 – разномастным, если одна из мастей – трефовая, колонки 8 и 9 – разномастным картам, среди которых нет трефовой масти. Бернулли принял иные наименования колонок: его *A* это наша колонка 1, *B* – наши 2, 4, 6 и 8 и *C* – 3, 5, 7 и 9

1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
2Дв	1	0	2Т	6	0
Дв, Т	8	0	2К	6	20
Дв, К	8	10	2Д	6	40
Дв, Д	8	20	2В	3	60
Дв, В	6	30	2Дс	6	70
Дв, Дс	8	34			

1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
Т, К	4	70	6	153	6	148	
Т, Д	4	70	6	153	6	148	
Т, В	3	74	3	157	6	152	
Т, Дс	4	70	6	153	6	148	
К, Д	4	96	6	309	6	304	
К, В	3	100	3	313	6	308	
К, Дс	4	96	6	309	6	304	
Д, В	3	100	3	445	6	440	
Д, Дс	4	96	6	441	6	436	
В, Дс	3	100	3	553	6	548	Всего 210 случаев

[219] Далее, если к моим девяткам добавить 2 туза, мой противник снова наверняка проиграет. Если добавить 2 короля, он сможет выиграть четырьмя тузами. Так как имеется 4 туза и 2 остающиеся теперь девятки, т. е. 6 карт, из которых любые 3, добавленные к девятке, уже имеющейся у моего противника, будут равнозначны требуемым 4 тузам, то он сможет выиграть в 20 случаях. К ним, ввиду аналогичного довода, могут быть добавлены еще 20 случаев, если вместо королей я получу дам; и еще раз 20, если получу валетов. Но если я получу 2 десятки, к этим случаям добавятся только 10, потому что имеется лишь 5 карт (а именно, 3 валета и 2 остающиеся девятки), *тройки* из которых могут дать *каре* валетов моему противнику. И его ожидания равны, по порядку, 20/969, 40/969, 60/969 и 70/969.

И опять же, если к моим девяткам добавить туза с королем, дамой, валетом или десяткой той же масти, я получу *флешь* с 43 очками и мой противник сможет выиграть только если получит какое-нибудь *каре* и никак не иначе. Если к моим девяткам добавить короля с дамой, валетом или десяткой той же масти или даму с валетом и т. д., у меня в лучшем случае будет *флешь* с 42 очками и мой противник сможет выиграть с любым *каре* и, вдобавок, имея флешь с 43 очками.

Если, однако, мне достанется туз с королем иной масти и т. д., у меня будет лишь 3 туза и другой игрок сможет выиграть с *каре*, равно как с любой *флешью*. Таким же образом, аналогичным методом, можно исследовать ожидания по отдельности для каждого иного варианта карт на руках, но со всё бóльшими усилиями по мере возрастания надежды на выигрыш у моего противника. Так как заниматься всем этим подробно было бы слишком пространно, я добавлю вычисления лишь для последнего предположения, при котором я полагаю, что получу разномастные валета и десятку (например, червонного валета и десятку пик), так что заимею только 3 валета. При этом мой противник побеждает при любом *каре* или любой *флеши* и также с тремя тузами, королями или дамами.

Вариант *каре* я установлю, учитывая, что оставшиеся 19 карт кроме двух девяток включают 4 туза, 4 короля, 4 дамы, 2 валета и 3 десятки, т. е. (добавляя девятку к каждому рангу) 6 тузов, 6 королей, 6 дам, 4 валета и 5 десяток. Выбирая из них *каре*, видим, что ему могут достаться 4 туза в 20 случаях и в стольких же случаях 4 короля или дамы. И еще имеются 4 случая [*каре*] из валетов и 10 случаев *каре* из десяток, а всего 74 случая.

Затем я определяю число *флешей* следующим образом. Я замечаю, что помимо двух девяток в остающихся 19 картах имеется 4 пики, 5 бубён, 4 черви и 4 трефы. Чтобы составить *флешь* требуется, кроме девятки, которую по предположению противник уже имеет, либо 3 одномастных карты или по крайней мере две такие, если попадется одна из остальных оставшихся девяток. И я заключаю, что число *флешей* равно числу троек во всех мастях плюс дважды число пар. Поскольку троек всего 4 + 10 + 4 + 4 = 22, а пар – 6 + 10 + 6 + 6 = 28, то всего *флешей* 22 + 28 + 28 = 78.

Чтобы, наконец, определить число *троек*, точно установить это число, я заключаю, что для образования *тройки* тузов (королей или дам) та девятка, которую мой противник уже имеет, может быть объединена либо с двумя тузами (королями или дамами), либо с одной из этих карт и с какой-то из двух оставшихся по предположению девяток. Если она присоединена к паре, четвертая карта[9] может быть любой из остальных 13. Поэтому, раз пару можно выбрать из четырех тузов (королей, дам) шестью способами, а [каждый из этих] шести – 13-ю путями, то всего оказывается 78 возможностей. Если только 1 туз (король, 1 дама) присоединена к какой-либо из оставшихся девяток, в качестве четвертой может быть взята любая из карт и низшего ранга оставшихся мастей. Вместе с бубновым тузом могут быть взяты 9 карт по очереди, и 10 – с любым другим тузом, с бубновым королем – 6, а с каждым из остальных

– 7; с бубновой дамой – 3 и с каждой из остальных – 4. Таким образом, с тузами оказывается 39 случаев, с королями – 27, с дамами – 15.

Если к этим числам, взятым дважды ввиду двух остававшихся девяток, добавить 78 других вариаций, найденных выше, оказывается 156 *троек* тузов, 132 – королей и 108 – дам, которые все вместе образуют 396. И раз мы установили, что общее число *каре* – 74, *флешей* – 78, а *троек*, приводящих противника к победе – 396, то всего будет 548 случаев, при которых он может одержать победу. Его жребий поэтому 548/969, как видно на схеме в колонке *C*, в которой по порядку показаны числители дробей с единым знаменателем 969, выражающих ожидания противника на любой стадии игры.

После получения этих результатов ничего другого не остается для определения жребия, – вопрос о котором был задан с самого начала и которым, как, конечно же, имеется в виду, мы обладали до получения двух остающихся [дополнительных] карт, – кроме умножения **[220]** количества случаев (в колонке *B*) на соответствующие числители в колонке *C* и деления суммы произведений на произведение числа всех случаев, т. е. 210, на единый знаменатель 969. Или, более кратко, можно вначале сложить все числители в колонке *C*, соответствующие одному и тому же числу случаев в колонке *B*, затем умножить эту сумму на [указанное] число случаев и, наконец, разделить сумму таких произведений [...] как было сказано выше. Таким образом я нахожу, что жребий моего соучастника в игре становится равным

$[3 \cdot 1902 + 4 \cdot 498 + 6 \cdot 4614 + 8 \cdot 64]/(210 \cdot 969) = 35\,894/203\,490 =$
$17\,947/101\,745$, мой же жребий оказывается равным $83\,798/101\,745$,

т. е. почти впятеро превосходит другой.

Более того, беглый взгляд на таблицу доставляет много других теорем, например такую: я получаю одно и то же ожидание, имея девятку и даму или двух королей; или, снова одно и то же, [но другое], получив 2 десятки, или туза и короля, даму или десятку одной и той же масти. И также: девятка с валетом или десяткой благоприятнее мне, чем 2 дамы; 2 карты различного достоинства и масти, если ни одна из них не трефовая, всегда немного благоприятнее, чем когда одна из них трефовая; дама с десяткой другой масти немного благоприятствует моему положению, а валет с десяткой немного благоприятствуют положению моего противника.

Все это следует в соответствии с предположением, что мне с самого начала достались 2 девятки и 1 – моему противнику, потому что, если ничего не известно про его карты, появятся новые ожидания и иная таблица, которую прилежный читатель может составить аналогичным образом, внесши необходимые изменения. Он, однако, найдет, если вычислит верно, что мой жребий относится к жребию моего противника как 346 988:26 077 и таким образом будет превосходить полученный сейчас в 13 раз.

Помимо этого, я желал было привести здесь решение нескольких других задач, о которых игроки часто спорят, например: лучше ли в начале игры иметь девятку с валетом или десяткой или же двух тузов. Иными словами, у кого из двух игроков, из которых один вначале получил двух тузов, а другой – девятку с валетом или десяткой, выше надежда выиграть? И подобные [вопросы]. Но так как может показаться, чтоя трачу чрезмерно много труда на никчемные дела, я оставляю и этот вопрос, и аналогичные вопросы для исследования и точного вычисления пытливому читателю.

Задача 19. Пусть в игре любого рода, в который ведущий или предпринимающий ее или банкомёт (Oeconomus seu Dispensator, le Banquier du jeu) имеет некоторое преимущество в том, что число случаев, при которых он выигрывает, немного превышает число тех, при которых он проигрывает, и также в том, что число случаев, при которых он остается на своем месте при следующей партии, больше числа тех, при которых банкомёт становится [просто] другим игроком. Как оценить его преимущество?

Пусть при любом броске кости число случаев, при которых выигрывает банкомёт, относится к числу случаев, при которых он проигрывает, как p:q, – как большее к меньшему. И пусть число случаев, при которых он сохраняет свое положение при последующем броске, относится к числу случаев, когда это положение переходит к соучастнику игры, как m:n, – снова как большее к меньшему. Очевидно, что если вопрос только по поводу данной партии, но не для какой-то последующей, то жребий банкомёта (если иметь в виду p шансов получить ставку 1 и q шансов получить 0) был бы равен $p/(p + q)$, а соучастника игры – $q/(p + q)$ при соотношении шансов p:q. Но если иметь в виду и будущие партии, происходит бóльшая неопределенность и с первого взгляда неясно, как можно оценить совместно преимущество в данной партии и надежды на преимущество в следующей. Если не обратить на это тщательного внимания, легко впасть в ошибку.

Я вспоминаю, что как-то привел такой довод: если одно и то же лицо постоянно остается банкомётом, оно всегда будет иметь то же преимущество или жребий, которое (который) определяется отношением p:q. Следовательно, если есть опасность потерять это положение, его состояние, видимо, надо полагать ухудшимся в той же мере. Пусть это состояние x, а состояние его противника y. Тогда, **[221]** поскольку имеется p шансов получить 1 и q – получить 0, m шансов постоянно оставаться банкомётом и n – лишиться этого положения, $x = (p + mx + ny)/(p + q + m + n)$[10]. Аналогично, жребий противника равен $y = (q + my + nx)/(p + q + m + n)$. Сравнение этих уравнений приводит к $x/y = (p + n)/(q + n)$, т. е. к величине, как я заключаю, меньшей, чем p:q.

В другой раз я рассуждал так. Если банкомёту причитается $p/(p + q)$ ставки, а его противнику – $q/(p + q)$, и если в m случаях его положение подтверждается, а в n случаях – переходит в иное, то его жребий будет

$$[mp /(p + q) + nq/(p + q)]/(m + n) = (mp + nq)/[(m + n)(p + q)],$$

так что противнику остается $(mq + np)/[(m + n)(p + q)]$. Отношение жребиев оказывается равным $(mp + nq)/(mq + np)$, снова меньше, чем p:q, хоть и не совпадает с прежним отношением $(p + n)/(q + n)$.

Едва я вывел это, как отклонил [уже] оба эти доказательства как несообразные и ошибочные. Ибо представлялось крайне противоречащим здравому смыслу, что более высокая вероятность (probabilitas) сохранить положение банкомёта по сравнению с его потерей уменьшает, а не увеличивает [сказанное] преимущество. По этой причине я некоторое время был склонен полагать, что оно должно быть составлено из обоих соотношений, $p:q$ и $m:n$, так что отношение жребия банкомёта к жребию его противника окажется равным pm/qn, т. е. бо́льшим, нежели $p:q$ и $m:n$ по отдельности. Но я почувствовал, что этот [вывод] обладал малой доказательной силой и, по существу, отыскав верный метод решения задачи, понял, что он отклонялся от истины.

У меня, однако, нет желания показать, в чем ошибочно приведенное рассуждение [в чем ошибочны и т. д.]. Я предпочитаю перейти без задержки к более верному решению, перед яркостью которого быстро померкнет свет тех ложных решений. Тому, кто желает исследовать этот вопрос должным образом, следует обратить внимание на два обстоятельства. Первое, надо определять по Следствию 5 [к Замечаниям к] Предложению 3 части 1, сколько положено банкомёту не из всей ставки, а только из денег его противника. Второе, надо установить долю, положенную ему за каждый последующий бросок или игру по отдельности; сложение их всех определит ожидание банкомёта.

Предположим, что игроки договорились друг с другом, что после каждого броска проигравший должен будет дать победителю a. Тогда при первом броске банкомёт будет иметь p шансов получить a и q шансов [...] получить $-a$. Далее, доля, положенная ему из денег противника, будет [...] $(pa - qa)/(p + q)$ или, при $p - q = r$ и $p + s = q$, ar/s.

Таким же образом его противник, имеющий q шансов выиграть a и p шансов – проиграть, получит, как следует полагать, $-ar/s$. Кроме того, при первом броске банкомёт имеет m шансов сохранить преимущество своего положения, т. е. положения, при котором он приобретет ar/s при втором броске и n шансов потерять это, т. е. [...]. Поэтому за второй бросок ему также причитается из суммы a своего противника

$$[mar/s + n\,(-ar/s)]/(m + n) = (mar - nar)/[(m + n)s] =$$
$$(\text{при } m - n = t \text{ и } m + n = v) = art/sv.$$ **[222]**

В свою очередь, противнику положено из денег банкомёта $-art/sv$, т. е., ввиду знака минус, он будет должен [...].

Аналогично, по тому, что было только что сказано, имеют место те же $(m + n)$ случаев первого броска. Поэтому банкомёт при последующем броске либо подтвердит свое положение, либо оно отбирается у него, и его право на сумму a при третьем броске (следующем после второго) становится равным

$$[(mart/sv) + n\,(-art)/sv]/(m + n) = [...] = artt/svv.$$

В свою очередь, право противника становится равным $-artt/svv$ и, таким образом, на тех же основаниях можно установить, что из денег за четвертый бросок (следующий после третьего) банкомёту положено

$$[(martt/svv) + n\,(-artt/svv)]/(m + n) = art^3/sv^3,$$

из денег пятого броска $-art^4/sv^4$ и т. д., тогда как его противнику положено $-art^3/sv^3$, $-art^4/sv^4$ и так далее, сколько потребуется.

Поэтому, объединив эти доли в единую сумму, причитающуюся банкиру за отдельные последовательные броски, получим его полное ожидание

$$ar/s + art/sv + artt/svv + art^3/sv^3 + [\ldots] \text{ и т. д.,}$$

которое выражено рядом величин, находящихся в геометрической прогрессии со знаменателем t/v, продолженной до того, как число ее членов не станет равным количеству бросков или игр, договоренному либо вначале, либо, в других случаях, позже, когда игроки сочтут возможным закончить.

Если обозначить это число через z, последний член будет art^{z-1}/sv^{z-1}, а сумма всего ряда окажется равной[11]

$$(ar/s)\,(v - t^z/v^{z-1})/(v - t) = (ar/s)\,[(m + n) - (t^z/v^{z-1})]/2n.$$

Следствие 1. Пусть разность между m и n и, следовательно, отношение t/v очень малы, или по крайней мере пусть число игр z очень велико. Тогда, поскольку величина t^z/v^{z-1} исчезающе мала и, действительно, убывает пропорционально t/v при возрастании числа игр z на единицу, найденную сумму можно без заметного отличия считать равной $(ar/s)(m + n)/2n$. Следовательно, значение полного преимущества банкомёта относится к ar/s, т. е. к тому, что ему причитается только за первую игру, примерно как $(m + n)/2n$.

Следствие 2. Если большое число бросков может быть закончено за короткое время, а банкомёт пожелает прекратить игру и продать свое преимущество кому-нибудь другому, он заберет взамен $(ar/s)(m + n)/2n$. Если, однако, он хочет продолжать игру, но изменить свое положение, став просто ее соучастником, тот игрок, который его заменит, будет должен банкомёту вдвое больше, а именно обычную сумму, захоти они вообще закончить игру, и кроме того еще столько же, если они захотят вернуться к игре, а банкомёт действительно желает отдать ему банк.

Следствие 3. Если $m = p$ и $n = q$, значение $(ar/s)(m + n)/2n$ сводится к $a\,(p - q)/2q$ [...].

[223] Задача 20. Оценка жребия в карточной игре, обычно называемой Capriludium или Bockspiel

Эта игра двух или большего числа игроков, в которой один из них, банкомёт, играет против остальных, распространена среди наших земляков. Банкомёт, исполняющий свою должность (der den Bock hat), перетасовывает карты и делит колоду на столько частей, сколько игроков, включая себя. Затем каждый игрок покупает эти части за устанавливаемую [им] цену, последняя часть достается банкомёту. Наконец, он переворачивает эти части, показывая нижние, но никакие другие карты. После этого банкомёту полагается уплатить тем, чья карта окажется старше, чем его собственная, и притом столько, сколько каждый из тех поставил на свое счастье. Но те, которым досталась карта меньшего или равного с банкомётом ранга, теряют свои ставки, отдавая их ему в уплату за победу. Банкомёт продолжает также исполнять свои обязанности, пока выигрывает хотя бы у одного из своих противников и не теряет своего положения, пока его не победят все без исключения соучастники игры.

Если предположить и понять это, то, чтобы изучить значение ожидания банкомёта, нам осталось лишь определить отношения p:q и m:n, или, иными словами, установить, при скольких случаях банкомёт может выиграть или проиграть в любой партии и также в скольких случаях он может оставить за собой свое право и в скольких случаях – потерять его. Остальное повторяется из предыдущей задачи.

Пусть число мастей, на которое делится колода карт, равно f, а число рангов в каждой – g, так что всего карт fg. Тогда

1. *Если карты розданы только на двоих*, то, очевидно, нижние карты игроков могут меняться столькими же способами, сколько пар, – а их имеется $fg(fg – 1)/2$, – содержится в колоде из fg карт. Из них, некоторые состоят из карт одного и того же ранга, другие – нет, и их количества мы перечисляем по отдельности следующим образом. Карты любого ранга можно объединить в пары $f(f – 1)/2$ способами, а число этих рангов g. Поэтому число всех пар из карт равного ранга равно $fg(f – 1)/2$. Если вычесть это из числа всех пар, $fg(fg – 1)/2$, остается [...] $ffg(g – 1)/2$ пар из карт различных рангов. Если карты одного и того же ранга, то, какой бы ранг ни выбрал противник, по правилам игры банкомёт непременно выигрывает, так что это сто́ит 1. Если, однако, ранги различны, каждый игрок имеет равное ожидание выиграть или проиграть, поскольку противник может с равной легкостью выбрать [получить] карту высшего или низшего рангов, так что это сто́ит каждому 1/2.

Поэтому банкомёт имеет $fg(f – 1)/2$ шансов получить 1 и $ffg(g – 1)/2$ – получить 1/2, что составляет $(fg + f – 2)/(2fg – 2)$ и для противника остается $(fg – f)/(2fg – 2)$. Но, по Замечанию **I** к Предложению 11 части 1, это равнозначно $(fg + f – 2)$ шансам банкомёту выиграть и $(fg – f)$ – проиграть. Итак, установлено, что $p:q = (fg + f – 2)/(fg – f)$. А поскольку банкомёт кроме того сохраняет свое положение на следующие игры до тех пор, пока он выигрывает и теряет его каждый раз. когда проигрывает, ясно, что здесь $m = p$ и $n = q$.

Заметим, что если количество мастей $f = 4$, то $p:q$ = (= $m:n$) = $(2g + 1)/(2g – 2)$. Если также принять, что количество рангов $g = 9$, то это сводится далее к p:q = 19/16. Положим теперь, что противник в отдельных играх обычно ставит a, тогда, по Следствию 3 к предыдущей задаче, за первую игру банкомёту приходится $ar/s = a(p – q)/(p + q) = 3a/35$, а за все игры – $a(p – q)/2q = 3a/32$ с превышением не большим одной стомиллионной части a уже при 7 играх[12]. Если, стало быть, банкомёт захочет прекратить игру, ему удастся продать свое преимущество третьему лицу за $3a/32$; если же он предпочтет продолжать, и только передать свое положение своему противнику, он примет от того двойную сумму, т. е. [...]. **[224]**

2. *Если карты розданы на троих* и игроков, включая банкомёта, столько же, то ясно, что в любых парах розданных карт нижние будут опять-таки подвергнуты стольким вариациям, сколько пар во всем количестве карт, поскольку долю третьего можно полагать как бы несуществующей, а все его карты – перемешанными с картами остальных двух. Поэтому для банкомёта окажется столько случаев, при которых кто-то из его противников в отдельности превзойдет его, или он превзойдет того, сколько было в предположении раздачи на двоих. Иными словами, останется, как было и раньше p:$q = (fg + f – 2)/(fg – f)$ = (если $f = 4$) = $(2g + 1)/(2g – 2)$. Но отношение m:n изменяется с числом

игроков или розданных частей и когда их больше, банкомёту труднее потерять свое положение. Я учитываю, что при трех игроках нижние карты могут претерпеть столько вариаций, сколько троек во всех $4g$ картах (я принимаю $4g$ вместо fg с целью сократить вычисления и потому, что никакое иное количество мастей кроме четырех не находится в ходу), а именно [...] $(32g^3 - 24gg + 4g)/3$.

Некоторые из них состоят из карт одного и того же ранга, другие – из карт, две из которых одного и того же, а третья – иного ранга, и, наконец, еще другие – из карт трех различных рангов. Теперь, без сомнения, так как 4 карты каждого ранга допускают 4 тройки и 6 пар, а число рангов g, то число всех троек одного и того же ранга равно $4g$, а число пар того же ранга – $6g$. И поскольку каждая пара может быть присоединена к любой карте (g – 1) остающихся рангов, число которых $4g - 4$, образуется $24gg - 24g$ троек, половина которых [...] состоит из двух карт одинакового и третьей более высокого ранга, а у другой половины добавленная третья карта более низкого ранга. Поэтому, если вычесть $4g$ и $24gg - 24g$ из числа всех троек, $(32g^3 - 24gg + 4g)/3$, остается $(32g^3 - 96gg + 64g)/3$ троек, ранги карт в которых все различны.

Теперь, однако, если случится, что [все] 3 нижние карты одного и того же ранга, то в соответствии с правилами игры банкомёт не может лишиться своего положения какой бы жребий ни был. И то же самое, если 2 карты одного и того же ранга с добавленной третьей более высокого ранга. Но если эта третья карта рангом ниже [чем у карт в паре], или если ранги всех трех карт различны, банкомёт может потерять свое положение в одном случае (если ему достанется карта самого низкого ранга) и может сохранить его в двух случаях, что сто́ит ему 2/3. У него, следовательно, имеется $4g$ и, снова, $12gg - 12g$ шансов получить 1, далее $12gg - 12g$ и, опять-таки, $(32g^3 - 96gg + 64g)/3$ шансов получить 2/3. Все вместе это составляет $(16gg - 3g - 4)/(24gg - 18g + 3)$ и до единицы остается $(8gg - 15g + 7)/(24gg - 18g + 3)$, что равнозначно $(16gg - 3g - 4)$ шансам оставаться в своем положении и $(8gg - 15g + 7)$ шансам потерять его. Поэтому отношение $m:n$ оказывается равным $(16gg - 3g - 4)/(8gg - 15g + 7)$.

[225] *Заметим*, что при $g = 9$ $p:q = 19:16$ и $m:n = 253:104$. Допустив, что один игрок поставил a, а другой – b, банкомёту будет причитаться, в соответствии с предыдущей задачей и Следствием [Следствием 1] к ней $a(p - q)(m + n)/[(p + q)2n] = 153a/1040$ от первого игрока и [...] $153b/1040$ от второго с погрешностью при 11 играх не более 1/100 000 от $(a + b)$. По этой причине банкомёт может продать свое преимущество какому-нибудь четвертому лицу, кто пожелал бы занять его место, за $153(a + b)/1040$. И он может продать свое положение любому из своих противников, который пожелал бы поменяться с ним местами, например, с тем, который поставил a, за $153(2a + b)/1040$. В соответствии с тем, что было только что сказано, тот должен был бы вначале $153(a + b)/1040$ если игра заканчивается, а затем, если она начинается заново, еще и $153a/1040$, поскольку уступка ему положения банкомёта в игре делает его должным эту сумму.

3. *Если карты розданы на четверых* и имеется столько же игроков включая банкомёта, снова будет столько же случаев, при которых он проигрывает кому-либо из своих противников в отдельности, сколько было при двух предшествующих предположениях и то же самое я

представляю себе для раздачи на любое число игроков, потому что, конечно же, любых двоих из них можно всегда рассматривать будто других не существует. Поэтому отношение $p:q$ всегда остается тем же самым, равным $(2g + 1)/(2g + 2)$. Другое же отношение, $m:n$, которое возрастает с числом игроков, я исследую следующим образом.

Я принимаю в расчет, что нижние карты четырех игроков могут быть

1. Все одинакового ранга или достоинства; или
2. Три одинакового, четвертая же более высокого ранга; или
3. Более низкого ранга; или
4. Две карты одинакового ранга, две другие также одинакового, но отличного от первых двух; или
5. Две одинакового, а две другие – различных рангов, из которых одна может быть более высокого ранга; или
6. Обе более низкого ранга; или
7. Одна более высокого, другая более низкого ранга; или
8. Наконец, все 4 карты различных рангов.

Из этих возможностей, 1-я, 2-я, 4-я или 5-я имеют место когда банкомёт, в соответствии с правилами игры, не может потерять своего положения. Если же имеют место 3-я, 6-я, 7-я или 8-я возможности, банкомёт теряет свое положение в одном случае (именно, если ему достается карта самого низкого ранга), но сохраняет его в трех случаях, что дает ему, соответственно, 3/4. Первая из возможностей, как я представляю себе, происходит в g случаях, вторая – в $(8gg – 8g)$ случаях, также и третья. Четвертая – в $(18gg – 18g)$ случаях, пятая – в $(16g^3 – 48gg + 32g)$ и шестая и седьмая – в стольких же, и, наконец, восьмая в $[(32/3)g^4 – 64g^3 + (352/3)gg – 64g]$ случаях. Всего случаев, или четверок в колоде, $[(32/3)g^4 – 16g^3 + (22/3)gg – g]$.

Доказательсто всего этого, чтобы сэкономить слова, я оставляю прилежному читателю. Итак, банкомёт имеет

$g + (8gg – 8g) + (18gg – 18g) + (16g^3 – 48gg + 32g)$ шансов получить 1 и
$(8gg – 8g) + (16g^3 – 48gg + 32g)$ + то же самое +
$[(32/3)g^4 – 64g^3 + (352/3)gg – 64g]$ шансов получить 3/4.

Вместе это дает ему ожидание $(24g^3 – 24gg + 3)/(32g^3 – 48gg + 22g – 3)$ остаться банкомётом, а разность между единицей и этим, $(8g^3 – 24gg + 22g – 6)/(32g^3 – 48gg + 22g – 3)$, остается для опасения потерять свое положение. Таким образом, отношение $m:n$ можно полагать равным $(24g^3 – 24gg + 3)/(8g^3 – 24gg + 22g – 6)$.

Заметим, что если g принять равным 9, то $p:q = 19:16$, а $m:n =$ 15 555:4080 = 61:16. Полагая, что один игрок поставил a, другой – b и третий – c, банкомёту причитается по предыдущей задаче и ее Следствию

$(p – q)(m + n)(a + b + c)/[(p + q)2n] = (33/160)(a + b + c)$ **[226]**

и уже в 15 играх не более чем на 1/10 000 часть $(a + b + c)$ меньше этого. Поэтому, если банкомёт захочет уступить свое место какому-либо пятому и перестать играть, он продаст свое преимущество за

$(33/160)(a + b + c)$. Если считать, что игра будет продолжаться, а он захочет поменяться своим жребием с одним из своих противников, он примет от того

$$(33/160)(2a + b + c), \text{ либо } (33/160)(a +2b + c), \text{ либо } (33/160)(a + b + 2c)$$

в соответствии с тем, сколько тот поставил, a или b или c.

Почти тем же образом можно определить преимущество банкомёта в предположении, что игроков больше[13].

Задача 21. О игре Bassettae (de la Bassette)

Эта игра особо знаменита ввиду бесчисленных буйств и трагедий, которые она когда-то повсюду возбуждала, особенно в Италии и Франции, и потому была вскоре изгнана оттуда и запрещена под страхом сурового наказания. В то время, когда занятия этой игрой более всего процветало при дворе Короля Франции, D. [Dominus, господин] Salvator (J. Sauveur), французский математик и наставник престолонаследника[14], подверг исчислению ожидания игроков [в ней] и опубликовал краткие таблицы со сводкой в парижском *Journal de Sçavans* за февраль 1679 г. Пользуясь этим источником, я обозрею те стороны сути и естества этой игры, которые представляются необходимыми для исследования [его] таблиц и восстановления вычислений, о которых автор умолчал.

После того, как банкомёт, исполняя свою должность, взял в руки колоду карт и перетасовал ее, каждый игрок за столом выкладывает карту любого ранга (взятую откуда-то еще) и произвольную сумму денег. Затем банкомёт перевертывает колоду, показывает нижнюю карту и раздает по очереди все карты по две зараз. При этом в каждой паре карт первая или предыдущая благоприятна банкомёту, а вторая или последующая – противнику, так что, например, если первая оказалась королем, банкомёт забирает всё, что было поставлено на королей. Если, однако, король оказался второй картой, банкомёт должен дать каждому игроку столько, сколько тот поставил на короля. До сих пор правила игры не обеспечивали никому преимущества, но следует отметить дополнительные правила.

1. Если обе карты оказываются одного и того же ранга (подобные карты называются *дублетами* (*doublets*), а мы назовем их *близнецами*), что и [какая-то] выложенная карта, т. е. в случае, когда выгода и потеря должны были бы уравновесить друг друга, выгадывает только банкомёт и забирает всё, что было поставлено на этот ранг.

2. Каждый игрок, даже в середине игры, снова имеет право поставить дополнительные деньги на любую карту. Когда это происходит, в колоде могут оставаться лишь 1 или 2, 3 или все 4 карты этого ранга, что [соответственно] существенно повлияет на его жребий. Но следует заметить, что пара, из которой он [?] успел подсмотреть какую-то карту, полагается не имеющей значения для купленного им ранга. А если вторая карта такой пары окажется того же ранга, она не только не будет выгодна игроку, но оказывается преждевременной (trop jeune), кладет конец партии и дает возможность ее владельцу играть на другую карту. Если, с другой стороны, этот ранг появится на первой карте следующей пары, ее стоимость уменьшается (c’est une face) и банкомёт выигрывает лишь 2/3 ставки.

3. Более того, стоимость первой карты первой пары, поскольку может появиться некоторое подозрение, что банкомёт мог ее подсмотреть, всегда уменьшается и победитель получает за нее лишь 2/3 выплаты.

4. Когда остается лишь 1 карта оспариваемого ранга, возможности для появления близнецов, в которой состоит преимущество банкомёта, уже нет. В этом случае правило благоприятно банкомёту и устанавливает, что самая последняя карта, которая должна была бы быть полезной игроку, не принимается в расчет.

Предположив это, я теперь поясняю метод, при помощи которого ожидание банкомёта можно установить быстрее всего. Пусть число остающихся пар n и карт, стало быть, $2n$, а ставка противника 1. Прежде всего я полагаю, что в какой-то паре либо ни одна, либо одна карта, либо обе может (могут) может иметь тот же ранг, что и в выложенной ее владельцем карте. Если ни одна, то ясно, что от этой пары банкомёт ничего не выиграет и не проиграет. Если одна или другая карта того же ранга, то ей одинаково легко может быть любая из них (и для оставшихся в колоде карт того же ранга возможны те же [первое или второе] места в последующих **[227]** парах). И поэтому имеется столько же шансов, при которых банкомёт выигрывает или приобретает 1, и в которой он проигрывает и приобретает – 1. Поскольку они погашают друг друга, происходит громадное упрощение и остается лишь рассмотреть те случаи, при которых карты некоторой пары являются близнецами, т. е. имеют один и тот же ранг.

1. Если осталась только 1 карта этого ранга, так что близнецов быть не может, совершенно ясно, что поэтому банкомёт не имеет никакого преимущества ни от одной пары кроме последней (см. Табл. 5). Однако, поскольку последняя карта, которая могла бы быть благоприятна противнику, по Правилу 4 считается равной нулю и за счет всех пар банкомёт всегда имеет для выигрыша на 1 шанс больше, чем для проигрыша. А поскольку карт $2n$, т. е. поскольку имеется столько же случаев для расположения карты данного ранга, преимущество банкомёта во всех парах оказывается равным $1/2n$ (см. Табл. 1).

Опять же, однако, если для банкомёта стоимость следующей пары уменьшена, то из всех $2n$ случаев лишь один лишает его по Правилу 3 трети ставки, т. е. уменьшает его преимущество на [...] $1/6n$ (Табл. 2). По указанной причине это значение вычитается и из $1/2n$, и из нуля и приводит к $1/3n$ и – $1/6n$ для оставшейся выгоды банкомёта от всей игры или его потери ввиду карты из пары с уменьшенной стоимостью (Табл. 3 и 6).

2. Если остаются 2 карты данного ранга, они будут подвержены стольким вариациям или случаям, сколько пар в $2n$ картах, а именно $2n(2n – 1)/2$. Из них по одному случаю будет в отдельных парах, а во всех n парах – n случаев, которые при появлении близнецов принесут победу банкомёту. И в отдельных случаях его выгода становится равной (Табл. 5)

$1/[2n(2n – 1)/2] = 1/(2nn – n)$, а от всех случаев (Табл. 1) […] $1/(2n – 1)$.

Если какая-либо карта этого ранга оказывается на первом месте в первой паре, то ее стоимость уменьшается в соответствии с Правилом 3, так что другая карта, находящаяся безразлично на любом из оставшихся $2n – 1$ мест, приводит к появлению стольких же случаев, уменьшающих выгоду банкомёта на треть. Соответственно, это убывание оценивается как (Табл. 2) $[(2n - 1)/3][2n(2n - 1)/2] = 1/3n$. Если вычесть это из $1/(2n - 1)$ и из $1/(2nn - n)$, то его остаточная выгода от всей игры оказывается равной $(n + 1)/(6nn - 3n)$, см. Табл. 3, а выгода только от первой пары с учетом потери[15] равна $(-2n + 4)/(6nn - 3n)$, см. Табл. 6.

3. Если остаются 3 карты выбранного ранга, то различных случаев окажется столько, сколько троек в $2n$ картах, а именно [...]. Исходя из этого, я определил число близнецов, принимая во внимание, что при обеих картах оспариваемого ранга в какой-либо паре третьей может оказаться любая из оставшихся **[228]** $(2n - 2)$ карт и поэтому для этой пары будет столько же случаев. И, приняв последовательно число пар n равным 1, 2, 3, 4 и т. д., получим число этих случаев 0, 2, 4, 6 и т. д., так что во всех n парах близнецов будет 0 + 2 + 4 + 6 + и т. д. вплоть до $(2n - 2)$ = (учитывая, что это – арифметическая прогрессия) = $n(n - 1)$, а выгода банкомёта от любой пары по отдельности равна (Табл. 5)

$(2n - 2)/[2n(2n - 1)(2n - 2)/6] = 3/(2nn - n)$, а от всех вместе (Табл. 1)
$n(n - 1)/[2n(2n - 1)(2n - 2)/6] = 3/(4n - 2)$.

Если одна из этих трех карт находится на первом месте, ее стоимость понижается в соответствии с Правилом 3, а оставшиеся 2 карты могут располагаться столькими способами, сколько пар содержится в других $(2n - 1)$ картах. Поэтому выгода банкомёта уменьшается на треть в $(2n - 1)(2n - 2)/2$ случаях и это уменьшение равно (Табл. 2)

$$[(2n - 1)(2n - 2)/6]/[2n(2n - 1)(2n - 2)/6] = 1/2n.$$

Если вычесть это, с одной стороны, из $3/(4n - 2)$ и, с другой стороны, из $3/(2nn - n)$, то для оставшейся выгоды банкомёта от всех пар окажется $(n + 1)/(4nn - 2n)$, см. Табл. 3, и (Табл. 6) $(-2n + 7)/(4nn - 2n)$ для выгоды от первой пары в отдельности с учетом потери.

Таблицы (сводка)

Количество выложенных карт (от одной до четырех) данного ранга в оставшихся картах и соответствующие этому результаты. Каждую строку Бернулли называет таблицей. Зависимость между строками:
6 = 5 – 2; 1 – 2 = 3

1. Выгода банкомёта от оставшихся пар, если все они сохраняют свою полную стоимость

$1/2n$; $1/(2n - 1)$; $3/(4n - 2)$; $(4n - 5)/(4nn - 8n + 3)$.

2. Если стоимость первой пары уменьшена, выгода уменьшается на

$1/6n$; $1/3n$; $1/2n$; $2/3n$.

3. Остаток выгоды при этом варианте

$1/3n$; $(n + 1)/(6nn - 3n)$; $(n + 1)/(4nn - 2n)$; $(4nn + n - 6)/(12n^3 - 24nn + 9n)$

4. Выгода банкомёта от оставшихся пар [если первая пара не принимается в расчет – X.]

$2/(6n - 3)$; $n/(6nn - 9n + 3)$; $(nn - 2n)/((4n^3 - 12nn + 11n - 3)$;
$(4nn - 7n - 3)/(12n^3 - 36nn + 33n - 9)$.

5. Выгода банкомёта от первой пары, если она обладает полной стоимостью, без учета последующих пар

0; $1/(2nn - n)$; $3/(2nn - n)$; $6/(2nn - n)$.

6. Выгода банкомёта от пары с уменьшенной стоимостью без учета выгоды от последующих пар

$- 1/6n$; $(- 2n + 4)/(6nn - 3n)$; $(- 2n + 7)/(4nn - 2n)$; $(- 4n + 20)/(6nn - 3n)$.

[229] **4.** Если все 4 карты выложенного ранга еще скрыты в других картах, то всех возможных случаев будет столько, сколько четверок в $2n$ картах, а именно [...]. И если 2 из них оказываются близнецами в одной и той же паре, другие 2 могут изменять свое положение в оставшихся $(2n - 2)$ картах столько раз, сколько пар допускают эти оставшиеся карты. Для этих близнецов поэтому оказывается $(2n - 2)(2n - 3)/2$ случаев. Полагая последовательно, что числа пар n равны 1, 2, 3, [...] и т. д., количества случаев будут равны соответственно 0, 1, 6, 15, 28 и т. д. И поэтому число близнецов во всех n парах совместно будет равно $0 + 1 + 6 + 15 + 28$ и т. д. вплоть до $(2n - 2)(2n - 3)/2$, так что теперь надо определить сумму этого ряда. Я вижу, однако, что это возможно сделать различными путями.

Первый путь. Поскольку вторые разности членов этого ряда равны друг другу, они аналогичны фигурным числам и их сумма может быть найдена так, как было показано выше, в части 2, в конце главы 3.

Второй путь. Поскольку эти члены также совпадают с членами ряда A треугольных чисел, взятых через одного, этот ряд, который начинается с двух нулей, делится на два других, B и C. Первый из них содержит нечетные члены и совпадает с нашим рядом, а второй содержит четные члены. Аналогично, ряд C можно разделить на два ряда, B и D, так что $A = B + C =$ […] $= 2B + D$ и [...] $B = A/2 - D/2$. И поскольку число членов ряда B (также и C и D) по предположению равно n, число членов ряда A будет $2n$.

[Сумма] этого ряда A (см. главу 3 части 2) = C_{2n}^{3}, а ряда D, который является арифметической прогрессией – $n(n - 1)$. Поэтому данный ряд $B = A/2 - D/2 = n(2n - 1)(2n - 2)/6 - n(n - 1)/2 = (4n^3 - 9nn + 5n)/6$.

A	**B**	**C**	**D**
0	0	0	0
0	1	3	2
1	6	10	4
3	15	21	6
6	28	36	8

В оригинале колонка A (только она) продолжена: 10, 15, 21, 28, 36

Третий путь. По предположению, общий член ряда B равен

$(2n-2)(2n-3)/2 = [(4nn-4n)/2] - 3n + 3 = 4[n(n-1)/2] - 3(n-1)/1.$

[Сумма] всего ряда равна поэтому учетверенной сумме всех [...] без утроенной суммы всех [...]. Но мы знаем по главе 3 части 2, что $n(n-1)/2$ – треугольное, а $(n-1)$ – боковое число. И сумма всех членов $n(n-1)/2$ равна C_{n+1}^3, а сумма всех членов $(n-1)$ равна $n(n-1)/2$, **[230]** так что [сумма] ряда B равна, как и выше, [...] $(4n^3 - 9nn + 5n)/6$.

И так как было также показано, что существует $(2n-2)(2n-3)/2$ случаев для расположения близнецов в отдельных парах, а во всех парах – $(4n^3 - 9nn + 5n)/6$, то мы заключаем, что выгода банкомёта от любой отдельной пары сто́ит (Табл. 5)

$$[(2n-2)(2n-3)/2]/[2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)/24] = 6/(2nn-n),$$

а от всех вместе (Табл. 1) –

$$[(4n^3 - 9nn + 5n)/6]/[2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)/24] =$$
$$\text{(сократив на } n(n-1)/6\text{, т. е. на [...])} = (4n-5)/[(2n-1)(2n-3)] = [\ldots].$$

Теперь, если одна из четырех карт выложенного ранга оказывается на первом месте в первой паре с уменьшенной, в соответствии с Правилом 3, стоимостью, оставшиеся 3 могут изменять свое расположение столькими способами, сколько троек в оставшихся $(2n-1)$ картах. Поэтому происходит C_{2n-1}^3 случаев, в которых выгода банкомёта уменьшается на треть, так что это убывание следует полагать равным (Табл. 2)

$$[(2n-1)(2n-2)(2n-3)/18]/[2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)/24] = 2/3n.$$

Если вычесть это из найденного, – и из $(4n-5)/(4nn-8n+3)$ и из $6/(2nn-n)$, – остается с одной стороны $(4nn+n-6)/(12n^3-24nn+9n)$, см. Табл. 3, для остающейся выгоды от всех пар, и, с другой стороны, см. Табл. 6, $(-4n+20)/(16nn-3n)$ для его выгоды от одной первой пары с учетом потери.

Таким образом, из шести таблиц, приведенных французским автором [Sauveur], мы теперь закончили с пятью и следует восстановить еще одну, именно четвертую, которая показывает выгоду банкомёта по оставшимся парам, когда первая не в счет ввиду ее подсмотренной до игры карты.

Эту таблицу, однако, очень легко вычислить, если исходить из сказанного **[231]** в четырех предыдущих пунктах и обратить внимание на следующие два обстоятельства.

1. Из пар, первая карта которых была подсмотрена, вторая может быть либо того же ранга, что и у выложенной карты, либо нет. Если того же, то она не поможет и не повредит банкомёту, но по Правилу 2 преждевременно положит конец партии. Если другого ранга, то для банкомёта останется ровно столько же случаев получить ставку целиком или на две трети, сколько было бы, будь пара, принятая за нуль, несуществующей, с тем единственным различием, что число остающихся пар, раннее принятое за n, теперь полагается равным $(n-1)$.

2. Если первая карта первой пары была подсмотрена, останется только $(2n - 1)$ неизвестных карт, так что число всех случаев следует оценивать по множеству сочетаний лишь из $(2n - 1)$, а не $2n$ карт.

Поняв это, легко представить себе основание следующего действия. Обращаясь к предыдущим четырем пунктам, выберем дроби из первой и второй таблиц, но только до их сокращения[16].

1. *Выгода банкира от оставшихся пар, если все они сохранили свою полную стоимость*

$1/2n$; n/C_{2n}^2; $n(n-1)/C_{2n}^3$; $[(4n^3 - 9nn + 5n)/6]/C_{2n}^4$.

2. *Уменьшение выгоды, если стоимость первой пары уменьшена*

$(1/3)/2n$; $[(2n-1)/3]/C_{2n}^2$; $[(2n-1)(2n-2)/6]/C_{2n}^3$;
$[(2n-1)(2n-2)(2n-3)/18]/C_{2n}^4$.

Теперь же значения этих дробей изменяются, поскольку в числителях n заменяется на $(n - 1)$, а $2n$ в знаменателях – на $(2n - 1)$. Таким образом, [указанное выше] становится равным

1. $1/(2n-1)$; $(n-1)/C_{2n-1}^2$; $(n-1)(n-2)/C_{2n-1}^3$;
$[(4n^3 - 21nn + 35n - 18/6]/C_{2n-1}^4$.

2. $(1/3)/(2n-1)$; $[(2n-3)/3]/C_{2n-1}^2$; $[(2n-3)(2n-4)/6]/C_{2n-1}^3$;
$[(2n-3)(2n-4)(2n-5)/18]/C_{2n-1}^4$.

Вычитая уменьшения из соответствующих выгод, получим для Табл. 4 дроби […]

$2/(6n-3)$; $n/(6nn - 9n + 3)$; $(nn - 2n)/(4n^3 - 12nn + 11n - 3)$;
$(4nn - 7n - 3)/(12n^3 - 36nn + 33n - 9)$. **[232]**

Итак, мы воссоздали и Табл. 4. Если кто-либо сравнит таблицы господина Salvator (Sauveur) с нашими, то поймет, что в некоторых местах и особенно в последнем месте прежние должны быть несколько изменены[17]. А по поводу того, что там [его предшественником] было добавлено о соотношении возрастания или убывания выгоды банкомёта при возрастании или убывании числа карт, каждый может сразу увидеть это из таблиц и разговор об этом ни к чему не приведет.

Задача 22. Есть такого рода игры, в которых число всех случаев a, число некоторых из них – b, а число остальных $a - b = c$. Тит покупает отдельные броски кости, уплачивая деньги Каю за каждый. Сколько раз он выбрасывает один из b исходов, столько раз он получает обратно от Кая m монет, но он не получает ничего за исходы c. Если, однако, один из c случаев выпадает n раз подряд, Кай обязан вернуть все n монет. Каковы жребии Тита и Кая?

В этом роде задач, если они хорошо постигнуты, нет ничего слишком трудного, коль скоро они рассматриваются искусно. Я начну с конца, полагая, что Тит уже отдал $(n - 1)$ монет, т. е. что он столько раз выкинул один из c исходов и теперь собирается бросать n-й раз. При этом выпадет либо один из b исходов, либо снова один из c. В первом случае он получит от Кая m монет из тех n, которые уплатил ему [считая и за предстоящий бросок] и ему останется выгода $(m - n)$ монет. Во втором случае, он вернет себе в соответствии с соглашением все свои n монет и не получит выгоды и не потерпит убытка. Поэтому его выгоду можно считать равной $[b(m - n) + c \cdot 0]/a = (m - n)b/a$.

Далее я полагаю, что он сыграл $(n - 2)$ раза и каждый раз выбрасывал один из c исходов, теперь же наступил $(n - 1)$-й бросок. Поэтому, если он выбросит один из b исходов, от Кая последует m монет из тех $(n - 1)$, которые он уплатил, и удержит в качестве своей выгоды $(m - n + 1)$. Если же он снова выбросит один из c исходов, то окажется в положении, в котором был при предшествующем предположении и получит $(m - n)b/a$. И его жребий теперь

$$[b(m - n + 1) + c(m - n)b]/a = [(m - n + 1)ab + (m - n)cb]/aa.$$

Далее я предполагаю, что он $(n - 3)$ раза выбросил один из c исходов, а теперь собирается играть $(n - 2)$-й раз. Либо он выгадает $(m - n + 2)$ монет, которые останутся у него, но из них надо будет вычесть последовательно выплаченные им $(n - 2)$, и это произойдет, если он выбросит один из b исходов, либо, если выбросит один из c, снова окажется в положении предыдущего предположения. И его жребий теперь равен

$$[b(m - n + 2) + c \cdot (\text{предыдущий жребий})]/a =$$
$$[(m - n + 2)\, aab + (m - n + 1)\, acb + (m - n)\, ccb]/a^3.$$

Теперь же я предполагаю, что Тит выбросил один из c исходов $(n - 4)$ раза и готов играть $(n - 3)$-й раз. Равным образом ясно, что, как и прежде, у него b шансов получить выгоду в $(m - n + 3)$ монет, которые останутся у него за вычетом $(n - 3)$-х, отданных Каю. И у него c шансов оказаться в положении, в котором он был при предыдущем предположении, что приводит к его жребию, равному

$$[b(m - n + 3) + c\, (\text{предыдущий жребий})]/a =$$
$$[(m - n + 3)\, a^3b + (m - n + 2)\, aacb + (m - n + 1)accb + (m - n)\, c^3b]/a^4.$$

[233] И так можно перемещаться дальше назад, если в этих усилиях есть еще какая-то польза, предполагая, что Тит сыграл $(n - 5)$, $(n - 6)$ и т. д. раз, но этого, по правде сказать, не требуется, поскольку из сказанного уже достаточна ясна суть закономерности. Мы легко заключаем, что его жребий в начале игры, до бросков, равен

$$[(m - 1)\, a^{n-1}b + (m - 2)\, a^{n-2}cb + (m - 3)\, a^{n-3}ccb + [\ldots] + (m - n)\, c^{n-1}b]/a^n,$$

или, собирая отдельно члены с противоположными знаками,

$$mb[(1/a) + (c/aa) + (cc/a^3) + [\ldots] + (c^{n-1}/a^n)] -$$
$$b[(1/a) + (2c/aa) + (3cc/a^3) + [\ldots] + (nc^{n-1}/a^n)].$$

Эта величина, стало быть, состоит из двух частей, первая – положительная и вторая – отрицательная. Первая продолжается [по закону] геометрической прогрессии, а вторая – как ряд, составленный из сочетания геометрической и арифметической прогрессий. Суммы этих частей определяются по известным правилам[18] и равны соответственно

$m\,(a^n - c^n)/a^n$, $[(a^n - c^n)/a^{n-1}b] - nc^n/a^n$.

Разность этих двух сумм выражает искомое, т. е. выгоду Тита и потерю Кая, если положительная часть больше [...] или потерю Тита и выгоду Кая, если [...]. Отсюда следует, далее, что если их приравнять друг другу, можно будет определить такие значения букв m и n, при которых жребии Кая и Тита сравнялись бы. Пусть [они будет равны друг другу], тогда деление обеих частей равенства на $(a^n - c^n)/a^n$ приводит к $m = a/b - nc^n/(a^n - c^n)$. Если отыскивать n по заданному m, то это уравнение можно записать как [...] и

$(a^n - c^n)/c^n = n[(a/b) - m] =$
$bn/(a - bm)$ и [производная пропорция] $a^n/c^n = (a - bm + bn)/(a - bm)$.

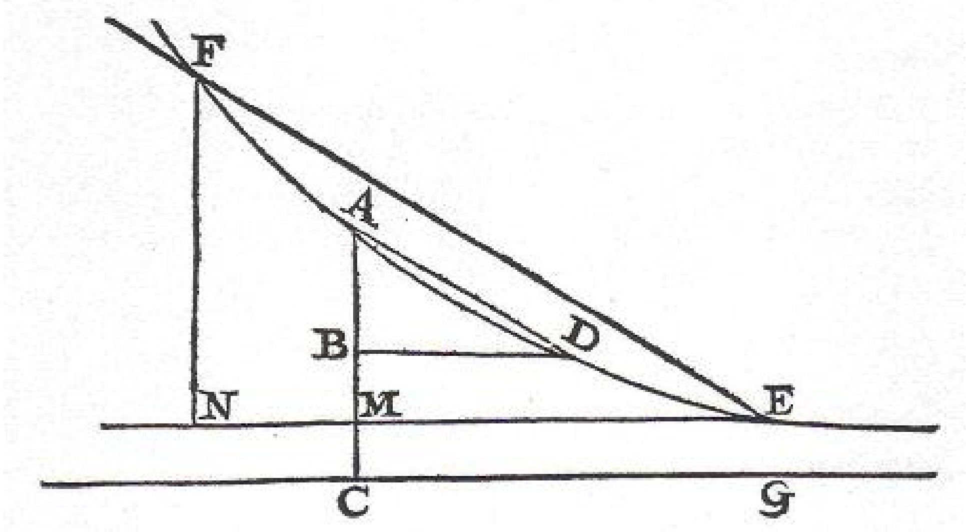
Далее, суммы логарифмов крайних и средних членов будут равны, т. е. конечно же,

$n \lg a + \lg(a - bm) = n \lg c + \lg(a - bm + bn)$, […]

и при $b = 1$

$n = [\lg(a - m + n) - \lg(a - m)]/(\lg a - \lg c)$. **[234]**

Я могу это легко иллюстрировать построением логарифмической кривой[19]. Пусть *FADE* – любая логарифмическая кривая. Отложим на некоторой аппликате [ординате] *AC* такую точку *B*, чтобы $AB/BC = b/c$. Примем *AB* за единицу и на той же ординате *AC* отложим $AM = m$. Через *B* и *M* проведем прямые *BD* и *ME* параллельно оси *CG*, встречающие



кривую в D и E. Соединим A и D и проведем EF, пересекающую кривую в точке F, параллельно AD, наконец из F опустим ординату FN, встречающую продолжение прямой EM в точке N; и тогда FN будет искомым значением числа n.

Рассмотрим для примера такую игру. Тит берется [сразу] выбросить 2 шестерки на двух костях. Выплачивая по монете за каждый бросок, он предлагает Каю, чтобы в случае успеха тот в свою очередь уплатил ему 6 монет и ничего не платил в противном случае. Однако, если Тит 20 раз подряд не достигнет цели, все его 20 монет вернутся к нему.

Для двух костей имеет место 36 случаев и лишь один из них приводит к двум шестеркам. Значение букв таково: $a = 36$, $b = 1$ и, стало быть, $c = 35$ и конечно $m = 6$ и $n = 20$. При помощи логарифмов мы можем теперь быстро найти, что $(c/a)^{20}$ или $c^n/a^n = 5693/10\,000$ и поэтому

$m(a^n - c^n)/a^n = [\ldots] = 25\,842/10\,000$. Аналогично, вторая часть
$[(a^n - c^n)/a^{n-1}b] - nc^n/a^n$ $[\ldots] =$
$36 - 56 \cdot 5693/10\,000 = [\ldots] = 41\,192/10\,000$.

При объединении этих двух частей, оказывается, что окончательный результат $-\ 15\,350/10\,000 = -\ 307/200$, несколько больше [по абсолютной величине], чем 3/2. Это означает, что Тит может начать игру лишь с невыгодой для себя и что лучше бы он сразу же отступился от обязанности играть, даже уплатив за это полторы [монеты]. Если, однако, увеличить m или уменьшить n, игру можно было бы отрегулировать так, что никто не имел преимущества. Если, оставив $n = 20$, m сделать равным 9 2429/4307, или, оставив $m = 6$, положить $n = 11$ или 12, жребии игроков окажутся сближенными почти до равенства. В подобных играх я замечаю, что, вообще

1. Если, при данных a, b, c и m, буква n последовательно принимает значения чисел 1, 2, 3, [...] и т. д., выгода Тита (именно того, чей жребий в случае $n = 1$ всегда превышает жребий Кая) всё снова и снова возрастает до некоторого значения[20].

2. Его положение становится наилучшим при $n = m - 1$ или $n = m$ и притом одним и тем же при каждом из этих предположений.

3. При дальнейшем возрастании n до бесконечности его жребий станет убывать, снова непрерывно, до тех пор, пока выгода часто не превратится в убыток, а затем жребий Кая станет преобладающим.

[235] 4. Если отбросить последнее условие, – возврат монет Титу при его неудаче n раз подряд, – выгода или потеря при очень большом или бесконечном n всегда будет относиться к тому, что происходит при одном броске, как a:b, как большее к меньшему. Поскольку последнее отношение по Следствию 6 к [Замечаниям к] Предложению 3 части 1 становится равным $[b(m - 1) + c\,(-1)]/a = [\ldots] = (bm - a)/a$, то первое будет равно $(bm - a)/b$ и действительно каждое из них окажется одновременно либо выгодой для Тита, т. е. потерей для Кая, либо наоборот в зависимости от того, полагать ли bm превышающим или меньшим, чем a.

Задача 23. Об игре со слепыми костями (blinde Wurfell)

Так называются 6 костей, имеющиеся у большинства наших коробейников. Они той же кубической формы как и обычные кости, но выглядят безглазыми. Точки выбиты лишь на одной грани каждой такой кости: на одной – 1, на другой – 2, на третьей – 3 и вплоть до шести точек на одной из граней. Таким образом, всего [на них] выбито только 1 + 2 + [...] + 5 + 6 = 21 точка.

Мошенники выставляют кости такого рода на ярмарках, чтобы обманывать народ, указывая и выплаты, которые можно увидеть на приложенной нами таблице, за все очки от 1 до 21. Тот, кто хочет попытать свое счастье, платит коробейнику монету и бросает кости на поднос. Выбросив некоторое число очков, он забирает назначенную за них выплату, но если он не выкинет ни одного очка, то теряет свою монету. Приняв эти [условия], каждый, кто желает исследовать жребий этого игрока, должен заметить следующее.

1. Число всех случаев для шести подобных костей, также как и для обычных костей, равно 46 656, а именно шестой степени шести, что было показано [Гюйгенсом] в части 1, в дополнении к Предложению 9 [см. Прим. 2].

2. Число случаев, при которых вообще не вскрывается ни одно очко, равно шестой степени пяти, т. е. 15 625, потому что на каждой кости 5 пустых граней, каждая из которых может соединяться с любой пустой гранью другой кости и каждое такое сочетание может снова соединяться с пустыми гранями третьей [и т. д.], так что с добавлением новой кости число предшествующих случаев всегда возрастает в 5 раз.

3. Любое число очков может быть получено на одной, двух или более костей. Если на одной, на остальных пяти костях не будет ни одного очка. Поэтому, раз на каждой кости 5 пустых граней, число случаев, при которых это имеет место, равно 3125, пятой степени пяти. Если очки вскрылись на двух костях, ни одного очка на оставшихся четырех не будет, так что теперь, рассуждая таким же образом, получим число возможных случаев 625, т. е. равное четвертой степени пяти. Так же само, если очки появились на трех, четырех, пяти костях, их не будет на трех, двух и одной кости и количества случаев оказываются равными 125, 25 и 5 [...].

4. Одно и то же количество очков часто может вскрыться не только на большем или меньшем числе костей, но иногда несколькими способами на их одном и том же числе. Так, 12 очков может быть получено на трех костях тремя путями, – 1, 5, 6 или 2, 4, 6, или 3, 4, 5, – и на четырех костях двумя способами, – 1, 2, 3, 6 или 1, 2, 4, 5. **[236]** Чтобы не пропустить ни один такой способ составления [заданного] числа очков, мы будем в общем следовать тому же методу как выше, в Задаче 17, выписав по порядку все количества очков от 1 до 21 [выписав все эти числа].

Я учитываю все сочетания первых шести цифр [начиная с единицы] и по одному, 1, 2, [...], 5, 6, – и по 2, 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4 и т. д. и также 2 + 3, 2 + 4 и т. д., 3 + 4 и т. д., и т. д. Затем по 3, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 4 и т. д., по 4, по 5 и, наконец, по 6, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, записывая отдельные сочетания сразу же правее числа, равного их сумме. Так, поскольку пары 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4 и т. д. приводят к суммам 3, 4, 5 и т. д., я записываю их справа от очков [чисел] 3, 4, 5 и т. д. и аналогично во всех других случаях. После этого я очень легко определяю числа случаев, соответствующих отдельным количествам очков, устанавливаю, что существует 3125 случаев для способов получения [того или иного числа] очков на одной кости, на двух костях – 625, на трех, четырех, пяти – 125, 25 и 5 случаев.

Поскольку 12 очков, как мы сказали выше в Замечании №3, могут быть получены на трех костях тремя способами, и двумя – на четырех костях, то число случаев, при которых может вскрыться 12 очков будет трижды 125 и дважды 25, т. е. 425, и я записываю это число в присоединенной таблице [колонке]. Следуя этому методу без исключений, и получив сумму всех случаев равную 46 656, т. е. шестой степени шести, я буду уверен, что не пропустил ни одного способа [составления различного количества очков].

После составления этой таблицы не остается ничего другого, как перемножить отдельные количества случаев на соответствующие выплаты и разделить сумму полученных произведений на 46 656, чтобы определить искомый жребий игрока. Вычисленный таким образом, он становится равным

$$[15\,625 \cdot 0 + 26\,125 \cdot 1 + 4400 \cdot 2 + 435 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 5 \cdot 12 + 5 \cdot 45 + 1 \cdot 90]/46\,656 = 36\,875\,/46\,656,$$

так что игрок, если он хочет играть на равных, должен уплатить именно такую долю монеты. А если он платит коробейнику целую монету, то оставшуюся долю монеты, 9781/46 656, следует считать его потерей и выгодой обманщика.

Таблица для слепых костей [236 – 237]

Наименование колонок: 1 – Число очков; 2 – Различные способы их вскрытия; 3 – Общее количество случаев для всех способов; 4 – Выплаты. Бернулли здесь снова указал общее количество случаев (46 656) и дополнительно выписал величины 5^n и 6^n для $n = 1, 2, ..., 5, 6$

0		15 625	0
1		3125	1
2		3125	1
3	1 + 2	3750	1
4	1 + 3	3750	1
5	1 + 4 = 2 + 3	4375	1
6	1 + 5 = 2 + 4 = 1 + 2 + 3	4500	1
7	1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 1 + 2 + 4	2000	1
8	2 + 6 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4	1500	1
9	3 + 6 = 4 + 5 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4	1625	2
10	4 + 6 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4	1025	2
11	5 + 6 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 5	1025	2
12	1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5	425	2
13	2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 6 = 1 + 2 + 4 + 6 1 + 3 + 4 + 5	300	2
14	3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 5 + 6 = 1 + 3 + 4 + 6 = 2 + 3 + 4 + 5	200	3
15	4 + 5 + 6 = 1 + 3 + 5 + 6 = 2 + 3 + 4 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5	180	3
16	1 + 4 + 5 + 6 = 2 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 4 + 6	55	3
17	2 + 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6	30	4
18	3 + 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5 + 6	30	5
19	1 + 3 + 4 + 5 + 6	5	12

20	2 + 3 + 4 + 5 + 6	5	45
21	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	1	90

[237] Задача 24. Приняв снова условия предыдущей задачи и допустив, что руководитель игры обуславливается с игроком, что будет обязан вернуть ему все его монеты, если тот не выбросит ни одного очка в пяти попытках подряд, определить, каковы будут жребии каждого.

Я когда-то видел коробейника, который, чтобы заманить окружавших его, предложил это дополнительное условие, что и представило мне случай впервые подумать о рассмотренном выше в качестве Задачи 22. Поскольку ее решение было указано в общем виде, ничего больше не остается для обдумывания, надо лишь заменить буквы, которые были там применены, числами.

На основе предыдущего установлено, что число всех случаев с шестью слепыми костями равно 46 656, а число случаев, при которых не вскрывается ни одно очко, – 15 625 и число остальных случаев – 31 031. Поэтому значения букв в нынешней задаче таковы: a = 46 656, b = 31 031 и c = 15 625. И очевидно, что по предположению $n = 5$, а значение m по Следствию 3 [в Замечаниях к] Предложению 3 части 1 может быть сведено к среднему 36 875/31 031 и, поскольку имеется 31 031 случай получить 36 875/31 031 и 15 625 случаев ничего не получить, ожидание игрока, как было определено выше [в Задаче 23], равно 36 875/46 656. Вот вычисления:

a = 46 656, lg a = 4.6689075; c = 15 625, lg$c$ = 4.1938200;
a/b = 46 656/31 031, lgc/a = […] = – 0.4750876; m = 36 875/31 031, n = 5;
$(a/b) - m$ = […], $(a/b) - m + n$ = […] = 164 936/31 031;
lg $[(a/b) - m + n]$ = 0.7255195; […];
lg $[(a/b) - m + n]$ + lg(c^n/a^n) = – 1.6499179.

Отсюда

$[m (a^n - c^n)/a^n] - [(a^n + c^n)/(a^{n-1}b)] + n(c^n/a^n)]$ = […] =
$m - (a/b) + [(a/b) - m + n](c^n/a^n)$ = – (31 520/100 000) + (2239/100 000)
= – 29 281/100 000. **[238]**

Однако, в Задаче 22 было показано, что эта величина выражает потерю игрока, которая, действительно, в предыдущей задаче была найдена равной 9781/46 625 = 20 964/100 000, меньшей в отношении примерно равном 3:2 [т. е. примерно равной (2/3) ·(29 281/100 000)].

И поэтому условие возврата игроку его монет, которое старый лис видимо предлагал в пользу игрока, скорее склоняется к его потере[21]. В остальном я замечаю, что, даже если коробейник захотел бы ограничить себя возвратом монет сразу же после двух неудачных бросков, он мог бы сделать это с небольшой выгодой для себя.

Примечания переводчика

1. В приложенной схеме указаны равные жребии A и B для победы над одним, двумя, …, и всеми пятью остальными игроками, а именно

1/2, (1/2) ·(2/3), (1/2) ·(2/3) ·(4/5); […], т. е. 1/2, 1/3, 4/15, 32/135, 512/2295. Жребии остальных игроков, после подобных вычислений, оказались равными соответственно

1/3, 2/9, 8/45, 64/405; 11/45, 22/135, 88/675; 5/27, 10/81; 181/1275. Буквой *P*, см. ниже, Бернулли фактически обозначил любого победившего игрока, предшествующего данному.

2. В Предложении 9 Гюйгенс заметил, что у четырех обычных костей число бросков равно 6^4.

3. Бернулли сослался на свою с. 20, на которой, однако, расположен текст Гюйгенса; Хаусснер исправил эту ошибку без комментариев.

4. Бернулли ошибочно указал, что число случаев, при которых *A* не получает ничего, равно 138 [замечено Силлой (с. 265). Впрочем, знаменатель 1716 был верен].

5. Хаусснер (с. 181) исправил ошибочный числитель *acc* в выражении для жребия *B*.

6. Зевс пригласил на Олимп царского сына Иксиона, тот же попытался овладеть его женой, Герой (которую отождествляют с Юноной). Зевс, однако, подсунул Иксиону облако вместо Геры. См. *New Enc. Brit.*, 15-е изд., т. 6, 1997, с. 447 и 657 (статьи Ixion и Juno).

7. Todhunter (1865, p. 68) и Хаусснер (с. 305 – 306) заметили, что ложное решение фактически относилось к иной задаче и потому не могло совпадать с истинным, т. е. с тем, которое действительно относилось к требуемому вопросу.

8. А как же его предположенная девятка?

9. Ибо у противника должно быть 4 карты на руках.

10. Что сразу же следует, если принять $p + q = m + n = 1$. Заметим, что в формуле Бернулли для x/y (см. ниже) отсутствует параметр m.

11. Бернулли неверно выписал правую часть последующего выражения, которое мы исправили.

12. Здесь и в двух случаях ниже Хаусснер (с. 306) несколько уточнил оценки погрешности, которые указал Бернулли.

13. Это предположение для произвольного числа игроков рассмотрел Хаусснер (с. 306 – 308).

14. Todhunter (1865, pp. 46 – 47) сообщает, что Sauveur получил указанную должность после того, как опубликовал свое исследование этой игры (см. ниже).

15. В пункте 6 Таблицы, что на с. 228 издания 1975 г., Бернулли написал *damnum oeconomi* (потеря банкомёта), но это никак не соответствовало соотношению строк 6 = 5 – 2. Здесь же, равно как и в самом конце пунктов 3 и 4, в оригинале указано *pro damno* и мы во всех этих случаях с натяжкой перевели это выражение как *выгода с учетом потери*. Хаусснер (с. 218, 214, 215 и 217) во всех четырех случаях написал просто *выгода.*

16. Бернулли чуть изменил заглавие Таблицы 2. Более того, в соответствии с новыми условиями прежнее соотношение между строками таблиц 1 – 2 = 3 теперь заменится на 1 – 2 = 4, см. ниже. Далее, дроби Бернулли фактически выбрал не из самих таблиц, а из предшествующего основного текста.

17. Todhunter (1865, p. 46) заметил, что эту критику следовало бы смягчить.

18. Заметим, что отрицательная часть жребия (знак которой нам здесь неинтересен) при $n \to \infty$ будет равна $(b/a)[1 - (c/a)]^{-2}$ и сам Бернулли упомянул раннее формулу для суммы соответствующего бесконечного ряда (Bernoulli 1689 – 1704, 1692, p. 91). С другой стороны, Todhunter (1865, p. 179) доказывает по индукции формулу для суммы первых n членов разложения $(1 - r)^{-p}$, которая для $p = 2$ имеет вид $[1 - r^n(1 + n) + nr^{n+1}]/(1 - r)^2$. Нам, однако, не удалось согласовать эту формулу с окончательным выводом Бернулли (см. ниже).

19. Кривая на рисунке в оригинале не является логарифмической; Хаусснер правильно назвал ее показательной и обосновал рассуждение Бернулли. Ср. Прим. 17 к части 1.

20. Слова *всегда* (*semper*), равно как и *часто* (*saepè*) в пункте 3 ниже, видимо относились к значениям параметров a и c, но во втором случае неясно, постоянно ли m или нет (также ниже, в пункте 2, Бернулли очевидно принял, что m переменно). При $n = 1$ жребий Тита равен $[(a - c)/a](m - 1)$.

21. Этот вывод противоречит здравому смыслу; Хаусснер (с. 228), который явно был математиком (что в данном случае и не обязательно), такого замечания не сделал. Он, правда, не воспроизвел вычислений Бернулли ввиду их “слишком незначительного интереса”, но повторил его общее заключение. Бернулли принял $m \approx 37/31$ и сослался при этом на свою Задачу 22, хотя тогда ему следовало бы положить $m = 5$, что сразу же опровергло бы его вывод.