Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики
вып. 2

Chrestomatia po Istorii Teorii Veroiatostei i Statistiki
No. 2

Составитель и переводчик О. Б. Шейнин
Берлин, 2007

Оглавление

Предисловие переводчика

Этот сборник можно считать продолжением нашей Хрестоматии*, но в отличие от той он почти не имеет отношения к статистике, чем и вызвано изменение заглавия. Сказанное там в Предисловии по поводу появления и длительного почитания негодных книг и статей остается в силе, равно как и наше убеждение в том, что переводы классической литературы окажутся полезным подспорьем в научной и педагогической работе.

Мы не смогли проверить приводимые класиками формулы. Это потребовало бы слишком много сил и времени; достаточно сказать, что, например, переведенная нами глава 4-я *Аналитической теории вероятностей* Лапласа справедливо считается очень трудной для чтения.

Изучение сочинений Пуассона невольно напоминает о его пренебрежении обработкой конечного числа наблюдений, т. е. тем, чем разумно ограничила себя классическая теория ошибок Гаусса и его последователей. Лишь частично это можно объяснить правдоподобной досадой Пуассона (но не Лапласа), вызванной справедливыми обвинениями Гаусса Лежандром (см. здесь), второй же причиной, видимо, явилось его сильнейшее желание продолжать труды Лапласа. Пуассон не упомянул даже мемуара Гаусса 1816 г. об определении точности наблюдений, который не был непосредственно связан с методом наименьших квадратов.

Читатель заметит, что только Пуассон, да и то далеко не всегда, применял нынешнее обозначение определенного интеграла; он сам** указал, что это обозначение начало внедряться “лишь недавно”. Не употреблялись и введенные нами обозначения для мнимой единицы, для числа сочетаний и факториала, не были еще окончательно приняты обозначения *e* (вместо этой буквы Лаплас применял букву *c*) и π.

Мы приняли сокращения МНКв – метод наименьших квадратов; ЦПТ – центральная предельная теорема; и, в библиографиях, ОС – *Oeuvres complètes*.

*Шейнин О. Б. (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин.

**Poisson S. D. (1830), Formules des probabilités, rélatives au résultat moyen des observations …*Mémorial de l’artillerie*, No. 3, pp. 141 – 156 (p. 144).

Галилео Галилей

Предисловие переводчика

Мы перевели заметку Галилея (1564 – 1642) об игре в кости. Его *Рассуждения*, конечно же, элементарны, однако они, видимо, были вполне уместны в его время; он сам указал, что “изложил свои мысли”, выполняя обязательство перед кем-то. Одно обстоятельство следует уточнить. Галилей указал, что шансы выпадения 9 и 10 очков на трех костях равны 27 и 25 соответственно и что более частое выпадение первого исхода было подмечено игроками. Если исходить из разности соответствующих вероятностей, $P(A)$ и $P(B)$, равной 0.00926, то трудно поверить в его свидетельство. Однако, игроки могли подметить намного бóльшую разность между $P(A/A$ или $B)$ и $P(B/A$ или $B)$: 27/52 – 25/52 = 0.0385.

Заметим, что Паскаль и Муавр сообщили о подобных же эмпирических выводах для разностей вероятностей, равных 0.0264 и даже 0.0160 соответственно (Шейнин 1977, pp. 235 – 236).

Английский перевод *Рассуждений* см. в книге Дейвид (1962, pp. 192 – 195).

Галилей также обработал несовпадающие результаты наблюдений несколькими астрономами параллакса Новой звезды 1572 г. под условием минимума суммы абсолютных поправок в них. Ввиду заведомой невозможности измерения параллакса звезд в те времена его выводы никак нельзя считать убедительными, однако он попутно сформулировал ряд положений не существовавшей еще теории ошибок, см. Хальд (1990, pp. 149 – 160).

Наконец, изучая солнечные пятна, Галилей (1613) сумел отделить основную составляющую их вращения вместе с солнечным диском от их случайного собственного движения. Тем самым он определил период вращения Солнца, – один лунный месяц (по современным данным, 24.5 – 26.5 суток). По свидетельству Марко Поло (конец XIII в.), существование солнечных пятен было известно китайским астрономам (Шейнин 2005).

Рассуждения об игре в кости

Galilei G. (1718, итал.), Sopra le scoperte dei dadi. Англ. перевод (E. H. Thorne, без англ. заглавия) в книге David F. N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. London, pp. 192 – 195.

То обстоятельство, что при игре в кости определенные числа более благоприятны, чем другие, имеет весьма очевидное основание, а именно некоторые выбрасываются легче и более часто, чем остальные, и это зависит от их возможности составляться более разнообразными количествами чисел. Так, 3 и 18 это броски, которые можно осуществить тремя числами только одним путем (второе при при 6.6.6, а первое при 1.1.1 и никак не иначе). Их труднее выкинуть, чем, скажем, 6 или 7, которые могут быть составлены несколькими способами, т. е. 6 – как 1.2.3 и [...], а 7 – как 1.1.5, […]. Тем не менее, хотя 9 и 12 могут быть открыты стольким же числом способов, скольким 10 и 11, и потому должны были бы считаться равными по пользе последним, известно, что длительные наблюдения заставили игроков считать 10 и 11 более благоприятными, чем 9 и 12. И ясно, что 9 и 10 можно составить одним и тем же разнообразием комбинаций номеров (и это также верно для 12 и 11), потому что 9 составляется как 1.2.6, 1.3.5, [...] , т. е. шестью тройками чисел, а 10 – как 1.3.6, 1.4.5, […] и никак не иначе, и комбинаций здесь тоже шесть.

И я, чтобы выполнить обязательство перед тем, кто приказал мне представить, что бы ни пришло мне на ум по поводу подобной задачи, изложу свои мысли в надежде не только решить ее, но и открыть дорогу к точному пониманию оснований. Поэтому я установил и расположил все подробности игры с большим вниманием и рассудительностью.

И, чтобы добиться своей цели с наибольшей ясностью, на которую я только способен, я начну с рассмотрения как, поскольку игральная кость имеет 6 граней и при броске может одинаково легко упасть на любую из них, с ней можно выбрать только 6 бросков[1], каждый из которых отличен от всех остальных. Но если вместе с первой костью кинуть вторую, которая также имеет 6 граней, то можно будет выкинуть 36 бросков, каждый из которых отличен от всех остальных. Потому что каждая грань первой кости сочетается с каждой гранью второй и, стало быть, приводит к шести различным броскам, так что ясно, что таких комбинаций окажется шесть раз шесть, т. е. 36. А если добавить третью кость, то раз каждая из ее шести граней может сочетаться с каждой из 36 комбинаций двух других костей, мы найдем, что число комбинаций трех костей равно 6 раз 36, т. е. 216, каждая из которых отлична от остальных.

Но поскольку чисел [сумм] в комбинациях бросков только 16, т. е. 3, 4, 5, и т. д. вплоть до 18, и среди них надо распределить эти 216 бросков, необходимо, чтобы некоторым из них принадлежало много бросков. И если мы сможем установить, сколько принадлежит каждому, мы тем самым подготовим путь, чтобы выяснить то, что хотим знать и этого будет достаточно, чтобы исследовать [суммы очков] от трех до десяти, потому что то, что относится к одному из этих чисел, относится и к тому, которое непосредственно больше[2].

Для ясного понимания дальнейшего нужно отметить три обстоятельства. Первое, сумма очков на трех костях, составленная из трех одинаковых чисел, может быть получена только при одном броске. Так, 3 может быть составлено только из трех единиц, а 6, если оно должно состоять из трех двоек, можно [также] выкинуть только при одном броске. Второе, сумма трех чисел, два из которых те же самые, а третье – другое, может быть получена тремя путями. Так, 4, которое составлено из двойки и двух единиц, может быть получено при трех различных бросках, т. е. когда 2 очка выпадет на первой кости, а на второй и третьей – 1, или 2 очка на второй кости, а [...]. И также, например, 8, когда оно составлено как 3.3.2, может быть получено тремя путями, т. е. когда 2 открылось на первой кости, а на каждой их других – 3, или [...]. Третье, сумма очков, состоящая из трех различных чисел, может быть составлена шестью путями.Так, например, 8, составленное как 1.3.4, может быть получено при шести различных бросках: первый, когда на первой кости открылось 1, на второй – 3 и на третьей – 4, второй – когда [...].

Итак, мы пока что высказали эти три основных положения. Первое, что тройки, т. е. суммы очков броска трех костей, составленные из трех одинаковых чисел, могут быть получены только одним путем; второе, что тройки, составленные из двух одинаковых чисел и третьего, отличающегося от них, – тремя путями; и третье, что те тройки, которые составлены тремя различными числами, составляются шестью способами.

Из этих основных положений мы можем легко вывести, сколькими способами, или, точнее, при скольких различных бросках могут быть получены все суммы очков на трех костях. Это легко понять из следующей таблицы. Сверху указаны суммы очков, от десяти до трех, при различных бросках, под ними – различные тройки, из которых каждая из этих сумм может быть получена, а внизу приведены суммы чисел всех возможных способов осуществления этих бросков. Так, например, первый столбец соответствует сумме очков 10 и в таблице указаны 6 троек, из которых 10 может состоять, – 6.3.1, 6.2.2, [...]. И поскольку первая тройка, 6.3.1, получена тремя различными числами, она (как высказано выше) осуществима при шести различных бросках, так что рядом с тройкой 6.3.1 помещено число 6. А так как вторая тройка, 6.2.2, получена двумя одинаковыми числами и третьим, отличным от них, она может осуществиться только при трех бросках, так что число 3 помещено [...] и так далее со всеми остальными тройками. И, наконец, под столбцами количеств бросков указаны их суммы. Там можно увидеть, что сумма очков, равная 10, осуществляется при 27 бросках, а сумма 25 – только 25-ю, 8 очков – при 21 броске, [...] и, наконец, 3 – при одном броске, а все вместе эти суммы дают 108. И поскольку для бóльших сумм очков, т. е. для 11, 12, […], 18, числа бросков оказываются аналогичными, то мы получаем сумму всех возможных бросков, которые могут появиться на гранях трех костей, равную 216. И по этой таблице каждый, кто понимает игру, может очень точно измерить все преимущества, сколь бы малы они ни были для zara, incontri и любого другого специального правила или термина, встречающегося в этой игре[3]. **Примерно 20 строк выше упоминается таблица. Поместите ее в том месте.**

Примечания

1. Эта фраза неудачна.

2. Это неточно.

3. Самый левый столбец, о котором автор ничего не сказал, повторяет в обратном порядке последнюю строку таблицы.

Библиография

Шейнин , О. Б. (Sheynin, O. B.), (1977), Early history of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 17, pp. 201 – 259.

--- (2005), Early discovery of sunspots. *Journal*, vol. 99, No. 3, p. 83.

Galileo G. (1613, итал.), History and demonstrations concerning sunspots and their phenomena. В книге автора *Discoveries and Opinions of Galileo*. Garden City, New York, 1957, pp. 88 – 144.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their*

Applications before 1750. New York.

Блез Паскаль

Предисловие переводчика

В 1654 г. Паскаль (1623 – 1662) и Пьер Ферма обменялись несколькими письмами, положив начало формальной истории теории вероятностей, их перевод см. Шейнин (2006, с. 8 – 27). Важная решенная ими задача известна под названием раздела ставки в прерванной серии азартных игр, см. также в этом разделе §2.3, но быть может самым существенным в их переписке было введение в теорию вероятностей того, что было позднее названо математическим ожиданием случайной величины.

Переведенные ниже трактаты Паскаля были напечатаны в 1654 г., но опубликованы лишь посмертно, в 1665 г. (Татон 1974). Методически *Трактат об арифметическом треугольнике* недоработан, видимо потому, что Паскаль, как известно, примерно после 1650 г. отошел от научных исследований. Обозначения ячеек арифметического треугольника явно неудачны. Индексов, правда, в то время еще не применяли, но по крайней мере в законченной работе не следовало расставлять буквы (и латинские, и греческие) вперемежку; взамен них мы ввели обозначения типа a_{ij}. Далее, *параллельные* и *перпендикулярные ранги* можно было заменить *строчками* и *столбцами* (как мы и поступили), а само понятие арифметического треугольника у Паскаля было несколько расплывчатым: фактически его рисунок содержал 10 треугольников (в соответствии с произвольно выбранным числом диагоналей – их *оснований*) и в самом тексте он рассуждал о треугольниках во множественном числе, однако в первых же строках он упомянул единственный треугольник. Наконец, некоторые формулировки недостаточно определенны; впрочем, сопутствующие примеры помогают понять изложение.

Общее содержание трактатов, конечно же, известно, а Эдвардс (1987) исследовал и близкие темы начиная с древности. Особо укажем, что Паскаль первым в новое время ввел метод полной индукции, который ведет начало с Леви бен Гершона (Рабинович 1970), притом не только в Следствии 12, §1, упоминаемом по этому поводу многими комментаторами, но и в §2.2, в Предложении 1, и в §2.3.1, в Задаче 1. (Мы сами разбили изложение на отдельные параграфы.)

Мы постарались держаться близко к оригиналу, но во многих случаях выпустили элементарные арифметические действия и излишние для научной работы рассуждения, заменив всё это символами […].

Доводы Паскаля о существовании Бога (его “Пари”) недостаточно четки. Непонятно, почему надо рисковать своей жизнью (быть может – “зловонными удовольствиями”?), пусть даже в обмен на ожидание чего-то бесконечно большого. Суть этого пари, однако, в следующем: следует ставить на один шанс за бесконечный выигрыш против конечного числа шансов за конечный (и даже бесконечный?) проигрыш. Математическое ожидание выигрыша оказывается таким образом бесконечным. Можно сказать, что Паскаль ввел случайную величину с бесконечным ожиданием задолго до Николая Бернулли с его петербургской игрой, но вряд ли это звучит убедительно. Мы, однако, привели отрывок из его рассуждения, поскольку его комментировали многие авторы и поскольку оно всё же интересно с точки зрения принятия статистических решений (Хакинг 1975, pp. 63 – 72).

Добавим также, что Лаплас (1814/1999, с. 849, правый столбец – 850, левый столбец), который в отличие от Ньютона был атеистом, отрицал вывод Паскаля. Если свидетель (да, Лаплас полагал, что о бесконечных жизнях и т. д. мог сообщить только какой-то неведомый свидетель) утверждает нечто совсем необычное, тем более сверхъестественное, то он тем самым только ослабляет вероятность своих показаний "до такой степени, что обращает ее в бесконечно малую величину или в нуль". Впрочем, критика Лапласа с равным успехом относится ко всем сверхъестественным событиям, описанным в Библии.

I. Трактат об арифметическом треугольнике с несколькими небольшими трактатами на ту же тему

Pascal B. (1665), Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière. OC, t. 1. Paris, 1998, pp. 282 – 327.

[1] Трактат об арифметическом треугольнике

Дать чуть ниже рисунок!

Определения. Арифметическим треугольником я называю фигуру, построение которой таково. Из любой точки *O* я провожу две взаимноперпендикулярные прямые, *OA* и *OB*, и в каждой беру сколько мне угодно равных и смежных частей начиная с *O* и обозначаю их 1, 2, 3, 4 и т. д. И эти номера указывают деление прямых [на части]. Затем я соединяю [концы] первого отрезка каждой из двух прямых другой прямой, которая образует [с ними] треугольник, являясь его *основанием.*

Я также соединяю [концы] вторых отрезков другой прямой, которая образует [с ними] второй треугольник, являясь его *основанием*. И соединив таким образом все точки деления с одними и теми же номерами, я образую ими столько же [арифметических] *треугольников* и *оснований.* Через каждую точку делений [прямых] я провожу прямые, параллельные сторонам [исходным прямым], образующие своими пересечениями небольшие квадраты, которые я называю *ячейками.*

Ячейки, расположенные между двумя строчками, проходящими слева направо, называются *ячейками той же самой строки*, как ячейки a_{11}, a_{12}, a_{13} и т. д. или a_{21}, a_{22}, a_{23} и т. д. И те, которые расположены между двумя столбцами, проходящими сверху вниз, называются *ячейками того же самого столбца*, как a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41} и т д. и a_{12}, a_{22}, a_{23} и т. д.

И те, которые пересекаются по диагонали одним и тем же основанием, называются *ячейками одного и того же основания*, как следующие: a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, или a_{31}, a_{22}, a_{13}. Ячейки одного и того же основания, равноудаленные от его концов, называются *взаимными*, как a_{42}, a_{24}, и a_{32}, a_{23}, потому что номер строки одной ячейки совпадает с номером столбца другой, как видно в этом примере, в котором a_{42} находится во втором столбце и четвертой строке, а его взаимная ячейка a_{24} – напротив, во второй строке и четвертом столбце.

И очень легко показать, что ячейки, номер строки (столбца) одной из которых совпадает с номером столбца (строки) другой, находятся в том же основании и равноудалены от его концов. И также очень легко доказать, что номер столбца любой ячейки в сумме с номером ее строки на единицу превосходит номер ее основания. Например, ячейка a_{43} третьего столбца находится в четвертой строке и шестом основании, а сумма номеров столбца и строки, 3 + 4, на единицу превосходит номер основания, 6. Это происходит потому, что две стороны треугольника разделены на одинаковое число частей. Но это скорее понятно нежели доказываемо.

Наше утверждение равносильно тому, что каждое основание содержит на одну ячейку больше, чем предыдущее и именно столько, сколько единиц в его номере. Так, второе, a_{21}, a_{12}, имеет 2 ячейки, а третье, a_{31}, a_{22}, a_{13}, – 3 и т. д. Числа, указанные в каждой ячейке, определяются следующим образом. Число первой ячейки, которая находится в вершине прямого угла, произвольно; но коль скоро оно выбрано, все остальные определяются однозначно и по этой причине указанное число называется *генератором* треугольника. Каждое из остальных чисел определяется следующим единственным правилом: число каждой ячейки равно сумме чисел [непосредственно] предшествующих ячеек в ее столбце и строке. Так, ячейка a_{43}, т. е. ее число, равно сумме ячеек a_{33} и a_{42}, и таким же образом остальные.

Из этих [предпосылок] вытекает много последствий. Ниже перечислены основные и я [формулирую их], рассматривая треугольники с генератором, равным единице. Но то, что сказано о них, относится и ко всем другим.

Следствие 1. В каждом арифметическом треугольнике все ячейки первой строки и первого столбца равны генератору.

Ибо, по построению треугольника, каждая ячейка равна сумме ячеек, [непосредственно] предшествующих ей в ее столбце и строке. Но ячейки первой строки не имеют предшествующих в своем столбце, а первого столбца – предшествующих в своей строке и потому все они равны друг другу и стало быть равны генерирующему первому числу. Так, a_{21} равно a_{11} + нуль, т. е. a_{21} равно a_{11} и равным образом a_{31} равно a_{21} плюс нуль, т. е. равно a_{21}. И равным образом a_{12} равно a_{11} + нуль, а a_{13} равно a_{12} + нуль. И равным образом остальные.

Следствие 2. В каждом арифметическом треугольнике каждая ячейка равна сумме всех ячеек предыдущей строки, от той, которая находится в ее столбце, до ячейки в первом столбце включительно.

Рассмотрим любую ячейку a_{34}. Я говорю, что она равна $a_{24} + a_{23} + a_{22} + a_{21}$, т. е. сумме ячеек выше расположенной строки начиная со столбца a_{34} [с четвертого столбца] до первого. Это очевидно уже по определению ячеек в терминах их предыдущих ячеек. Ибо a_{34} равно $a_{24} + a_{33}$ и a_{33} можно заменить на $a_{23} + a_{32}$, a_{32} – на $a_{22} + a_{31}$ и a_{31} заменить ячейкой a_{21}, так как a_{31} и a_{21} равны друг другу по предыдущему. Поэтому a_{34} равно $a_{24} + a_{23} + a_{22} + a_{21}$.

Следствие 3. В каждом арифметическом треугольнике каждая ячейка равна сумме всех ячеек предыдущего столбца, от той, которая находится в ее строке, до ячейки в первой строке включительно.

Я говорю, что некоторая ячейка a_{33} равна $a_{32} + a_{22} + a_{12}$, расположенным в предыдущем столбце от строки, в которой находится ячейка a_{33}, до первой строки.

Это также происходит уже по определению ячеек. Ибо a_{33} равно $a_{32} + a_{23}$ и a_{23} можно заменить на $a_{22} + a_{13}$ и a_{13} заменить ячейкой a_{12}, так как по первому Следствию a_{13} равно a_{12}. Поэтому a_{33} равно $a_{32}+a_{22} + a_{12}$.

Следствие 4. В каждом арифметическом треугольнике каждая ячейка, уменьшенная на единицу, равна сумме всех тех, которые заключены между ее строкой и столбцом исключительно.

Рассмотрим любую ячейку a_{35}. Я говорю, что $a_{35} – a_{11}$ равно $a_{24} + a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11}$, – сумме всех чисел, заключенных между строкой a_{35}, a_{34}, a_{33}, a_{32}, a_{31} и столбцом a_{35}, a_{25}, a_{15} исключительно. Это происходит равным образом по истолкованию. Ибо a_{35} равно $a_{14} + a_{24} + a_{34}$, a_{34} можно заменить на $a_{13} + a_{23} + a_{33}$, a_{33} – на $a_{12} + a_{22} + a_{32}$, a_{32} – на $a_{11}+ a_{21} + a_{31}$ и a_{31} заменить на a_{11}. Поэтому a_{35} равно $a_{14} + a_{24} + a_{13} + a_{23} + a_{12} + a_{22} + a_{11} + a_{21} + a_{11}$.

Замечание. Я сказал в своем утверждении *каждая ячейка, уменьшенная на единицу,* потому что единица это генератор. Но будь им другое число, надо было бы сказать *уменьшенная на генерирующее число*.

Следствие 5. В каждом арифметическом треугольнике каждая ячейка равна своей взаимной.

Ибо для второго основания a_{21}, a_{12} ясно, что эти взаимные ячейки равны и друг другу, и a_{11}. Для третьего основания a_{31}, a_{22}, a_{13} также видно, что взаимные ячейки a_{31}, a_{13} равны и друг другу, и a_{11}. Для четвертого видно, что крайние a_{41}, a_{14}, снова равны и друг другу, и a_{11}. А те, которые расположены между указанными двумя, a_{32}, a_{23}, очевидно равны, так как a_{32} равно $a_{31} + a_{22}$ и a_{23} равно $a_{22} + a_{13}$. И $a_{13} + a_{22}$ равно $a_{31} + a_{22}$, как было показано, следовательно и т. д.

Аналогично, для всех других оснований может быть показано, что взаимные ячейки равны, потому что крайние всегда равны a_{11}, а остальные всегда определяются равными им и взаимными друг относительно друга в предыдущем основании.

Следствие 6. В каждом арифметическом треугольнике строка и столбец одного и того же номера состоят из ячеек, которые попарно равны друг другу.

Ибо они составлены из взаимных ячеек. Так, второй столбец a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}, a_{52}, a_{62} в точности равен второй строке

$a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}$.

Следствие 7. В каждом арифметическом треугольнике сумма ячеек каждого основания вдвое превышает сумму ячеек предыдущего основания.

Рассмотрим любое основание a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}. Я говорю, что сумма его ячеек вдвое превышает сумму ячеек предыдущего основания, a_{31}, a_{22}, a_{13}. Ибо крайние a_{41} и a_{14} равны соответственно крайним a_{31} и a_{13}, а каждая из остальных, a_{32} и a_{23}, равна двум другого основания, $a_{31} + a_{22}$ и $a_{22} + a_{13}$ соответственно. Таким образом, $a_{41} + a_{14} + a_{32} + a_{23}$ равно $2a_{31} + 2a_{22} + 2a_{13}$. То же можно доказать для всех других.

Следствие 8. В каждом арифметическом треугольнике сумма ячеек каждого основания равна тому члену геометрической прогрессии со знаменателем 2 и начинающейся с единицы, номер которого равен номеру основания.

Ибо в первом основании эта сумма единица. Во втором основании вдвое больше и, стало быть, равна двум. В третьем вдвое больше, чем во втором и поэтому равна четырем и так до бесконечности.

Замечание. Будь генератор не единица, а другое число, например, 3, это оставалось бы в силе. Однако, члены геометрической прогрессии со знаменателем 2 нельзя будет начинать с единицы, т. е. ее надо будет взять не в виде 1, 2, 4, 8, 16 и т. д., а начать ее с генератора 3, – 3, 6, 12, 24, 48 и т. д.

Следствие 9. В каждом арифметическом треугольнике каждое основание, уменьшенное на единицу, равно сумме всех предшествующих.

Ибо это свойство геометрической прогрессии со знаменателем 2.

Замечание. Будь генератор не единица, а иным, необходимо было бы сказать: *уменьшенное на генератор*.

Следствие 10. В каждом арифметическом треугольнике сумма сколь угодного числа смежных ячеек некоторого основания, начиная с одного из его концов, равна сумме стольких же ячеек предыдущего основания плюс та же сумма без одной [последней] из взятых ячеек [без последнего слагаемого].

Пусть взята сумма любого числа ячеек основания a_{41}, a_{14}, например, первых трех, $a_{41} + a_{32} + a_{23}$. Я говорю, что она равна сумме первых трех ячеек предыдущего основания, $a_{31} + a_{22} + a_{13}$ с суммой первых двух из того же основания, $a_{31} + a_{22}$. Ибо a_{41} равно a_{31}, a_{32} равно $a_{31} + a_{22}$ и a_{23} равно $a_{22} + a_{13}$, так что $a_{41} + a_{32} + a_{23}$ равно $2a_{31} + 2a_{22} + a_{13}$.

Определение. Я называю *разделительными* те ячейки, которые пересекаются по диагонали биссектрисой прямого угла, как например a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}.

Следствие 11. Каждая разделительная ячейка вдвое превышает те, которые предшествуют ей в ее строке или столбце.

Рассмотрим разделительную ячейку a_{33}. Я говорю, что она вдвое превышает a_{23} и также a_{32}. Ибо a_{33} равно $a_{23} + a_{32}$ и a_{23} равно a_{32} по Следствию 5.

Замечание. Все эти следствия сформулированы по поводу равенств, встречающихся в арифметическом треугольнике. Теперь мы рассмотрим те, которые относятся к пропорциям. Для них основополагающим будет

Следствие 12. В каждом арифметическом треугольнике, если две ячейки являются смежными в одном и том же основании, верхняя относится к нижней как число ячеек от верхней включительно до верхнего конца основания к числу тех, что расположены от нижней, также включительно, до нижнего конца основания.

Рассмотрим две любые смежные ячейки одного и того же основания, a_{42}, a_{33}. Я говорю, что a_{42} (нижняя) относится к a_{33} (к верхней) как два (потому что от a_{42} до нижнего конца основания находится две ячейки, а именно a_{42}, a_{51}) к трем (потому что от a_{33} до верхнего конца основания находится три ячейки, а именно a_{33}, a_{24}, a_{15}). Хотя это предложение включает в себя бесконечное множество случаев, я даю весьма краткое доказательство, приняв две леммы.

Лемма 1, которая очевидна. Эта пропорция имеет место для второго основания.

Ибо ясно, что a_{21} относится к a_{12} как один к одному.

Лемма 2. Если эта пропорция обнаруживается в любом основании, она необходимо окажется и в следующем.

Отсюда ясно, что эта пропорция необходимо имеет место для всех оснований, ибо она существует для второго основания в соответствии с Леммой 1. Следовательно, по Лемме 2 она верна и для третьего, а потому и для четвертого и так до бесконечности. И теперь требуется только проверить вторую лемму следующим образом.

Если указанная пропорция встречается в любом основании, как например в четвертом, a_{41}, a_{14}, т. е. если $a_{41}:a_{32} = 1:3$ и $a_{32}:a_{23} = 2:2$, и $a_{23}:a_{14} = 3:1$ и т. д., то я говорю, что та же пропорция будет иметь место в следующем основании a_{51}, a_{15}, и что, к примеру, $a_{42}:a_{33} = 2:3$. Ибо $a_{41}:a_{32} = 1:3$ по предположению. Поэтому $a_{41} + a_{32}$ (равное a_{42}) относится к a_{32} как $1 + 3$ (т. е. 4) к трем. Таким же образом $a_{32}:a_{23} = 2:2$ по предположению. Поэтому $a_{32} + a_{23}$ (равное a_{33}) относится к a_{32} как $2 + 2$ (т. е. 4) к двум. Но $a_{32}:a_{42} = 3:4$ как доказано, поэтому $a_{33}:a_{42} = 3:2$, что и требовалось доказать. То же самое можно установить для всех остальных, ибо это доказательство основано лишь на предположении, что пропорция имеет место для предыдущего основания и что каждая ячейка равна предыдущей плюс та, что расположена сверху, а это верно во всех случаях.

Следствие 13. В каждом арифметическом треугольнике, если две смежные ячейки находятся в одном и том же столбце, нижняя относится к верхней как номер основания верхней к номеру ее строки.

Рассмотрим любые две ячейки одного и того же столбца, a_{43}, a_{33}. Я говорю, что a_{43} (нижняя) относится к a_{33} (к верхней) как 5 (номер основания a_{33}) к трем (к номеру строки a_{33}). Ибо $a_{42}:a_{33} = 2:3$ и потому $a_{42} + a_{33}$ (равное a_{43}) относится к a_{33} как $2 + 3$ (т. е. 5) к трем.

Следствие 14. В каждом арифметическом треугольнике, если две смежные ячейки находятся в одной и той же строке, бóльшая относится к предыдущей как номер основания предыдущей к номеру ее столбца.

Рассмотрим две ячейки одной и той же строки a_{43}, a_{42}. Я говорю, что a_{43} (бóльшая) относится к a_{42} (к предыдущей) как 5 (номер основания a_{42}) к двум (к номеру ее столбца). Ибо $a_{42}:a_{33} = 2:3$ и $a_{42} + a_{33}$ (равное a_{43}) относится к a_{42} как 2 + 3 (т. е. 5) к двум.

Следствие 15. В каждом арифметическом треугольнике сумма ячеек любой строки относится к последней ячейке этой строки как номер треугольника к номеру строки.

Рассмотрим любой треугольник, например четвертый, a_{11}, a_{41}, a_{14}. Я говорю, что для любой строки внутри него, как, например, для второй, сумма ее ячеек, т. е. $a_{21} + a_{22} + a_{23}$, относится к a_{23} как 4:2. Ибо указанная сумма равна a_{33} и $a_{33}:a_{23} = 4:2$ по Следствию 13.

Следствие 16. В каждом арифметическом треугольнике каждая строка относится к строке внизу как номер нижней строки к числу ее ячеек.

Рассмотрим любой треугольник, например пятый, a_{15}, a_{11}, a_{51}. Я говорю, что какой бы номер строки ни выбрать внутри него, например третий, сумма его ячеек относится к сумме ячеек в четвертой, т. е. $(a_{31} + a_{32} + a_{33}):(a_{41} + a_{42})$, как 4 (номер четвертой строки) к двум (к числу ячеек в ней, так как она содержит 2). Ибо $a_{31} + a_{32} + a_{33}$ равно a_{43}, а $a_{41} + a_{42}$ равно a_{52}. И $a_{43}:a_{52} = 4:2$ по Следствию 12.

Замечание. Можно сформулировать это и следующим образом. Каждая строка относится к нижней как номер нижней к номеру треугольника без номера строки сверху. Ибо номер треугольника минус номер одной из его строк всегда равен числу ячеек, содержащихся в строке снизу.

Следствие 17. В каждом арифметическом треугольнике любая ячейка в сумме со всеми другими из ее столбца относится к той же ячейке в сумме со всеми другими из ее строки как количества ячеек в них.

Рассмотрим любую ячейку a_{32}. Я говорю, что $a_{32} + a_{22} + a_{12}$ относится к $a_{32} + a_{31}$ как три к двум. Я говорю 3, потому что в первой сумме 3 ячейки и 2, потому что во второй – две. Но $a_{32} + a_{22} + a_{12}$ равно a_{33} по Следствию 3, а $a_{32} + a_{31}$ равно a_{42} по Следствию 2. И $a_{33}:a_{42} = 3:2$ по Следствию 12.

Следствие 18. В каждом арифметическом треугольнике две строки, равноудаленные от его концов[1], относятся друг к другу как количества ячеек в них.

Рассмотрим любой треугольник *OAB* и две его строки, равноудаленные от его концов, как шестая $a_{61} + a_{62}$ и вторая $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26}$. Я говорю, что сумма ячеек одного относится к сумме ячеек другого как количества их ячеек. Ибо по Следствию 6 вторая строка a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26} совпадает со вторым столбцом a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}, a_{52}, a_{62}, для которого мы эту пропорцию только что установили.

Замечание. Это можно сформулировать и так: В каждом арифметическом треугольнике две строки, сумма номеров которых на единицу превышает номер треугольника, относятся друг к другу обратно пропорционально своим номерам. Ибо это то же самое, что было только что сказано.

Окончательное следствие. В каждом арифметическом треугольнике из двух смежных разделительных ячеек нижняя относится к четырехкратной верхней как номер основания верхней к числу, на единицу большему, чем этот номер.

Рассмотрим две разделительные ячейки a_{44}, a_{33}. Я говорю, что a_{44} относится к $4a_{33}$ как 5 (номер основания a_{33}) к шести. Ибо a_{44} равно удвоенному a_{34}, а a_{33} – удвоенному a_{23} и поэтому $4a_{23}$ равно $2a_{33}$ и $4a_{23}:a_{33} = 2:1$. И $a_{44}:4a_{33} = a_{34}:4a_{23}$ или равно $(a_{34}:a_{33}) \cdot(a_{33}:4a_{23})$ и по предыдущим следствиям $= (5:3) \cdot(1:2) = 5:6$, что и требовалось доказать.

Замечание. Можно далее получить много других пропорций, которые я опускаю, потому что их легко вывести и те, кто хотел бы заняться этим, быть может найдут некоторые более изящные выводы, чем я был бы в состоянии представить. И я заканчиваю следующей задачей, которая завершит этот трактат.

Задача. Даны номера столбца и строки некоторой ячейки. Требуется найти ее число без обращения к арифметическому треугольнику[2].

Пусть, например, предлагается определить число ячейки a_{35} пятого столбца и третьей строки. Возьмем все числа [этой строки], предшествующие этому, т. е. пятому столбцу, 1, 2, 3, 4. Возьмем столько же натуральных чисел, начиная с номера строки, т. е. с трех, 3, 4, 5, 6. Перемножим первые друг на друга, получим произведение 24; перемножим вторые друг на друга, получим произведение 360 и разделим его на первое. Частное равно 15 и оно и есть искомое число.

Ибо отношение a_{35} к первой ячейке своего основания, A, равно произведению всех отношений ячеек друг к другу, т. е. $a_{35}:A$ равно

$(a_{35}:a_{44}) \cdot(a_{44}:a_{53}) \cdot(a_{53}:a_{62}) \cdot(a_{62}:A)$ или, по Следствию 12,
$(3:4) \cdot(4:3) \cdot(5:2) \cdot(6:1)$.

Но A равно 1 и потому a_{35} равно частному от деления произведения $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ на произведение $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Замечание. Если генератор не равен единице, это частное следует умножить на него.

[2] Различные приложения арифметического треугольника с единичным генератором

Рассмотрев соотношения, которые имеют место между ячейками и рядами арифметических треугольников, я перехожу к различным приложениям треугольников с единичным генератором и это будет видно в последующих трактатах. Но я умолчал о много большем, чем высказал. Странно, насколько треугольник богат свойствами, с которыми каждый может упражняться. Здесь я лишь предупреждаю, что во всем последующем я намереваюсь говорить лишь об арифметических треугольниках с единичным генератором.

[2.1] Приложение арифметического треугольника к числовым последовательностям

В арифметике рассматривают числа из различных прогрессий, а также и различных степеней и порядков [?]. Но, как мне кажется, не исследуются в достаточной мере те, о которых я говорю, хотя они и широко применяются. Они даже безымянны и я обязан дать им имя; и потому, что термины прогрессия, порядок и степень уже находятся в обиходе, я употреблю термин *последовательность*.

И я называю *числами первой последовательности* простые единицы, –

1, 1, 1, 1, 1, и т. д.

Я называю *числами второй последовательности* натуральные числа, которые образуются сложением единиц, –

1, 2, 3, 4, 5, и т. д.

Я называю *числами третьей последовательности* те, которые образуются сложением натуральных и называются треугольными, –

1, 3, 6, 10, и т. д.

Иначе говоря, второе треугольное число, т. е. 3, равно сумме двух первых натуральных, – 1 и 2; и третье треугольное число, 6, равно сумме первых трех натуральных [...] и т. д.

Я называю *числами четвертой последовательности* те, которые образуются сложением треугольных и называются пирамидальными [тетраэдальными], –

1, 4, 10, 20, и т. д.

Я называю *числами пятой последовательности* те, которые образуются сложением предыдущих и которым еще не дали особого имени. Я могу назвать их треугольно-треугольными, –

1, 5, 15, 35, и т. д.

И я называю *числами шестой последовательности* те, которые образуются сложением предыдущих, –

1, 6, 21, 56, 126, 252, и т. д.

и так до бесконечности: 1, 7, 28, 84, и т. д.; 1, 8, 36, 120, и т. д.

И если составить такую таблицу чисел всех последовательностей и указать слева номера последовательностей, а сверху – исходные числа [порядковые номера столбцов; не указаны в нашей таблице][3], то эта таблица совпадет с арифметическим треугольником.

Последовательности

Единицы	1-я	1	1	1	1	1	и т. д.
Натуральные	2-я	1	2	3	4	5	и т. д.
Треугольные	3-я	1	3	6	10	15	и т. д.
Пирамидальные	4-я	1	4	10	20	35	и т. д.

Первая последовательность чисел будет той же самой, что и первая строка треугольника. Вторая последовательность – той же самой, что и вторая строка, и так до бесконечности, ибо первая строка арифметического треугольника, равно как и первая последовательность чисел, состоит из одних единиц.

И в арифметическом треугольнике каждая ячейка, как например a_{43}, равна (a_{33} + a_{32} + a_{31}), т. е. равна верхней плюс те, которые предшествуют верхней в своей строке, как доказано в Следствии 2 трактата об этом треугольнике – и то же самое происходит в каждой последовательности чисел. Например, третье пирамидальное число 10 равно сумме трех первых треугольных 1 + 3 + 6, потому что оно образовано их сложением.

Отсюда очевидным образом следует, что строки треугольника являются лишь последовательностями чисел и номера строк совпадают с номерами последовательностей, а номера столбцов – с номерами столбцов таблицы. И если число, например 21, в арифметическом треугольнике находится в третьей строке и шестом столбце, то, рассматриваемое в числовых последовательностях, оно помещается шестым по порядку в третьей последовательности.

Понятно поэтому, что всё, что сказано о рядах и ячейках арифметического треугольника, в точности соответствует последовательностям чисел и что те же самые равенства и те же самые пропорции, отмеченные в одних [в треугольниках], существуют и в других, нужно лишь поменять изложение, подставив термины, подходящие числовым последовательностям, как последовательность, вместо тех, которые соответствовали арифметическому треугольнику, как строки. Я представлю небольшой особый трактат [см. §3], в котором несколько приведенных примеров без труда укажут все остальное.

[2.2] Приложение арифметического треугольника к сочетаниям

Слово *сочетание* приняло много различных значений и чтобы избавиться от сомнений я должен сказать, как я его понимаю. Если из многих вещей всеми разрешенными способами среди всех возможных выбирается их определенное число, то [результатом] будут *различные сочетания*.

Так, если из четырех вещей, обозначаемых четырьмя буквами, *A, B, C, D,* разрешается выбирать, например, какие-либо две всеми способами, которыми можно выбрать две различные вещи из четырех предложенных, [результат] называется *сочетаниями.* И по опыту известно, что имеется 6 различных способов выбрать 2 из четырех, потому что можно взять *A* и *B* или *A* и *C* или [...] Я не считаю *A* и *A* в качестве одного из способов выбора двух, потому что здесь нет различных вещей, а лишь повторение одной. И я не считаю *A* и *B* и потом *B* и *A* за два различных способа выбора, потому что в том и другом случае взяты лишь две одинаковые вещи и различен только порядок [выбора], на который я вовсе не обращаю внимания. И я могу одним словом объяснить всё тем, кто привычен рассматривать сочетания, сказав просто, что имею в виду только соединения, которые выбираются без изменения порядка.

Также по опыту выясняется, что три вещи из четырех можно выбрать четырьмя способами, потому что можно взять *A, B, C* или *A, B, D* или [...]. И, наконец, можно установить, что четыре вещи из четырех выбираются лишь одним способом, а именно *A, B, C, D*. Я буду говорить в таких терминах: 1, 2, 3, 4 из четырех сочетаются 4, 6, 4 и 1 раз. И также: число сочетаний 1, 2, 3, 4 из 4 равно 4, 6, 4, 1. Но число всех сочетаний вообще, которые можно выбрать из четырех, равно 15, потому что […]. После этих пояснений я указываю их следствия в форме лемм.

Лемма 1. Сочетание числа из меньшего никак невозможно. Например, нельзя составить сочетание 4 из 2.

Лемма 2. Число сочетаний 1 из 1, 2 из 2, 3 из 3 равно 1. И вообще некоторое число сочетается только 1 раз из равного ему.

Лемма 3. Число сочетаний 1 из 1, 2, 3 равно 1, 2, 3. И вообще число сочетаний 1 из любого числа равно количеству единиц в нем.

Лемма 4. Пусть дано 4 каких-то числа, первое – какое угодно, второе – большее 1, третье – какое угодно, лишь бы не меньше второго, а четвертое как и третье превышает единицу. Тогда число сочетаний первого из третьего в сумме с числом сочетаний второго из третьего равно числу сочетаний второго из четвертого.

Пусть даны 4 таких числа, о которых я говорю. Первое, какое угодно, например 1; второе большее единицы и именно 2; третье, какое угодно, лишь бы не меньше второго, например 3; четвертое, превышающее единицу и именно 4. Я говорю, что сумма количеств сочетаний 1 из 3 и 2 из 3 равна количеству сочетаний 2 из 4.

Пусть 3 какие-либо буквы будут *B, C, D* и снова эти же 3 буквы и еще одна, *A, B, C, D*. Возьмем в соответствии с предложением все сочетания одной буквы из трех букв, *B, C, D*. Их окажется 3, а именно *B, C, D*. Из этих же трех букв возьмем сочетания по 2. Их будет 3, а именно *BC, BD*, *CD* и возьмем, наконец, все сочетания по 2 из четырех букв *A, B, C, D*. Их будет 6, а именно *AB, AC*, [...]

Требуется доказать, что сумма количеств сочетаний 1 из 3 и 2 из 3 равна количеству сочетаний 2 из 4. Это легко, потому что сочетания 2 из 4 образуются из сочетаний 1 из 3 и 2 из 3. Чтобы это показать, следует заметить, что среди сочетаний 2 из 4, а именно из *AB, AC*, [...] имеются содержащие и не содержащие букву *A*. Те, в которых ее нет, это *BC, BD*, *CD* и они, следовательно, образуются двумя из этих трех букв, *B, C, D*,

т. е. это сочетания 2 из этих трех, […] А сочетания 2 из этих трех букв [...] составляют часть сочетаний 2 из этих четырех букв, *A, B, C, D*, потому что они образуют те, в которых *A* не участвует.

Далее, если из сочетаний 2 из 4, в которых *A* участвует, т. е. из *AB*, *AC*, *AD*, исключить *A*, в них останутся только по одной букве, а именно *B, C*, *D*, т. е. в точности сочетания одной буквы из трех, – из *B, C, D*. И если к каждому сочетанию одной буквы из трех, *B, C, D*, добавить букву *A* и таким образом получить *AB, AC, AD*, образуются сочетания 2 из 4, в которых участвует *A*, а сочетания 1 из 3 оказываются частью сочетаний 2 из 4. Таким образом видно, что сочетания 2 из 4 образованы из сочетаний 2 из 3 и 1 из 3 и, стало быть, количество сочетаний 2 из 4 равно сумме количеств сочетаний 2 из 3 и 1 из 3.

Можно показать то же самое во всех других примерах. Так, сумма количеств сочетаний 29 из 40 и 30 из 40 (15 из 55 и 16 из 55) равна количеству сочетаний 30 из 41 (16 из 56). И так до бесконечности, что и требовалось доказать.

Предложение 1. Во всяком арифметическом треугольнике сумма ячеек какой-либо строки равна числу сочетаний номера строки из номера треугольника.

Рассмотрим некоторый треугольник, например четвертый, $Oa_{41}a_{14}$. Я говорю, что сумма ячеек какой-либо [его] строки, например второй, a_{21}+ a_{22} + a_{23}, равна числу сочетаний этого числа, 2, из четырех, т. е. из номера этого треугольника. И также сумма ячеек пятой строки в восьмом треугольнике равна числу сочетаний 5 из 8 и т. д. Доказательство этого при помощи следующих двух лемм[4] является кратким, хоть оно и относится к бесконечному множеству случаев.

Первое, что очевидно само по себе, это то, что указанное равенство соблюдается в первом треугольнике, потому что сумма ячеек его единственной строки, т. е. a_{11}, или единицы, равна числу сочетаний 1, номера строки, из 1, номера треугольника. Второе, если найдется арифметический треугольник, в котором встречается сформулированное соотношение, т. е. такой, в любой строке которого сумма ячеек равна числу сочетаний ее номера из номера треугольника, то я скажу, что следующий треугольник обладает тем же свойством.

Отсюда будет следовать, что это равенство имеет место во всех арифметических треугольниках, потому что оно существует в первом треугольнике по Первой лемме и даже, что оно также очевидно во втором. Следовательно, по Второй лемме то же верно и для следующего и, стало быть, и для следующего после него и так до бесконечности. И потому надо лишь доказать Вторую лемму.

Рассмотрим какой-либо треугольник, например третий, для которого мы предположим, что указанное равенство соблюдается, т. е. что сумма ячеек [его] первой строки $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ равна числу сочетаний 1 из 3, что сумма ячеек второй строки, $a_{21} + a_{22}$ равна числу сочетаний 2 из 3 и что сумма ячеек третьей строки, [единственной ячейки] a_{31}, равна [числу] сочетаний 3 из 3.

Я говорю, что [в таком случае] то же самое равенство будет иметь место для четвертого треугольника и что например сумма ячеек [его] второй строки $a_{21} + a_{22} + a_{23}$ равна числу сочетаний 2 из 4. Действительно, $a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{21} + a_{22}$ (или, по предположению, числу сочетаний 2 из 3) + a_{23} и $a_{23} = a_{11} + a_{12} + a_{13}$ (или, по предположению, числу сочетаний 1 из 3). И по лемме 4 всё это вместе равно числу сочетаний 2 из 4. То же устанавливается для всех остальных [строк], что и требовалось доказать.

Предложение 2. Число любой ячейки равно количеству сочетаний числа, на единицу меньшего номера ее строки, из числа, на единицу меньшего номера ее основания.

Рассмотрим какую-либо ячейку, например a_{43} в четвертой строке и шестом основании. Я говорю, что она равна числу сочетаний 3 (= 4 – 1) из 5 (= 6 – 1), потому что она равна сумме ячеек
$a_{31} + a_{32} + a_{33}$. И стало быть по предыдущему и т. д.

Задача 1 – Предложение 3. Пусть предложены 2 числа. Найти сколько сочетаний образует одно из другого в арифметическом треугольнике.

Пусть предложены числа 4 и 6. Требуется установить сколько сочетаний образует 4 из 6.

Первый способ. Вычислим сумму ячеек четвертой строки в шестом треугольнике и она ответит на поставленный вопрос.

Второй способ. Возьмем пятую ячейку в седьмом основании, потому что числа 5 и 7 на единицу превышают заданные, 4 и 6. Число в этой ячейке – то, которое нам требуется.

Вывод. По соотношению, которое имеет место между ячейками и рядами арифметического треугольника с сочетаниями, легко видеть, что всё, доказанное для первых [для арифметических треугольников], некоторым образом подходит к другим. Это то, что я [здесь] доказываю в немногих словах в своем небольшом трактате о сочетаниях.

[2.3] Приложение арифметического треугольника к определению должного раздела ставки между двумя игроками, играющими большое число партий

Чтобы понять правило раздела ставки, следует прежде всего иметь в виду, что деньги, поставленные игроками, им уже не принадлежат, они уже перестали быть их собственностью, взамен же они получают право надеяться на то, что преподнесет им случай в соответствии с заранее установленными условиями. Но поскольку эти условия добровольны, они могут нарушаться с общего согласия и таким образом в любой момент игроки могут захотеть прекратить игру, или, наперекор тому, как они поступили, начав ее, отказаться от надежды на случай и вернуть каждому что-то в собственность. И тогда установление того, что должно им принадлежать, следует таким образом согласовать с тем, чего они имели право ожидать от фортуны, чтобы каждому из них стало совершенно безразлично, либо получить то, что ему будет назначено, либо продолжать авантюру игры. И это справедливое распределение называется разделом ставки.

Первый принцип для установления необходимого вида раздела ставки таков. Пусть один из игроков находится в таком положении, что что бы ни произошло при проигрыше и выигрыше, ему должна принадлежать определенная сумма, которой случай не может его лишить. Тогда он не должен участвовать ни в каком разделе, а получить всю эту сумму как достоверную, потому что предстоящий раздел соответствует случаю, он же должен вернуть себе всё без раздела, так как не подвержен никакому риску потери.

Второй принцип таков. Пусть два игрока находятся в таком положении, что если один из них выиграет, ему будет принадлежать определенная сумма, если же проиграет, она достанется другому. Пусть игра чисто случайна[5] и как для одного, так и для другого число шансов одно и то же. Тогда ни у одного из них нет больше оснований для выигрыша, чем у другого. И если они захотят разойтись без игры и забрать себе то, что им по справедливости принадлежит, то сумму, подверженную случаю, следует разделить пополам и отдать поровну каждому из них.

Первое следствие. Пусть двое играют в чисто случайную игру при условии, что если первый из них выиграет, он получит некоторую сумму, если же проиграет – меньшую сумму. Если игроки пожелают разойтись без игры и забрать себе то, что им принадлежит, то раздел ставки будет состоять в том, что первый получит следовавшее ему при проигрыше и половину того, насколько больше ему было положено при выигрыше, чем при проигрыше.

Пусть, к примеру, по условию игры первый игрок в случае выигрыша забирает 8 пистолей и 2 пистоля при проигрыше. Я говорю, что при разделе ставки он получит эти 2 плюс половину того, насколько 8 превосходит 2, т. е. еще 3. По предположению [...] эти 2 ему принадлежат в случаях проигрыша и выигрыша и, следовательно, по первому принципу он не должен участвовать ни в каком разделе, а получить их полностью. Но остальные 6 зависят от игры, так что он их выиграет если ему повезет, в противном же случае их заберет другой. По предположению, нет никакого основания, чтобы эта сумма досталась одному из них, а не другому, и потому при разделе ставки она делится пополам и каждый получает свою половину. И это я и предложил.

И чтобы сказать это иначе, ему принадлежит случай проигрыша и половина разности между случаями выигрыша и проигрыша. Стало быть, если при проигрыше ему положено A, а в случае выигрыша – $A + B$, раздел означает, что он заберет $A + B/2$.

Второе следствие. Пусть два игрока находятся в том же положении, которое мы только что обсуждали. Я говорю, что раздел можно осуществить и так, что [правда] сведется к тому же: если объединить суммы при выигрыше и проигрыше, то первый забирает половину всего, т.е., если соединить 2 и 8, [...], то половина этого, 5, принадлежит первому.

Действительно, половина суммы двух чисел всегда является тем же, чем меньшее плюс половина их разности. И это можно доказать и так. Пусть A – то, что принадлежит первому при проигрыше и $A + B$ – в случае выигрыша. Я говорю, что при разделе эти два числа объединяются и из $A + A + B$ первому выдается половина, т. е. [...]. Ибо эта сумма равна $A + B/2$, что и доказывает справедливость раздела.

Установив эти основания, мы легко переходим к определению раздела ставки между двумя игроками, которые играют сколько угодно партий и находятся в любом состоянии. Иначе говоря, – к определению раздела при игре из двух партий, когда первый набрал одно очко, или при игре в три партии, когда либо первый набрал одно или два очка, либо счет два к одному, и вообще при игре из любого числа партий и любом счете.

Во-первых следует заметить, что состояния при игре в две партии и одном очке у одного из игроков, и при игре в три партии и счете два к одному, совпадают. Ибо общее в обоих случаях то, что для завершения [для победы] одному игроку нехватает лишь одной партии, а другому – двух. В этом и состоит различие преимуществ [положений], которое и должно быть упорядочено разделом ставки. При этом, собственно, следует учитывать лишь недостающие одному и другому партии, а не те, которые они выиграли, потому что, как мы уже сказали, игроки находятся в том же состоянии и когда при игре в две партии один набрал одно очко, и когда двое играют 12 партий при счете 11:10.

Но следует задать вопрос такого рода: пусть каждому из двух игроков нехватает для победы определенного числа партий;

требуется разделить ставку. Я предлагаю здесь метод и излагаю его лишь на двух или трех примерах, которые так легко дополнить, что нет нужды продолжать. Чтобы добиться общности и ничего не упустить, я соответственно рассматриваю первый пример, которого быть может неуместно касаться, так как он слишком ясен. Но я все-таки займусь им, чтобы начать с начала. Вот он.

Первый случай. Если одному из игроков нехватает ни одной партии, а другому нехватает нескольких, вся сумма принадлежит первому, потому что он ее выиграл [...].

Второй случай. Если одному игроку нехватает одной партии и второму [также] одной, деньги следует разделить пополам и каждому отдать его половину, что очевидно по Второму принципу. И то же самое, если и одному, и другому недостает двух партий; и то же самое, если сколько партий нехватает одному, столько же нехватает и другому.

Третий случай. Если одному игроку нехватает одной партии, а другому – двух, то вот способ определить раздел ставки. Рассмотрим то, что принадлежит первому игроку (которому недостает лишь одной партии) в случае выигрыша очередной партии, а затем то, что ему будет принадлежать при проигрыше.

Ясно, что если тот, кому нехватает лишь одной партии, выиграет ту, которую они собираются играть, ему ничего больше недоставать не будет и окажется, что всё принадлежит ему в соответствии со Случаем 1. Иначе же, если выиграет тот, кому нехватает двух партий, ему не будет хватать лишь одной, и они окажутся в таком положении, что и одному, и другому не будет хватать одной. И они должны будут разделить деньги пополам в соответствии со Случаем 2.

Итак, если первый выиграет следующую партию, ему будет принадлежать всё, а если проиграет – половина. И если они захотят разойтись не играя эту партию, ему будет принадлежать 3/4 в соответствии со Следствием 2. И если предложить пример с указанием суммы, на которую они играют, дело станет еще яснее. Предположим, что эта сумма – 8 пистолей. И при выигрыше первый должен заиметь всё, [...] а при проигрыше – половину, т. е 4. Таким образом, ему при разделе ставки положена половина и от восьми, и от четырех, т. е. 6 пистолей из восьми, потому что [...].

Четвертый случай. Если одному из игроков нехватает одной партии, а другому – трех, раздел определяется таким же образом, – исследованием того, что положено первому при выигрыше и проигрыше.

Если первый выиграет, он заимеет все [требуемые] партии и стало быть возьмет все деньги, например, 8. Если он проиграет, другому, которому раньше нехватало трех партий, будут нужны только две. И они окажутся в [таком же] положении, когда первому недостает одной партии, а второму – двух. Стало быть, в соответствии с предыдущим случаем, первому будет причитаться 6 пистолей. При выигрыше он получит 8, а при проигрыше – 6 и поэтому при разделе ставки ему будет положена половина этих двух сумм, т. е. 7, потому что [...].

Пятый случай. Если одному игроку нехватает одной партии, а другому – четыре, дело не меняется. При выигрыше первый заберет всё, например 8, а при проигрыше ему не будет хватать одной партии, а другому – трех. Поэтому ему будет принадлежать 7 пистолей из восьми и при разделе ставки ему будет причитаться половина от восьми и половина от семи, т. е. 7½.

Шестой случай. Пусть одному не будет хватать одной партии, а другому – пяти, и так до бесконечности.

Седьмой случай. И то же самое, если первому недостает двух партий, а другому трех, потому что всегда нужно исследовать случаи выигрыша и проигрыша. Если первый выиграет [очередную] партию, ему не будет хватать одной партии, а другому – трех, так что в соответствии с Четвертым случаем ему будет принадлежать 7 из восьми. Если первый проиграет, ему не будет хватать двух партий и другому [тоже] двух и, стало быть, в соответствии со Вторым случаем каждому будет положена половина, т. е. 4. Итак, при выигрыше первый получает 7, а в случае проигрыша – 4 и поэтому при разделе ставки он заимеет половину этих двух сумм совместно, т. е. 5½.

Этим методом производится раздел ставки при всех положениях, всегда учитывая то, что положено и при выигрыше, и при проигрыше и назначая при разделе половину этих двух сумм. Таков один из методов раздела ставки. Имеются еще два, – при помощи арифметического треугольника и сочетаниями.

[2.3.1] Метод раздела ставки между двумя игроками, играющими большое число партий, при помощи арифметического треугольника

Перед тем, как обратиться к этому методу, следует привести лемму.

Лемма. Пусть двое играют в чисто случайную игру при условии, что если первый выиграет, ему будет принадлежать какая-то доля поставленных денег, выраженная дробью, а если проиграет – меньшая доля той же суммы, выраженная другой дробью. Если они хотят разойтись без игры, условие для раздела ставки определяется следующим образом.

Приведем, если этого еще не сделано, обе дроби к одному и тому же наименованию [знаменателю] и возьмем дробь, числитель которой равен сумме обоих числителей, а знаменатель – удвоенный прежний знаменатель. Эта дробь выразит долю поставленной суммы, которая принадлежит первому. Например, если при выигрыше он получает 3/5 этой суммы, а в случае проигрыша – 1/5, я говорю, что ему принадлежит [...] 4/10. [...]

Итак, эти правила являются общими и не допускают исключений. [Следуют простейшие примеры, в том числе случай, когда при проигрыше игрок не получает ничего.]

Задача 1 – Предложение 1. Пусть каждому из двух игроков нехватает для победы некоторого числа партий. Требуется разделить ставку при помощи арифметического треугольника (если они хотят разойтись без игры), обращая внимание на эти недостающие партии.

Выберем треугольник, в основании которого столько ячеек, сколько партий нехватает обоим игрокам вместе. И в этом основании выберем столько смежных ячеек начиная с первой, сколько партий недостает первому игроку и возьмем сумму чисел этих ячеек. Таким образом, [в основании] останется столько ячеек, сколько партий нехватает другому. Возьмем также сумму их чисел.

Эти суммы относятся друг к другу обратно пропорционально преимуществам игроков и если сумма, поставленная в игру, равна сумме всех ячеек основания, каждому игроку будет положено то, что содержится в ячейках, которые относятся к недостающим партиям другого, а если они играют на другую сумму, то им будут положены соответственно пропорциональные [суммы].

Пусть, например, первому игроку нехватает двух партий, а второму – четырех и требуется разделить ставку. Сложим эти два числа, 2 и 4, их сумма будет 6, и возьмем шестое основание арифметического треугольника [арифметический треугольник с шестым основанием] a_{61}, a_{16}, в котором, следовательно, 6 ячеек, – a_{61}, a_{52}, [...], a_{16}. Надо взять столько ячеек, начиная с первой, a_{61}, сколько партий нехватает первому игроку, т. е. первые две, a_{61} и a_{52}. И останется столько ячеек, сколько недостает партий другому, т. е. 4, – a_{43}, a_{34}, a_{25}, a_{16}, – я говорю, что преимущество первого относится к преимуществу второго как $a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16}$ к $a_{61} + a_{52}$ и если поставленная сумма равна $a_{61} + a_{52} +$ [...] $+ a_{16}$, то тому, кому нехватает двух партий, положена сумма четырех ячеек, $a_{16} + a_{25} + a_{34} + a_{43}$, тому же, кому нехватает четырех, – сумма двух, – $a_{61} + a_{52}$. А если они играют на другую сумму, то им положены соответственно пропорциональные [суммы].

И, чтобы сказать в общем, на какую сумму они ни играли бы, первому положена доля, выраженная дробью

$(a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16})/(a_{61} + a_{52} + a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16})$ […], а второму $(a_{61} + a_{52})/(a_{61} + a_{52} + a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16})$ [...].

Если одному нехватает одной партии, а другому – пяти, первому будет принадлежать сумма первых пяти ячеек [...], а второму – сумма [число] ячейки a_{16}. А если одному недостает шести партий и другому – двух, раздел ставки определяется по восьмому основанию, в которых 6 первых ячеек содержат причитающееся тому, кому нехватает двух партий, а 2 других – тому, кому нехватает шести. И так до бесконечности.

Хотя это предложение включает бесконечное множество случаев, я тем не менее доказываю его в нескольких словах при помощи двух лемм.

Первое. Второе основание содержит раздел ставки игроков, которым вместе нехватает двух партий. Второе. Если какое-либо основание содержит раздел ставки для тех, кому [вместе] нехватает столько партий, сколько в нем ячеек, то то же самое произойдет и в следующем основании, – оно также будет содержать раздел ставки для тех игроков, которым [вместе] недостает стольких партий, сколько в нем имеется ячеек.

И я заключаю в одном слове, что все основания арифметического треугольника [основания всех и т. д.] обладают этим свойством, потому что второе имеет его по Первой лемме и, стало быть, по Второй лемме, также и третье и, следовательно, четвертое и так до бесконечности, что и требовалось доказать. Поэтому нужно только доказать эти две леммы. Первая очевидна сама по себе [...]. Вторая доказывается таким образом.

Если некоторое основание, как например четвертое, a_{41}, a_{14}, содержит раздел ставки для тех, кому [вместе] нехватает четырех партий, т. е. если [например] первому нехватает одной, а второму – трех, доля первого от поставленной суммы выражена дробью $(a_{41} + a_{32} + a_{23})/(a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{14})$ [...]. А если и одному, и другому нехватает двух партий, дробь, принадлежащая первому, равна $(a_{41} + a_{32})/(a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{14})$. Если первому нехватает трех партий, а другому – одной, то [...] и т. д.

[Теперь] я говорю, что пятое основание также содержит раздел ставки для тех, кому [совместно] нехватает пяти партий и что, например, если первому нехватает двух и второму – трех, доля первого из поставленной суммы будет выражена дробью $(a_{51} + a_{42} + a_{33})/(a_{51} + a_{42} + a_{33} + a_{24} + a_{15})$.

Чтобы определить то, что следует двум игрокам, каждому из которых нехватает нескольких партий, надо взять дробь, которая принадлежит первому в случае выигрыша, и ту, которая ему принадлежит при проигрыше, привести их к общему знаменателю, если этого не сделано, и образовать дробь [...]. Исследуем же дроби, которые принадлежат нашему первому игроку в обоих случаях.

Если первый, которому нехватает двух партий, выигрывает очередную, ему не будет хватать лишь одной, а другому – тех же трех. Им вместе, стало быть, нехватает четырех и по предположению раздел их ставки находится для них в четвертом основании и первому следует [см. выше] $(a_{41} + a_{32} + a_{23})/(a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{14})$. Если, напротив, первый проиграет, ему не будет хватать тех же двух партий и только двух второму. Поэтому, по предположению, дробь первого будет $(a_{41} + a_{32})/(a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{14})$ и, стало быть, в случае раздела ставки ему будет принадлежать дробь

$(a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{41} + a_{32})/(2a_{41} + 2a_{32} + 2a_{23} + 2a_{14})$, т. е. $(a_{51} + a_{42} + a_{33})/(a_{51} + a_{42} + a_{33} + a_{24} + a_{15})$, что и требовалось доказать.

Итак, это доказано для всех остальных оснований без какого-либо различия, потому что основа этого доказательства в том, что всякое основание всегда равно удвоенному предыдущему в соответствии со Следствием 7 [§1] и что, в соответствии со Следствием 10 [того же §1] любое число ячеек одного и того же основания равны такому же числу ячеек предыдущего основания (которое всегда составляет знаменатель дроби в случае выигрыша) плюс еще те же ячейки без одной (которые являются числителем дроби при проигрыше). Это вообще имеет место всегда и доказательство никогда не встречает препятствий и является всеобщим.

Задача 2 – Предложение 2. Двое поставили по одной и той же сумме на определенное число партий игры. Найти при помощи арифметического треугольника стоимость последней партии относительно проигрываемой ставки [прибыль победителя относительно ставки противника].

Пусть два игрока поставили по 3 пистоля каждый на 4 партии. Требуется определить, какова стоимость последней партии относительно проигрываемой ставки. Возьмем дробь с единицей в числителе, и в знаменателе – с суммой ячеек четвертого основания, потому что игра идет на 4 партии. Я говорю, что эта дробь является стоимостью последней партии относительно проигрываемой ставки. Ибо, если двое играют 4 партии и первый набрал 3 очка и ему таким образом нехватает одного, а другому – четырех, то доказано, что за 3 выигранных партий первому положена прибыль, выражаемая дробью $(a_{51} + a_{42} + a_{33} + a_{24})/(a_{51} + a_{42} + a_{33} + a_{24} + a_{15})$, знаменатель которой равен сумме ячеек пятого основания, а числитель – его первые 4 ячейки.

И до полной суммы обеих ставок остается лишь $a_{15}/(a_{51} + a_{42} + a_{33} + a_{24} + a_{15})$. Эта сумма достанется тому, кто уже выиграл первые 3 партии, если он выиграет последнюю и поэтому стоимость последней партии относительно суммы обеих ставок равна $a_{15}/(a_{51} + a_{42} + a_{33} + a_{24} + a_{15})$, т. е. $1/(2a_{41} + 2a_{32} + 2a_{23} + 2a_{14})$. А так как сумма обеих ставок равна [знаменателю последней дроби], одна ставка равна [его половине] и стоимость последней партии относительно одной только проигрываемой ставки равна $1/(a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{14})$, т. е. удвоенной предыдущей, числитель которой равен единице, а знаменатель – сумме ячеек четвертого основания, что и требовалось доказать.

Задача 3 – Предложение 3. Двое поставили по одной и той же сумме на определенное и заданное число партий игры. Требуется установить при помощи арифметического треугольника стоимость первой партии относительно проигрываемой ставки.

Пусть двое поставили по 3 пистоля каждый на 4 партии игры. Требуется определить стоимость первой относительно проигрываемой ставки. Прибавим к четырем 3 (меньшее на единицу), сумма будет равна семи. Возьмем дробь, знаменателем которой являются все ячейки седьмого основания, а числителем – ячейка этого основания, которая находится среди разделительных, т. е. дробь $a_{44}/(A + a_{62} + a_{53} + a_{44} + a_{35} + a_{26} + B)$. Я говорю, что она является решением задачи, ибо если двое играют в 4 партии и первый набрал 1 очко, то ему нехватает трех, а другому – четырех, и потому первому причитается относительно обеих ставок дробь $(A + a_{62} + a_{53} + a_{44})/(A + a_{62} + a_{53} + a_{44} + a_{35} + a_{26} + B)$ со знаменателем, равным всем ячейкам седьмого основания и числителем, равным его первым четырем ячейкам. И ему положено $(A + a_{62} + a_{53} + a_{44})$ относительно суммы обеих ставок, выраженной знаменателем $(A + a_{62} + a_{53} + a_{44} + a_{35} + a_{26} + B)$. Но эта последняя сумма состоит из двух ставок, из которых первый игрок поставил одну, т. е. $[A + a_{62} + a_{53} + (1/2)\, a_{44}]$, ибо $(A + a_{62} + a_{53}) =$

($B + a_{26} + a_{35}$). И поэтому он имеет (1/2) a_{44}, т. е. на a_{34} больше, чем перед игрой, и, стало быть, он выиграл относительно всей суммы обеих ставок долю, выраженную дробью

$a_{34}/(A + a_{62} + a_{53} + a_{44} + a_{35} + a_{26} + B)$, а относительно проигрываемой ставки – удвоенное количество, выражаемое дробью

$a_{44}/(A + a_{62} + a_{53} + a_{44} + a_{35} + a_{26} + B)$. Такова полученная им прибыль за первую партию и такова ее стоимость.

Следствие. Поэтому стоимость первой партии из двух относительно проигрываемой ставки выражается дробью 1/2.

Ибо принимая это значение в соответствии с правилом, которое было только что приведено, следует взять дробь со знаменателем, равным [сумме] ячеек третьего основания (потому что играются 2 партии, а число меньшее на единицу есть 1**[6]**, так что вместе с двумя [...]) и с числителем, равным той ячейке того же основания, которая является разделительной. И дробь оказывается равной

$a_{22}/(a_{31} + a_{22} + a_{13})$. Число ячейки a_{22} равно 2, а сумма чисел ячеек [знаменателя] – 1 + 2 + 1, так что эта дробь [...] равна 1/2. Таким образом, первая партия приносит ему прибыль, равную этой дроби [...], что и требовалось доказать.

Задача 4 – Предложение 4. Двое поставили по одной и той же сумме на определенное и заданное число партий игры. Требуется установить при помощи арифметического треугольника стоимость второй партии относительно проигрываемой ставки.

Пусть число партий, на которое идет игра, равна четырем. Требуется установить стоимость второй партии относительно проигрываемой ставки. Примем стоимость первой партии из предыдущей задачи. Я говорю, что она же является стоимостью второй.

Пусть двое играют 4 партии и один из них набрал 2 очка, тогда дробь, которая ему положена, такова:

$(a_{61} + a_{52} + a_{43} + a_{34})/(a_{61} + a_{52} + a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16})$. Ее знаменатель – сумма ячеек шестого основания, а числитель – сумма его первых четырех ячеек. Но он поставил в игру

$(a_{61} + a_{52} + a_{43})/(a_{61} + a_{52} + a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16})$, т. е. половину всего и в качестве прибыли ему остается $a_{34}/(a_{61} + a_{52} + a_{43} + a_{34} + a_{25} + a_{16})$, или, что то же, $a_{44}/(A + a_{62} + a_{53} + a_{44} + a_{35} + a_{26} + B)$. И его выигрыш относительно половины всей поставленной суммы, т. е. относительно проигрываемой ставки, будет равен [...] удвоенной предыдущей дроби. Таким образом, прибыль от двух первых партий относительно проигрываемых денег приносит ему эту дробь, которая равна удвоенной сумме того, что он приобрел в соответствии с предыдущим. И вторая партия поэтому дает ему столько же, сколько первая.

Вывод. По соотношению, которое арифметический треугольник имеет с необходимым разделом ставки между двумя игроками, можно легко заключить, что следствия из отношений между ячейками, данные в [собственно] трактате о треугольнике, включают легко устанавливаемое определение стоимости партий, которое я кратко рассматриваю [здесь] при обсуждении раздела ставки и которое обеспечивает понимание и средство для дальнейшего изучения вопроса.

[2.4] Приложение арифметического треугольника к определению степеней биномов и апотомов[7]

Если предлагается найти некоторую степень, например четвертую, бинома, первый член которого A, а другой – единица, т. е. отыскать четвертую степень $A + 1$, следует взять арифметический треугольник с пятым основанием, а именно тот, чей номер 5 на единицу превышает 4, предложенный показатель степени. Ячейки пятого основания – 1, 4, 6, 4, 1. Первое число, 1, следует принять за коэффициент A в указанной степени, т. е. коэффициент A^4, затем взять второе число основания, 4, в качестве коэффициента A следующей низшей степени, т. е. A^3, а следующее число основания, т. е. 6, как коэффициент A в более низкой степени, т. е. A^2 и следующий номер основания, т. е. 4, как коэффициент A еще более низкой степени, т. е. самого A, и последний номер основания, 1, как свободный член. И таким образом мы получаем $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, что является четвертой степенью бинома $A + 1$. Так что если A (которое представляет любое число) равно единице и бином $A + 1$ становится равным 2, эта степень $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$ становится равной [...].

Иными словами, 1 раз четвертая степень A, которое равно 1, это 1;

Четырежды куб единицы, т. е. 4 […], что вместе составляет 16. И действительно четвертая степень двух равна 16.

Если A – другое число, например 4, так что $A + 1$ равно 5, то четвертая степень бинома по этому методу по-прежнему $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, т. е. $1 \cdot 4^4 + 4 \cdot 4^3 +$ […].

Иными словами, четвертая степень четырех, т. е. 256, 4 раза куб четырех, т. е. 256, [...] что вместе составляет 625. И действительно четвертая степень пяти равна 625. И таким же образом другие примеры.

Если требуется найти ту же степень бинома $A + 2$, следует взять то же выражение, $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, записать 4 числа, 2, 4, 8, 16, – первые 4 степени двух, – под каждым членом основания кроме первого таким образом: [...] и перемножить соответствующие числа: $1A^4 + 8A^3 + 24A^2 + 32A + 16$.

Так определяется четвертая степень бинома $A + 2$. Если A – единица, то эта степень окажется следующей [...]. Если A равно двум, то $A + 2 = 4$ и четвертая степень суммы будет [...]. И так до бесконечности.

Если вместо четвертой степени желательна пятая, то следует взять шестое основание и применить его так, как я описал в случае пятого и равным образом для всех остальных степеней.

Таким же образом могут быть определены апотомы $A - 1$, $A - 2$ и т. д. Метод полностью аналогичен и отличается лишь в смысле знаков, ибо знаки плюс и минус всегда чередуются и знак плюс всегда предшествует. Так, четвертую степень $A - 1$ можно определить следующим образом [...]. И так до бесконечности. Я ничего этого не доказываю, потому что другие, как, например, Эригон (Hérigone 1634), уже рассматривали это и кроме того суть очевидна.

[3]Трактат о числовых последовательностях

Я предполагаю, что читатель видел трактат об *Арифметическом треугольнике* и о его приложении к числовым последовательностям, в противном же случае я отсылаю тех, кто желает, просмотреть это сочинение, для которого данное является по существу продолжением. Я уже привел определение числовых последовательностей и не повторяю его.

Я также показал, что арифметический треугольник является ничем иным, как таблицей числовых последовательностей. Ясно поэтому, что все его свойства, указанные в *Арифметическом треугольнике*, относящиеся к его ячейкам или рядам, соответствуют числовым последовательностям, так что при небольшом умении применять свойства одних к другим не будет таких предложений в трактате о *Треугольнике*, которые не имели бы следствий, касающихся различных последовательностей.

И всё это связано воедино и столь просто и богато, что я вовсе не желаю указывать этого явно. Я предпочитаю совершенно оставить всё, потому что оно столь просто, но, чтобы удержаться между двумя крайностями, я приведу лишь несколько примеров, которые дадут возможность отыскать всё остальное. Например, из указанного в одном из следствий трактата о *Треугольнике*, что каждая ячейка равна предыдущей в той же строке плюс те, которые предшествуют предыдущей в ее столбце, я образую следующее предложение о числовых последовательностях.

Предложение 1. Число любой последовательности равно его предыдущему в той же последовательности плюс число того же столбца из предыдущей последовательности.

Следовательно, четвертое, к примеру, из пирамидальных равно третьему пирамидальному полюс четвертое треугольно-треугольное [просто треугольное]. И пятое треугольно-треугольное равно четвертому треугольно-треугольному плюс пятое пирамидальное и т. д.

Другой пример: Из указанного в *Треугольнике*, что каждая ячейка, как например a_{43}, равна $a_{42} + a_{32} + a_{22} + a_{12}$, т. е. равна предыдущей в той же строке плюс все те, предшествующие этой предыдущей в ее столбце, я образую следующее предложение.

Предложение 2. Число любой последовательности равно предыдущему в той же последовательности плюс те, которые в столбце предыдущего предшествуют ему.

И, стало быть, четвертое пирамидальное, к примеру, равно третьему пирамидальному плюс третьи треугольное и натуральное и третья из единиц, т. е. единица. Отсюда, далее, можно вывести другие следствия, как те, которые я представляю, чтобы открыть дорогу к иным подобным.

Предложение 3. Каждое число любой ячейки состоит из стольких чисел, сколько последовательностей имеется от той, в которой оно находится, до первой включительно, притом каждое из них выбирается в своей последовательности[8].

Так, треугольно-треугольное число состоит из другого такого же, пирамидального, треугольного, натурального и единицы. И если угодно решить [соответствующую] задачу, ее можно сформулировать так.

Предложение 4 – Задача. Дано число любой последовательности. Требуется найти число каждой последовательности от первой до заданной включительно, сумма которых равна данному числу.

Решение нетрудно. В каждой последовательности следует принять во внимание те числа, столбец которых на единицу меньше столбца заданного. Другой пример. Из того, что соответствующие [взаимные] ячейки равны друг другу, следует

Предложение 5. Два числа из различных последовательностей равны друг другу, если столбец одного равен номеру последовательности другого.

Посему, третье пирамидальное равно четвертому треугольному, а пятое в последовательности восьмого порядка то же, что восьмое в пятом и т. д. Закончить никогда нельзя было бы. Например

Предложение 6. Все четвертые числа всех последовательностей [соответственно] совпадают со всеми числами четвертой последовательности и т. д.

Потому что строки и столбцы одного и того же номера состоят из равных друг другу ячеек. Этим [?] методом определяется восхитительное соотношение [восхитительные соотношения] во всем остальном, как следующее.

Предложение 7. Число любой последовательности относится к непосредственно большему той же последовательности, как номер столбца меньшего к этому же номеру плюс номер последовательности без единицы.

Это вытекает из Следствия 14 [трактата] о *Треугольнике*, в котором было показано, что каждая ячейка относится к предыдущей в своей строке как номер основания предшествующей к номеру ее столбца.

И, чтобы ничего не скрывать в способе, которым справляются с этими отношениями, я указываю недостающее. Здесь это несколько труднее, чем чуть позже, потому что совсем не заметно отношения между основаниями [арифметических] треугольников и последовательностями чисел. Но вот средство, чтобы его обнаружить.

Номера оснований, о которых я говорил в этом Следствии 14, следует заменить на номер строки плюс номер столбца без единицы. И это приведет к тому же числу и притом в благоприятных условиях, когда знаешь отношение, которое имеет место у этих номеров с числовыми последовательностями. Ибо понятно, что на новом языке надо сказать: Номер последовательности плюс номер столбца без единицы. Я говорю всё это, чтобы коснуться метода этого приведения [перехода] и его упрощения. И мы находим

Предложение 8. Число любой последовательности относится к числу того же столбца в следующей последовательности как номер младшей последовательности к тому же номеру плюс общий номер их столбца без единицы.

Это – Следствие 13 [трактата] о *Треугольнике.* И обнаружится также

Предложение 9. Число любой последовательности относится к числу предыдущей последовательности, которое находится в последующем столбце, как номер столбца первого к номеру последовательности второго.

Это то же, что Следствие 12 [трактата об] *Арифметическом треугольнике.*

Я оставляю в стороне много других, каждое из которых столь же полезно, как те, которые я только что представил, притом быть может намного улучшенными иными формулировками. Вместо того, как я выразил эти пропорции, сказав, что одно из чисел относится к другому как третье к четвертому, нельзя ли сказать, что прямоугольник [произведение] крайних равно прямоугольнику средних и тем самым умножить, притом не без пользы, число предложений, так как, рассмотренные с другой стороны, они приводят к другим открытиям. Например, если желательно представить это последнее предложение иначе, его можно изложить таким образом.

Предложение 10. Число любой последовательности, умноженное на номер предыдущего столбца, равно номеру своей последовательности, умноженному на номер того же столбца из следующей последовательности.

И поскольку, когда 4 числа составляют пропорцию, произведение крайних или средних, деленное на одно из двух остальных чисел, дает в частном последнее число, можно сказать и так.

Предложение 11. [...]

Способов изложения одного и того же бесконечно много и вот выдающийся и весьма почетный для меня пример. Это самое предложение, которое я перебираю многими способами, пришло на ум нашему знаменитому советнику [парламента] в Тулузе, г-ну Ферма. И, что восхитительно, что хоть ни он не представил мне никаких намеков, ни я ему, он час за часом записывал в своей провинции то, что я изобретал в Париже, как о том свидетельствуют наши письма [1754г .], полученные и написанные в одно и то же время. Будучи рад соперничать по этому случаю, как и в других случаях, таким совсем странным способом со столь великим и восхитительным человеком, который все свои наиболее тонкие геометрические [математические] исследования выполняет самым превосходным образом, как его труды, которые я приобрел от него после продолжительных просьб, в скором времени убедят всех ожидающих их геометров Европы.

Способ, которым Ферма (1932, р. 36) вводит это самое предложение, таков:

> *В натуральной прогрессии, которая начинается с единицы, некоторое число, умноженное на ближайшее большее, производит удвоенное своего* [соответствующего исходному] *треугольного числа.*
> *То же число, умноженное на треугольное ближайшего большего, производит утроенное своего пирамидального.*

То же число, умноженное на пирамидальное ближайшего большего, производит учетверенное пирамидальное своего треугольно-треугольного.
И так до бесконечности, общим и однообразным методом.

Вот как можно видоизменять изложение. То, что я указал в этом предложении, слышится во всех остальных [изложениях] и я больше не останавливаюсь на этом способе рассматривать вещи и разрешаю каждому упражнять свой талант в этих исследованиях, в чем и должны состоять все изыскания геометров.

Ибо если не уметь по-всякому переворачивать [преобразовывать] предложения и довольствоваться лишь первым усмотренным окольным путем, то никогда очень уж далеко не пройдешь. Именно различные дороги, которые открывают новые следствия, и которые, при помощи изложений, приспособленных к теме, соединяют предложения, не имеющие, казалось бы, никакого отношения друг к другу в своих первоначальных терминах. И я продолжу эту тему тем способом, которым я привык исследовать геометрию и то, что я скажу, будет как бы новым трактатом по числовым последовательностям и я даже представлю его на латинском языке, потому что может случиться, что я также скажу что-то новое.

[Пари]

Pascal (1669), Отрывок без заглавия из посмертных *Мыслей о религии*, которые несколько раз переводились на русский; этих переводов мы не видели. Франц. текст в ОС, t. 2. Paris, 2000, pp. 676 – 681.

Давайте скажем: Бог либо существует, либо нет. Но к какой возможности нам следует склоняться? Разум не может ничего определить, нас разделяет бесконечный хаос[9]. В дальнем конце этого бесконечного расстояния играют в орлянку и выпадет либо орел, либо решетка. На что вы поставите? Разум не может выбрать ни то, ни другое, не сможет отстоять ни то, ни это. […]

Да, вы должны рискнуть. Здесь нет добровольности, вы втянуты. Что же вы выбираете? Посмотрим, раз уж вы должны выбирать, – посмотрим, что вас меньше интересует. Вы можете потерять две вещи, – истинное и доброе, – и две другие вовлечь в игру, – ваш рассудок и вашу волю, ваше сознание и блаженство, – а вашему естеству следует избежать двух вещей, – ошибки и нравственного убожества.

Поскольку вы обязаны выбирать, ваш разум не затронет ни тот, ни другой выбор. И вот одна сторона дела ясна. Но ваше блаженство? Поставив на орла, что Бог существует, взвесим же выгоду и потерю. Оценим эти два случая. При выигрыше вы выиграете всё, а если проиграете, не потеряете ничего. Так ставьте же не колеблясь на то, что Он есть. Это превосходно. Да, надо играть, но быть может я слишком рискую?

Посмотрим. Поскольку шансы выигрыша и проигрыша одни и те же, то при выигрыше только лишь двух жизней за одну вы всё еще можете рискнуть, но если вы получите три жизни, то рисковать придется (потому что играть вы обязаны) и было бы опрометчиво, раз уж вы вынуждены играть, не рискнуть своей жизнью, чтобы выиграть три в игре с равными шансами на потерю и выигрыш. Но есть вечная жизнь и вечное счастье. И это так; даже когда за вас лишь один-единственный шанс из бесконечного множества, у вас всё еще было бы основание рискнуть одной, чтобы получить две, и, будучи вынужденными играть, вы поступили бы наперекор здравому смыслу, отказавшись рискнуть одной жизнью против трех в игре, в которой из бесконечного множества шансов за вас один в пользу бесконечной жизни с бесконечным счастьем. Но на самом деле здесь один шанс за бесконечную жизнь с бесконечным счастьем против конечного числа шансов проигрыша, а ведь вы рискуете конечным.

Во всех случаях, в которых есть бесконечность без бесконечного множества шансов потери против шансов выигрыша, вы лишены выбора. Уравновешивать уже нечего, нужно отдать всё. И поэтому, если вы вынуждены играть, вы отречетесь от разума, если будете сохранять свою жизнь вместо того, чтобы рискнуть ей ради бесконечного выигрыша, который столь же возможен, сколь ничтожнейший проигрыш.

Нет никакого смысла говорить, что выигрыш ненадежен, а риск безусловен и что бесконечность расстояния между *несомненностью* поставленного на карту и *неуверенностью* выигрыша уравнивает конечное благо, наверняка подвергнутое случаю, неопределенной бесконечности. Это не так. Каждый игрок рискует наверняка в обмен на неуверенный выигрыш и тем не менее, не погрешив против разума, он определенно рискует конечным за неопределенный конечный выигрыш. И здесь нет никакого бесконечного расстояния между этой определенностью риска и неуверенностью выигрыша, это неверно. По правде сказать, есть бесконечность между достоверностями выигрыша и проигрыша, но неопределенность выигрыша уравнивается уверенностью. […] Отсюда следует, что если шансов на одной стороне столько же, сколько на другой, игра будет на равных. И таким образом несомненность того, чем вы рискуете, равна неуверенности выигрыша и они отнюдь не бесконечно далеки друг от друга.

И если рискуют конечным при равных шансах выигрыша и проигрыша и бесконечном выигрыше, наше утверждение бесконечно весомо. Это убедительно, и если человек способен познать какую-то истину, то вот она. […] Вы наверняка лишитесь зловонных удовольствий, славы и роскоши, но разве вы не получите ничего другого? […]

Примечания

1. Это непонятно, однако пример (см. ниже) уточняет мысль Паскаля.

2. Поставленное условие не соблюдено.

3. В оригинале *racine*. Принятый нами термин представляется более простым.

4. Эти леммы не выделены из контекста и вообще не названы леммами. Их не следует путать с четырьмя предыдущими.

5. Паскаль определяет это понятие не строго формально. В XVIII в. оно было подхвачено многими авторами, быть может независимо друг от друга (и явно независимо от Паскаля), в том же смысле "равномерной случайности".

6. Очень небрежное выражение.

7. Этот термин встречается у Евклида (книга 10). По крайней мере к Новому времени его смысл расширился, см. конец этого подпараграфа.

8. Это теорема существования. В Предложении 4 она дополняется.

9. Слово *хаос* у Паскаля часто означало пропасть. – Ред. примечание.

Библиография

Лаплас П. С. (Laplace P. S.), (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. В книге Прохоров Ю. В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.

Шейнин О. Б, составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин.

Edwards A. W. F. (1987), *Pascal's Arithmetical Triangle.* Baltimore, 2002.

Fermat P. (1932), *Bemerkungen zu Diophant*. Leipzig. Ostwald Klassiker der Exacten Wissenschaften, No. 234. Hrsg. M. Miller. В предисловии (с. 2) сказано, что эти *Замечания* были впервые опубликованы в 1670 г. на латинском языке и это означает, что Паскаль ознакомился с ними по рукописи. Ссылку привел Edwards (1987, с. 15).

Hacking I. (1975), *The Emergence of Probability*. Cambridge.

Hérigone P. (1634), L'Algèbre, tant vulgaire que spécieuse. В книге автора *Cours mathématique* etc., tt. 1 – 4, t. 2, pt. 2, pp. 16 – 18. Ссылка приведена в Pascal (1998, p. 1055).

Taton R. (1974), Pascal. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 9, pp. 330 – 342.

Христиан Гюйгенс

Предисловие переводчика

В истории теории вероятностей более всего известен трактат Гюйгенса (1629 – 1695) 1657 г., который посужил основой для 1-й части *Искусства предположений* Якоба Бернулли.

Не останавливаясь на нем, заметим, что в своих примечаниях к Предложению 14 трактата Бернулли (1713/2006, с. 60) указал, что тот решал вероятностные задачи либо *синтетически* (определяя искомые ожидания по другим, известным или более простым ожиданиям), либо *алгебраически* (если искомые ожидания зависели друг от друга).

Большой интерес представляют и посмертно опубликованные переписка и рукописи Гюйгенса, частично связанные с ней, а частично представленные в его *Полном собрании сочинений* (ПСС), (Гюйгенс 1888 – 1950) как дополнения к его трактату. Из литературы, посвященной этим рукописям и переписке, мы упомянем: Кортевег (1920), Шейнин (1977), Эдвардс (1983), Шусмит (1986), Суомела (1992) и Пресса (2001). Скажем теперь чуть подробнее об этой теме.

1. В связи со своим трактатом Гюйгенс рассмотрел

A) Решение задачи на разорение игрока, т. е. свою Дополнительную задачу № 5, см. Дополнение VI 1676 г., ПСС, т. 14, с. 151 – 155.

B) Решение своих Предложений 10 и 11 при помощи логарифмов, см. Дополнение VII 1676 г., там же, с. 156 – 164.

C) Игру Bassette, которая, однако, не имела отношения к его трактату; точнее, относящиеся сюда формулы почти без текста, см. Дополнение VIII, 1679 г., там же, с. 164 – 168.

D) Игру в пикет, также не имевшую отношение к его трактату, см. Дополнение IX 1688 г., там же, с. 169 – 179.

2. В связи с перепиской см.

A) Дополнение IV 1665 г., там же, с. 108 – 113.

B) Дополнение V 1665 г., там же, с. 116 – 150.

3. Переписка.

A) Письмо Гюйгенса П. Каркави 6.7.1656 г. ПСС, т. 1, с. 442 – 447: решение задач, предложенных Ферма.

B) Переписка с И. Хюдде 1665 г.: решение задач на азартные игры. ПСС, т. 5.

C) Переписка с братом Людовиком 30.10 – 28.11.1669 г.: обсуждение задач, связанных со смертностью. ПСС, т. 6, с. 515 – 517, 524 – 532, 537 – 539.

Ниже мы приведем переводы письма Гюйгенса Каркави и его переписки с братом, но предварительно кратко опишем его переписку с Хюдде.

Гюйгенс и Хюдде предложили друг другу несколько задач и решили их самостоятельно. Гюйгенс (10.5.1665, с. 532) при этом указал, что предложил своему корреспонденту задачу об игре в орлянку, чтобы доказать, что “в этой теме можно еще предложить что-то особое” (очевидно, сравнительно со своим трактатом). Задачи, которые они решали, не были легкими, но принципиально новыми их, пожалуй, не назовешь. Интересно также, что в письме Гюйгенсу 5.4.1665 г. Хюдде (с. 305) упомянул Я. де Витта, который, как можно понять, также решал по крайней мере одну из обсуждаемых ими задач.

Вот их основные задачи, условия которых Хюдде неоднократно представлял себе иначе, чем Гюйгенс, что приводило к недоразумениям, и которые мы сформулируем вслед за Кортевегом (1920). Затем мы опишем его решение своей как бы типовой задачи, которую он придумал, чтобы пояснить их задачи.

1. *A* и *B* играют по очереди в орлянку. Выбросивший орла ставит 1 дукат, а выбросивший решетку забирает все накопившиеся деньги. Пока ничего не поставлено, игра не заканчивается. Какова потеря *A*, который начинает игру?

2. *A* и *B* вслепую вытаскивают жетоны с возвращением. У *A* имеется 3 жетона, 2 белых и 1 черный, у *B* – жетоны тех же цветов.

Вытянувший черный жетон ставит 1 дукат, вытянувший белый забирает все накопившиеся деньги. *A* начинает и его положение поэтому снова хуже. Каково должно быть соотношение жетонов у *B*, чтобы положение игроков уравнялось?

3. Условия игры те же, что и в Задаче 1, но перед ее началом каждый игрок ставит одну и ту же сумму. Какова она должна быть, чтобы положение игроков уравнялось?

4. Условия и поставленный вопрос игры те же, что и в Задаче 1, но выбросивший решетку забирает только 1 дукат, а не все деньги и игра не заканчивается, пока кто-то не заберет последний дукат.

И вот типовая задача Кортевега (1920, с. 31 – 33). *A* и *B* играют по очереди в какую-то азартную игру. Если бросок игрока неудачен для него, он ставит 1 дукат, а если удачен, то забирает все накопившиеся деньги и игра заканчивается. Соответствующие вероятности для *A* при наступлении его очереди равны α_2 и α_1, а для *B* – β_2 и β_1, $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1$. Игра прекратилась при накопленной сумме *n* дукатов; как эти деньги должны быть распределены, если очередь играть за *A*? За *B*?

Пусть в первом случае доля *A* равна $\varphi\ (n)$, а во втором случае доля *B* равна $\psi\ (n)$, тогда

$$\varphi\ (n) = \alpha_1 n + \alpha_2\ [n - \psi\ (n + 1), \psi\ (n) = \beta_1 n + \beta_2\ [n - \varphi\ (n + 1)],$$

но в то же время

$$\varphi\ (n) = a_1 n + a_2,\ \psi\ (n) = b_1 n + b_2.$$

Параметры этих уравнений можно выразить через заданные вероятности и таким образом определить искомые доли. Так, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1/2$ оказывается, что $\varphi\ (n) = 2n/3 - 2/9$.

Задачи Гюйгенса и Хюдде Кортевег также решил при помощи разностных уравнений. Уместно заметить, что Гюйгенс в своем трактате решал поставленные им задачи в числах, хотя мог бы применить такие же уравнения и ставить свои задачи в общем виде.

Осталось упомянуть, что в некоторых своих письмах Гюйгенс впервые обратился к теоретико-вероятностным задачам вне пределов азартных игр и что безусловно интересны его соображения о моральной достоверности в физике и о познании причин по следствиям (Шейнин 1977, с. 251 – 252). Вот одна из его фраз, вполне в духе Лапласа (но без указаний на количественные оценки): “Принципы подтверждаются следствиями, которые мы из них извлекаем ...”

Переписка

Х. Гюйгенс – П. Каркави, Письмо 6 июля 1656 г.

Christiaan Huygens à P. de Carcavy. OC, t. 1, pp. 442 – 447

Месье Ферма решил мою задачу, что указывает мне, что он владеет общим методом для установления всего того, что относится к этому предмету и это единственное, что я хотел узнать, когда предложил ее. То же соотношение 30:31 [см. Предложение 14] находится в трактате, который я послал месье Схутену [для публикации] 2 месяца тому назад. Там же помещена теорема, которую я использую во всех вопросах, относящихся к разделу ставки в играх. И я привожу ее здесь, потому что иначе не смогу объяснить Вам, как я подступился к задачам, которые предложил месье Ферма. Включить сюда вычисления по некоторым из них было бы настолько длинным, что у меня нехватит терпения, чтобы довести их до конца. Вот почему в том, что приведено ниже, Вы уясните себе указанную теорему, я же удовлетворюсь сообщением своего метода, который позволяет привести к ней. Вот эта теорема.

Пусть число случаев для получения b равно p, а число случаев для получения c равно q. Тогда это стоит столько же, как если бы иметь $(bp + cq)/(p + q)$. Например, если я имею 2 случая получить 1/3 от того, что поставлено в игру, и 5 случаев получить 1/2, я умножаю […] и имею 19/42. Я говорю, что мне принадлежит 19/42 того, что поставлено в игру.

Первый вопрос месье Ферма таков. A и B играют двумя костями. A выигрывает, если откроет 6 очков, а B – если выбросит 7 очков. A бросает первым, потом B бросает их дважды, затем A – дважды, и так до тех пор, пока один из них не выиграет. Чтобы разделить ставку, я обозначу через d то, что поставлено в игру. И я назову x ту часть, которая принадлежит A. Итак ясно, что когда A бросил кости в первый раз, затем B – дважды и A закончил свой первый бросок, и всё безуспешно, A будет иметь ту же возможность выиграть, что и в начале игры. Поэтому ему будет снова принадлежать та же часть поставленного в игру, т. е. x.

Когда A приступает к первому из своих двух бросков, он имеет 5 шансов получить d и 31 шанс получить x, так как из 36 различных исходов, которые имеют место при двух костях, у него есть 5, чтобы выбросить 6 очков, т. е. таких, которые принесут ему d или то, что поставлено в игру, и 31, при которых 6 очков не появится и потому принесут ему x и переведут его в положение обладать еще одним броском перед тем. как наступит очередь B.

Но по предыдущей теореме 5 шансов получить d и 31 шанс получить x сто́ят $(5d + 31x)/36$. Такова, стало быть, доля A после того, как он закончил первый из своих двух бросков. Одним броском раньше, когда B закончил свои 2 броска, он выиграл бы при выбрасывании 7 очков, а A проиграл бы, что могло произойти в шести различных случаях. И перед этим [вторым] броском A имел 6 шансов получить 0 или ничего и 30 шансов получить $(5d + 31x)/36$.

Таким образом, в соответствии с предыдущей теоремой его очередь на 2 броска подряд сто́ят ему $(150d + 930x)/1296$ $[= (30/36) \cdot (5d + 31x)]$. Такова, стало быть, доля A после того, как B закончил свой второй бросок. Но когда B только приступает к своему первому броску, A имеет 6 шансов получить 0 и 30 шансов получить $(150d + 930x)/1296$ и это стоит $(4500d + 27\,900x)/46\,656$. И поэтому, когда A совершит свой первый бросок, он имеет 5 шансов получить d и 31 шанс получить $(4500d + 27\,900x)/46\,656$, что стоит $(372\,780d + 864\,900x)/1\,679\,616$ и это должно равняться x. Поэтому x равен 10 355/22 631 и такова доля A от того, что поставлено в игру. Остаток, 12 276/22 631, – доля B. Отношение этих долей равно 10 355/12 276 и это те самые числа, которые указал месье Ферма.

Во второй задаче предполагалось, что игрок *A* вначале имеет 2 броска, затем игрок *B* – 3 броска и далее *A* – [также] 3 броска. Метод [решения] вполне аналогичен и я снова установил те же числа, что и месье Ферма, но только он поменял их местами. Иначе говоря, доля *A* относится к доле *B* как 87 451/72 360, а не как 72 360/87 451.

В третьем [вопросе] три игрока, *A*, *B* и *C*, держат пари. Выиграет его тот, кто первым вытащит червовую карту из всех 52-х, если предполагается, что первым берет карту *A*, затем – *B* и третьим – *C* и так по очереди до тех пор, пока один из них не выиграет.

Среди 52-х карт имеется 13 червовых и потому, если случится, что все остальные 39 карт будут безуспешно выбраны в указанном порядке, то очередь играть перейдет к *A* и он выиграет наверняка. Когда, однако, *C* вытаскивает 39-ю карту и никто до него не извлек червовую, достоверно, что *A* имеет 13 шансов проиграть и 1 шанс получить всё, что поставлено в игру, и что, как выше, я обозначу через *d.* Итак, он имеет 13 шансов получить 0 и 1 шанс получить *d.* По нашей теореме это стоит 1/14 *d* и я устанавливаю, что когда *B* берет 38-ю карту, *A* имеет13 шансов получить 0 и 2 шанса на 1/14 *d* (это если *B* не вытянет червовую карту, потому что тогда *C* возьмет 39-ю). И эти шансы сто́ят 1/105 *d.*

Когда *A* берет 37-ю карту, он имеет 13 шансов получить *d* и 3 шанса получить 1/105 *d*, что стоит 1368/1680 *d.* Таким образом, каждый раз отступая назад на одну карту, мы в конце-концов определим долю *A* [на момент], когда он берет самую первую карту. И таким же образом устанавливается доля *B*, а остаток будет долей *C*.

Четвертый [вопрос] касается игры двоих в prime с 40 картами. Игрок *A* берется извлечь prime в четырех первых картах, а *B* держит пари, что это тому не удастся. Мне говорят, что получить prime означает заиметь 4 различные карты, т. е. по одной каждой масти. И я нахожу, что жребий *A* относится к жребию *B* как 1000 к 8139, так что можно вполне ставить 8:1, что кто-то не вытянет prime.

Пятый и последний вопрос относится к игре двоих в пикет, если первый берется заиметь 3 туза среди своих первых 12 карт, а второй держит пари, что это не удастся. Чтобы решить эту [соответствующую] задачу, я предполагаю, что *A* вытянул свои 12 карт одну за другой, потому что это [способ извлечения] не имеет никакого значения.

Если случится, что тот, кто взялся достичь цели, извлек 11 карт и уже заимел 2 туза, то среди 25 еще оставшихся карт находятся еще 2 туза. Имеется, стало быть, 2 шанса выиграть, т. е. получить *d* и 23 шанса получить 0, т. е. проиграть. Это стоит 2/25 *d.* Когда он взял 10 карт и получил 2 туза, то имеет 2 шанса получить *d* и 24 шанса получить 2/25 *d*, т. е. на то, что 2 туза [по-прежнему] находились бы в 11 картах. И эти шансы сто́ят 49/325 *d.* Но если он взял 10 карт и имеет только одного туза, то среди оставшихся 26 карт находятся еще 3, так что он будет иметь 3 шанса, чтобы получить 2/25 *d*, т. е. чтобы заиметь 2 туза в 11 картах. И 23 шанса, чтобы получить 0, т. е. чтобы [по-прежнему] иметь одного туза в 11 картах, потому что в этом случае он не сможет выиграть. Эти шансы сто́ят 3/325 *d*.

[Следует подобное рассуждение для 9 карт.]

И таким образом, каждый раз отступая на одну карту назад, я в конце-концов установлю этим методом долю игрока *A*, когда он еще не взял ни одной карты и, следовательно, не имеет ни одного туза. Эту долю надо вычесть из *d* и остаток окажется долей игрока *B*. И это то, что требуется установить.

Если я был достаточно осведомлен о состоянии вопроса об азартных играх, которые месье Ферма называет наиболее трудными, я исследовал и решил их. О тех, которые я рассматриваю, прошу Вас, месье, сделать мне одолжение и сообщить месье Милону[1]. И чтобы я смог узнать, будет ли то, что установили месье Ферма и Паскаль, соответствовать тому, что я разъяснил. Я также очень желал бы узнать, не исходят ли они из той же теоремы, что и я.

[В приложении к письму находятся подобные же расчеты.]

Людовик Гюйгенс – Христиану Гюйгенс, 30 октября 1669 г.

Lodewijk Huygens à Christiaan Huygens. OC, t. 6, pp. 515 – 518

[…] Я привожу свое не вполне верное вычисление возрастов, но нужно ли говорить, что [погрешности] никоим образом не существенны, поскольку в конечном счете английская таблица, на которой мы основываемся[2], не является столь уж правильной. Как говорит сам [ее] автор, “Эти числа практически достаточно близки к истине, потому что люди не умирают ни в точных пропорциях [одного возраста к другому], ни в дробных количествах”. Вот, стало быть, метод, которым я пользовался. Прежде всего я вычислял сумму лет, которую все эти 100 человек [исходное число в таблице Граунта] вместе должны прожить, т. е. 1822 года, как вы увидите на следующей странице.

36 человек, которые умирают до 6-тилетнего возраста, прожили в среднем 3 года, т. е. всего 108 лет

24 человека, которые умирают между 6-ю и 16-ю годами жизни, прожили в среднем 11 лет, т. е. всего 264 года […]

И один человек, который умирает между 76-ю и 86-ю годами, прожил 81 год

Всего 1822 года.

Эти 1822 года, разделенные поровну на 100 человек, дают каждому 18 лет и примерно 2 месяца [2.64 месяца], что является в среднем возрастом каждого рожденного или зачатого. Ибо, заметьте кстати, что англичанин имеет в виду зачатых, которые попадают в бюллетени [о смертности] так же, как и рожденные, потому что в наблюдения включались выкидыши и мертворожденные[3].

Итак, чтобы подойти к нашему подсчету и уточнить, сколько лет жизни остается каждому, находящемуся в том или ином возрасте, я поступаю так. Я прежде всего вычитаю 108 (общий возраст 36 детей, умерших до 6 лет) из всего числа 1822. Остаток 1714 должен быть разделен на 64 оставшихся в живых человека, так что каждому, т. е. каждому 6-тилетнему ребенку, приходится 26 лет и примерно 10 месяцев, т. е. в указанном возрасте 6-ти лет им остается 20 лет и 10 месяцев жизни. И затем вычтете из этих 1714 лет сумму возрастов 24 человек, которые умирают в возрасте от 6 до 16 лет (т. е. 264 года [= 24 · 11]), останется 1450. И это число следует разделить на 40 человек, которые остались в живых, так что каждый из них, т. е. каждый

в возрасте 16 лет, доживает до 36 лет и 3 месяцев и остаток его жизни равен 20 годам и 3 месяцам

в возрасте 26 лет доживает до 45 лет и 4 месяцев, так что остаток его жизни равен 19 годам и 4 месяцам […]

в возрасте 76 лет доживает до 81 года, так что остаток его жизни равен 5 годам

[никому] в возрасте 86 лет не остается ничего

Если я хочу определить остаток жизни для человека в возрасте, например, от 36 до 46 лет, – как в наших обоих возрастах, – я устанавливаю [это] пропорционально большему или меньшему избытку их возраста над 36-ю годами и т. д.

Ввиду сказанного выше, я не понимаю основания вашего вычисления [отношения] 4:3. По моему мнению, пари о том, проживет ли человек в возрасте 6 или 16 лет примерно еще 20 лет, можно держать примерно на равных. И я жду пояснений, поскольку отправил вам свои [...].

Христиан Гюйгенс – Людовику Гюйгенсу, 21 ноября 1669 г.

Christiaan Huygens à Lodewijk Huygens. OC, t. 6, pp. 524 – 532

Я только что просмотрел ваши вычисления возрастов и заново проделал свои, потерянные мной. [См. Приложение №1 к этому письму] [...] Вы достаточно верно заключили[4], что эти 100 человек вместе проживут 1822 года, но отсюда не следует, что 18 лет и 2 месяца, полученные делением этого числа на 100, окажется, как вы полагаете несомненным, возрастом каждого новорожденного или зачатого.

Предположим, например, что люди в младенчестве еще более хилы, чем в действительности, и что в первые 6 лет жизни из 100 обычно умирает 90, но что те, которые переходят за этот возраст, доживают обычно, как Несторы и Мафусалы[5], до 152 лет и двух месяцев. Для 100 человек вы получите тогда те же 1822 года, но в то же время тот, кто держит пари, что зачатый ребенок доживет хотя бы до 6 лет, окажется в весьма невыгодном положении, потому что лишь 1 из 10 достигает этого возраста.

Вот еще пример. Пусть в обычных предположениях я держу пари, что каждый из 100 зачатых доживет до 16 лет. Ясно, что из 100 к 16 годам обычно остается лишь 40, так что я окажусь в невыгодном положении. Чтобы пари было справедливым, я не должен предлагать больше, чем 40 против 60 или 2 против 3. И таким образом вы видите, что 18 лет и 2 месяца вовсе не является возрастом [до которого доживает] каждый зачатый, я нахожу его равным лишь примерно 11 годам.

Кто держит пари, что ребенок 6 лет доживет до 26, может ставить 25 против 39, потому что из 64 детей этого возраста до 26 лет доживает 25 против 39 умирающих раньше. И кто держит пари, что юноша 16 лет доживет до 36 может поставить 16 против 24 или 2 против 3, поскольку немного яснее, что 16-тилетний, а не 6-тилетний, проживет еще 20 лет.

Как вы видите, это вычисление весьма надежно и совсем нетрудно, но вы спрашиваете, как я могу определить, вслед за вами, сколько лет жизни остается по разумным основаниям человеку данного [любого] возраста. Чтобы ответить на это, я прикладываю небольшую английскую таблицу, не утруждая себя никакими вычислениями, но начертив кривую, на которой циркулем измеряю [продолжительность] жизни кого угодно. И я вижу, например, что в вашем возрасте 38 лет вы можете прожить еще 19 лет и примерно 4 месяца. Но если вы будете часто забавляться, призывая других колотить вас, придется какой-то срок убавить[6].

В другой раз я пошлю вам линию жизни [упомянутую кривую?] с разъяснениями и даже таблицу продолжительности жизни для каждого возраста, от года к году, что не будет мне ничего стоить [...]

Приложение №1 к письму того же числа

Просмотрев вычисления моего брата Людовика [я продолжаю].

[Следует выписанная таблица Граунта с повторением ошибочного, см. наше Прим. 2, замечания Людовика о том, что в таблице Граунта учтены выкидыши и мертворожденные.]

[Следовательно], кто держит пари, что зачатый ребенок доживет до шести лет, может ставить 64 против 36 или 16 против 9. И кто бьется об заклад, что зачатый ребенок доживет до 16 лет, может ставить лишь 40 против 60 или 2 против 3, потому что из 100 лишь 40 доживает до возраста 16 лет. Но кто держит пари, что ребенок 6 лет доживет до 16, может ставить 40 против 24 или 5 против 3, потому что из 64 человек в возрасте 6 лет 40 доживает до 16, а 24 умирает до этого. [...]

[Следует таблица, основанная на данных Граунта и имевшаяся в письме Людовика Гюйгенса: 36 · 3 = 108; 24 · 11 = 264 и т. д., см. наше Примечание 3, сумма равна 1822. И далее, снова как у Людовика: 1822 [общий возраст] 100 человек, минус 108 = 1714, [общий возраст] 64 человек, минус 264 = 1450, [общий возраст] 40 [человек] и т. д.]

Таким образом, зачатый ребенок имеет 36 шансов прожить 3 года, 24 шанса прожить 11 лет, 15 шансов прожить 21 год и т. д. И по моему правилу [принципу исследования] азартных игр следует умножить каждое число шансов на соответствующее число лет и разделить сумму произведений, которая здесь равна 1822, на сумму всех шансов, равную 100. И частное, равное здесь 18 годам и примерно 2½ месяцам, будет стоимостью шанса зачатого ребенка.

Метод моего брата Людовика привел к тому же самому, хотя и другим путем.

Но хотя ожидание зачатого ребенка стóило бы 18 лет и 2½ месяца, это не означает, что он, очевидно, столько и проживет, потому что намного более ясно, что он умрет раньше этого срока. Поэтому, кто желает держать пари, что ребенок достигнет этого возраста, окажется в невыгодном положении; можно на равных биться об заклад, что он доживет только примерно до 11 лет. Ошибочно говорить, что можно на равных заключить пари, что ребенок 6 лет или [подросток] 16 лет проживет еще 20 лет. Можно ставить лишь 25 против 39 в первом случае и 2 против 3 во втором, хотя ожидания в обоих случаях стóят 20 лет и было бы неверно принимать, что оно меньше. Его [Людовика] вычисления подходят для [подсчетов] пожизненных рент.

Узнать, через какое время из 40 человек в возрасте 46 лет умрут двое. Ответ: [через] 1 год и 3 месяца. В возрасте от 46 до 56 лет из 10 умирает 4. Следовательно, из 40 в этом возрасте в течение 10 лет умрет 16 [а потому] двое – за 1 год и 3 месяца.

Мужчина в возрасте 56 лет женится на женщине 16 лет. Сколько они могут прожить вместе не умирая[7]. Или, если мне обещают 100 франков в конце кажого года, в течение котрого они оба живы, за какую справедливую цену можно выкупить это обязательство? И также, через какое время они оба должны умереть.

Через какое время умрет 40 человек, каждый в возрасте 46 лет? И через какое время – двое, каждый в возрасте 16 лет? Ответ: через 29 лет и 2 2/3 месяца.

Остаток жизни и возраст, до которого доживает

Зачатый ребенок: 18.22, почти 18 лет и 2 2/3 месяца; до 18.22 года
Ребенок 6 лет: 20.81 или 20 лет и 10 месяцев; до 26.81 года
16-тилетний: 20.25 или 20 лет и 3 месяца; до 36.25 года
26-тилетний: 19.40 или 19 лет и 5 месяцев; до 45.40 года
36-тилетний: 17.50 или 17 лет и 6 месяцев; до 53.50 года
46-тилетний; 15.00 или 15 лет и 0 месяцев; до 61.00 лет
56-тилетний: 11.67 или 11 лет и 8 месяцев; до 67.67 года
66-тилетний: 8.33 или 8 лет и 4 месяца; до 74.33 года
76-тилетний: 5.00 или 5 лет и 0 месяцев; до 81 года
86-тилетний: 0.00 или 0 лет и 0 месяцев; до 86 лет

Чтобы узнать, сколько проживет последний из двух в возрасте 16 лет, следует представить себе, что каждый из них вытаскивает билетики из комплекта в 40 штук, которые дают

15 билетиков – 5 лет
9 билетиков – 15 лет
6 билетиков – 25 лет
4 билетика – 35 лет
3 билетика – 45 лет
2 билетика – 55 лет
1 билетик – 65 лет

И они вытянут [вместе] 2 билетика, причем последний получает билетик с бóльшим сроком жизни. Пусть первый вытягивает билетик. Достоверно, что он имеет 15 шансов получить тот, который дает ему еще 5 лет жизни. И 9 шансов получить билетик, дающий 15 лет жизни и т. д. И если он вытянет один из тех, которые дают 5 лет, второй тоже должен после этого тянуть свой жребий. И всё, что достанется ему меньше 5 лет [см. ниже], не повредит ему, потому что первый уже получил билетик с 5 годами, так что всё, что может достаться второму меньше 5 лет, сто́ит столько, сколько 5. Но второй имеет 15 шансов, из которых 7½, чтобы прожить меньше 5 лет, и 7½, чтобы прожить 6, 7, 8, 9 или 10 лет[8], и это сто́ит столько же, сколько 7½, чтобы прожить 8 лет. И еще 25 шансов, которые сто́ят 16-тилетнему 29.40 лет (эти шансы должны считаться именно так, потому что ни один из них не дает менее 5 лет) [(9.15 + 6.25 + ... + 1.65)/25 = 29.4].

Итак, первый вытянул свой билетик из 15, чтобы заиметь 7½ шансов на 5 лет, 7½ – на 8 лет и 25 шансов на 29.40 лет. Он также имеет 9 шансов вытянуть билет на 15 лет и тогда все те меньшие, которые могут достаться второму, будут сто́ить 15 лет. Но второй имеет 15 шансов, которые дают менее 15 лет и которые [однако] равнозначны 15 шансам на 15 лет. И 9 шансов, из которых 4½ дают меньше 15 лет, которые [однако] также равны 15 и другие 4½ на 16, 17, 18, 19 или 20 лет, которые сто́ят столько же, сколько 4½ на 18 лет. И еще 16 шансов, чтобы прожить 37½ лет. И первый при вытягивании билетика имеет также 19½ шанса на 15 лет, 4½ – на 18 и 16 шансов на 37½ лет. И так далее как показано на полях [см. в конце этого приложения]. Он имеет [количества шансов умножены на сроки жизни]

15 шансов на 20.3; 304.5
9 шансов на 24.3; 218.7
6 шансов на 30.2; 181.2

4 шанса на 37.6; 150.4
3 шанса на 46.1; 138.3
2 шанса на 55.3; 110.6
1 шанс на 65.0; 65.0

Всего 1168.7

29.22 года [= 1168.7:40], которые имеет последний из двух в возрасте 16 лет. Иначе говоря, один из двух доживет до 45 лет и 2 2/3 месяцев.

Чтобы узнать, через какое время умрет один из этих двоих, надо снова представить себе, что они, один за другим, вытягивают билетики из комплекта в 40 штук, из которых 15 дают 5 лет, 9 – 15 лет и т. д., как и в предыдущей задаче, но теперь следует принимать годы меньшего билетика.

Первый вытаскивает свой билетик и имеет 15 шансов прожить 5 лет, 9 – чтобы прожить 15 лет и т. д. И если ему попадется один из этих 15, то второму, какой билетик он ни вытянул бы, не будет никакого толка получить более 5 лет, потому что из двух [извлеченных] билетиков выбирают меньший. Но, напротив, можно еще несколько уменьшить этот срок, ибо по отношению к этому второму следует учесть, что из 15 билетиков по 5 лет 7½ дают более 5 лет, которые тем не менее сто́ят лишь 5, и 7½ – на 5, 4, 3, 2 года или на 1 год. И кроме этих 15 билетиков или шансов второй имеет еще 25, которые могут дать ему лишь 5 лет.

Итак, первый имеет 15 шансов, чтобы заиметь 7½ шансов на 3 года и 32½ шанса на 5 лет. Он также имеет 9 шансов получить билетик с 15 годами. И если он вытянет один из них, второй, который вытягивает следом, не может получить ничего большего. Но эти 15 лет можно уменьшить, если вытянуть один из 15 билетиков на 5 лет или один из 4½, которые ниже 15 и сто́ят 13 лет. Другие 4½ сто́ят также лишь 15 даже если они указывают больше. И второй кроме этих 15 и 9, т. е. кроме 24 шансов, имеет еще 16, которые могут дать ему только 15. Итак, первый имеет еще 9 шансов, чтобы получить 15 шансов на 5 лет, 4½ – на 13 и 20½ шансов на 15 лет. [Гюйгенс видимо не закончил этого вычисления – ред. прим.]

[Приводим “показанное на полях”.]

15 – 7½ – 5;	7½ – 8;	25 – 29.40	... 20.3	[20.8]
9 – 19½ – 15;	4½ – 18;	16 – 37½	... 24.3	
6 – 27 – 25;	3 – 28;	10 – 45	... 30.2	
4 – 32 – 35;	2 – 38;	6 – 51.67	... 37.6	
3 – 35½ – 45;	½ – 48;	3 – 58.33	... 46.1	
2 – 38 – 55;	1 – 58;	1 – 65	... 55.3	
1 – 39 – 65;	1 – 66½;		... 65.0	

[Исправленное нами в первой строке конечно же следовало дополнить неизбежными последующими исправлениями, которых мы, однако, не сделали.]

вставьте рисунок

Приложение №2 к письму того же числа *чуть ниже*

На линии [прямой] основания указаны [возрасты, см. рисунок]. Для 6 лет перпендикуляр [длиной] в 64 части [от 100], потому что в английской таблице в этом возрасте остается 64.. Для отметки 16 перпендикуляр имеет длину 40, потому что [...] и т. д. И через все эти точки или концы перпендикуляров я провожу кривую 64, 40, 25 и т. д. Если я хочу узнать, сколько теперь человек остается после 20 лет из 100 зачатых, я выбираю на линии основания возраст 20 лет в точке A, откуда восставляю перпендикуляр, который встречает кривую в точке B. И я говорю, что AB, с длиной в масштабе основания почти в 33 части, есть число лиц из 100 зачатых, достигающих возраста 20 лет.

Если, далее, я захочу узнать, сколько, как можно разумно полагать, останется жить человеку в возрасте, например, 20 лет, я принимаю половину BA и определяю DC [$= 1/2BA$] между кривой и прямой [и основанием]. И я получаю AC для числа лет оставшейся жизни у указанного лица, которое равно почти 16 годам, как это показано делениями, каждое из которых равно одному году. Причина этого в том, что перпендикуляр DC, равный половине BA, указывает число лиц, оставшихся из 100 через 20 лет после зачатия, т. е. 33, и DC попадает в точку основания 36, которая соответствует половине от 33, т. е. 16½ оставшихся в живых после 36 лет. Но поскольку из 33 человек в возрасте 20 лет половина обычно умирает в ближайшие 16 лет, можно держать пари на равных, что человек в возрасте 20 лет проживет еще 16. Можно также установить, что жизнь зачатого ребенка следует оценивать в 11 лет вместо 18 лет и 2 месяцев, как это сообщает мой брат.

Христиан Гюйгенс – Людовику Гюйгенс, 28 ноября 1669 г.

Christiaan Huygens à Lodewijk Huygens. OC, t. 6, pp. 537 – 539

Вычисления, которые я вам послал, без сомнения озадачат вас. С тех пор я подумывал о них, а также и о ваших и нахожу, что каждый из нас имеет основания принимать вещи по-разному. Вы даете зачатому ребенку 18 лет и 2½ месяца жизни, и это верно, что столько сто́ит его ожидание. Однако, не очевидно, что он проживет столько и намного более ясно, что он умрет раньше, так что кто желает держать пари, что он доживет до этого возраста, окажется в неблагоприятном положении. Можно биться об заклад на равных, что, как я определил своим способом, он доживет лишь примерно до 11 лет. Равным образом, ожидание 6-тилетнего ребенка или юноши 16 лет сто́ит, как вы говорите, 20 лет, но вы не можете заключить, что шансы за и против будут одними и теми же, если держать пари, что он проживет еще 20 лет. Для пари на равных можно ставить лишь 25 против 39 для первого и 2 против 3 для второго. Или иначе, для 16-тилетнего можно держать пари на равных, что он проживет еще 15 лет.

Ожидание или цена будущего возраста человека и возраст, которого он имеет равные возможности достичь или не достичь: первое служит для определения [стоимости] пожизненных рент, второй – для пари. Я посмотрю, делаете ли вы то же различие. Впрочем, ваш метод очень хорош и остроумно выведен. Он в точности сводится к тому же, что я нахожу в соответствии со своими правилами [принципами исследования] случаев, опубликованными в [трактате 1657 г.], т. е. что, например, зачатый ребенок имеет 36 шансов прожить 3 года, 24 – прожить 11 лет и т. д., потому что по [моему] правилу, чтобы вывести [искомое] значение следует умножить каждое число шансов на то, что они дают, и разделить сумму произведений на сумму всех шансов.

По поводу ваших капитанов[9] вы, как я полагаю, применили английскую таблицу. Если из 10 человек в возрасте от 46 до 56 лет за 10 лет умрет 4, то из 40 человек в том же возрасте – 16. И если 16 умрет за 10 лет, то по тройному правилу двое – за 1 год и 3 месяца. Однако в соответствии с этим вычислением из 40 умирают двое за 15 месяцев, если положить, что каждому 46, а не 50. И не следует полагать, что в точности 15 месяцев, потому что они умирают не равномерно в течение 10 лет, а скорее в первые годы, когда их группа многочисленнее, чем когда смерть [уже] похитит некоторых[10].

Вот довольно хорошенький вопрос, который представляется мне намного труднее, чем вопрос о капитанах и который я еще не решил, хотя вижу способ как это сделать. Два человека, по 16 лет каждому. Как долго по нашему ожиданию они проживут вместе не умирая? И также, через какое время они оба умрут? Это по существу два разных вопроса и следует подумать о каждом.

Если принять возрасты этих двоих различными, – например, одному 16, а другому 56, – то это привнесет некоторые изменения, но не серьезные затруднения, раз уж будет решена задача для одинаковых возрастов.

Кривая, о которой я говорил в своем предыдущем письме, служит лишь для [решения задачи о] пари и поэтому мне нет нужды посылать ее вам, но можно это сделать, притом увеличив ее размер, чтобы дополнить вашу таблицу остатков жизни для каждого возраста [...]. [Приложен чертеж плавной кривой с точками на ней, из которых опущены перпендикуляры до пересечения с осью. Координаты этих точек взяты из таблицы *Остаток жизни и возраст, до которого доживает* в Приложении №1 к предыдущему письму. Так, координаты первой точки (0; 18 1/6).]

Примечания

1. Claude Mylon (прим. 1618 – прим. 1660) заслужил признание не научными трудами, а научным посредничеством между Гюйгенсом, Каркави, Робервалем и Ферма.

2. Мы не можем объяснить, почему ни Людовик, ни Христиан не называли Граунта по имени. Цитата из книги Граунта (см. чуть ниже) взята из гл. 11, пункт 9 (Граунт 1662/2005, с. 75).

3. Действительно, Граунт по меньшей мере дважды указал на это, однако он четко заявил, что свою таблицу составил для живорожденных, см. место, указанное в Прим. 2.

4. Это замечание несомненно относится к осреднению возрастов: рассматривая число умиравших в течение некоторого интервала времени, Людовик (да и сам Христиан, см. ниже) полагал, что все они доживали до середины этого интервала.

5. Нестор – древнегреческий мифологический царь, прожил 200 лет, Мафусал (Бытие 5:27) же – 969 лет.

6. Мы не беремся комментировать это.

7. Отдельных таблиц смертности для мужчин и женщин в то время не было и в помине.

8. Несколько необычно выглядит дробное число шансов.

9. Христиан несомненно ссылается на какое-то предыдущее письмо Людовика, который задал вопрос о вымирании 40 капитанов, притом каждого из них в возрасте 50 лет (см. чуть ниже).

10. Здесь Гюйгенс допустил ошибку: он принял непрерывное и равномерное распределение на некотором интервале, а в этом случае n порядковых статистик разделят интервал на $(n + 1)$ примерно равных частей. Заметим, что Гюйгенс пользуется условными ожиданиями, например, при определени ожидания срока жизни одного лица при определенном условии.

Библиография

Бернулли Я., Bernoulli J. (1713, латинск.), *Искусство предположений*, части 1 – 3. Берлин, 2006.

Граунт Дж., Graunt J. (1662, англ.), Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики и математики страхового дела*. Берлин, с. 5 – 105.

Гюйгенс Х., Huygens C. (1657, латинск.), Вычисления в азартных играх. (1888 – 1950, 1920, pp. 49 – 91, франц. и голл.). Перевод в книге Шейнин (2006, с. 28 – 42).

--- (1888 – 1950), *Oeuvres Complètes*, t. 1 – 22. La Haye. Тома 1, 5, 6 и 14 изданы в 1888, 1893, 1895 и 1920 гг. соответственно.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1977), Early history of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 17, pp. 201 – 259.

---, составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин.

Edwards A. W. F. (1983), Pascal's problem: the gambler's ruin. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 51, pp. 73 – 79. Также в книге автора (2002, второе изд.), *Pascal's Arithmetic Triangle.* Baltimore, pp. 157 – 166.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

Korteweg D. S. (1920), Aperçy de la gènese de [Huygens 1657] et de recherches subséquentes de Huygens sur les questions de probabilité. В книге Huygens (1888 – 1950, 1920, pp. 3 – 48).

Pressat R. (2001), C. Huygens et la table de mortalité de Graunt. *Math. Sci. Hum.*, No. 153, pp. 29 – 36.

Shoesmith E. (1986), Huygens' solution to the gambler's ruin problem. *Hist. Math.*, vol. 13, pp. 157 – 164.

Suomela P. (1992, финск.), The devil's share. *Arkhimedes*, t. 44, pp. 272 – 280. Англ. рез. в *Math. Rev.*, 1993k:01026.

Адриен Мари Лежандр

Предисловие переводчика

Известно, что Лежандр (1752 – 1833) первым, в 1805 г., опубликовал свое открытие МНКв, Гаусс же применял его с 1794 или 1795 г. Впрочем, до 1809 г., когда вышло в свет первое гауссово обоснование метода, а еще точнее – до 1823 г., когда появилось его второе обоснование, правильнее говорить не о методе, а о принципе наименьших квадратов. Сразу же заметим, что варианты работы Лежандра 1805 и 1814 гг. практически совпадают за исключением своих заглавий, см. ниже. Правда, в 1805 г. Лежандр добавил приложение МНКв к обработке измерения дуги меридиана во Франции (и, частично, Испании вплоть до района Барселоны). Он разбил эту дугу на 4 части, получил соответственно 4 исходных уравнения и вывел параметры земного эллипсоида вращения, см. Стиглер (1986, pp. 57 – 60). Лежандр не преминул также заметить, что полученное им сжатие эллипсоида недопустимо уклонялось от результатов маятниковых наблюдений (которые были несравненно ближе современным данным). Стиглера мы упомянем и ниже, но в крайне отрицательном смысле.

Французские авторы после Лапласа были склонны замалчивать заслуги Гаусса. Вот характерное высказывание Пуассона (1833, с. 361):

> *Наш* [покойный] *сочлен являлся автором метода вычисления орбит комет. Это ему наука наблюдения обязана правилом вычисления, которое называется методом наименьших*

> *квадратов ошибок и которому Лаплас придал всё вероятное* [вероятностное] *преимущество в смысле точности результатов.*

О Гауссе ни слова!

Бросается в глаза различие стилей Лежандра и Гаусса: у Лежандра изложение, рассчитанное на широкий круг специалистов, у Гаусса же оно сухое, весьма абстрактное и в 1823 г. очень трудное для понимания. Но, конечно же, Лежандр исходил лишь из здравого смысла и его утверждение о вероятнейших результатах МНКв (см. заглавие) основывалось только на доказательствах Лапласа, пригодных лишь для большого числа наблюдений и соблюдении предпосылок ЦПТ, которую он притом доказал весьма нестрого (Лаплас 1810a; 1810b). Можно полагать, что Лежандр успел ознакомиться с этими доказательствами; во всяком случае, в заглавии первоначальной публикации о *вероятнейшем* ничего не было и в помине.

Лежандр к тому же совершил две ошибки. Во-первых, как указал, например, Эйзенхарт (1964, p. 268), он не отметил различия между ошибками свободных членов исходных уравнений (т. е. ошибками наблюдений) и остаточными свободными членами, полученными в результате подстановки в эти уравнения вычисленных значений (= оценок) неизвестных[1]; его выражение типа "свести ошибки к нулю" неприемлемо.

Во-вторых (грубая методическая ошибка), Лежандр если и не утверждал, то давал понять, что МНКв приводит к наименьшим значениям максимальных ошибок. На самом же деле к этому условию приводит условие максимина, – минимальность предела суммы величин типа E_i^{2m}, $m \to \infty$, о чем Лежандр мог бы прочесть у Гаусса (1809, §186).

Более чем странно утверждение Стиглера (1986, p. 13): работа Лежандра

> *по своей полной ясности формулировки принципов является непревзойденной. Ее следует считать одним из самых ясных и изящных введений нового статистического метода в истории статистики.*

Непревзойденными на самом деле оказались многочисленные ложные и даже клеветнические высказывания в *эпохальной* книге (Хальд 1998, с. xvi) Стиглера, которому никто кроме нас не возразил и которые никто кроме нас не опровергнул. Назовем "низвержение" Эйлера (Стиглер 1986, p. 27) и его же последующее безудержное восхваление (1999, p. 318), почти полное отрицание заслуг Гаусса (1986, pp. 143, 146) и даже клевета на него (там же, с. 145), неверное описание недавно опубликованной рукописи Даниила Бернулли (1997), отрицание в 1983 г. за Бейесом его посмертного мемуара (см. Стиглер 1999, pp. 300 – 301), основанное на недопустимом назначении априорных и апостериорных вероятностей авторства Бейеса и другого лица и, наконец (1999, p. 52), восхваление автора, который полагал, что Пуассон ввел усиленный закон больших чисел, а Гаусс вывел нормальный закон как предельный для биномиального распределения, см. об этом авторе нашу рецензию (*Isis*, vol. 92, 2001, pp 184 – 185). Об указанных выше эпохальных открытиях Стиглера см. хотя бы Шейнин (2005). Приглашаем читателей подумать, как всё это могло случиться.

Мы ввели обычное обозначение для сумм, Лежандр же пользовался символом интеграла.

Хорошо известно, что Гаусс назвал принцип наименьших квадратов “наш принцип” (1809, § 186), что особенно задело Лежандра. Да, формально Гаусс был неправ (хотя его исследование было несравненно глубже) и мы можем только повторить мнение Бирмана (1966, p. 18):

> *Что запрещено обычному автору, должно быть разрешено гауссам, и во всяком случае мы обязаны уважать его* [Гаусса] *исходные соображения.*

Мы дополнительно перевели полное горечи заявление Лежандра 1820 г. (почему-то анонимное), безусловно вызванное и отказом Гаусса ответить на его, Лежандра, письмо к нему 1809 г.; см. также Шейнин (2006, с. 118 – 120). Этим же, видимо, в большой степени было вызвано отношение Пуассона к Гауссу, см. хотя бы выше.

I. Метод наименьших квадратов для определения вероятнейшего среднего из результатов различающихся наблюдений

Legendre A. M. (1814), Méthode des moindres quarrés, pour trouver le milieu les plus probable entre les résultats de différentes observations. Mém. Cl. sci. math. et phys. Acad. Sci. Paris, t. 11, pt. 2, année 1810, pp. 149 – 154

Прочитано 24 сент. 1811 г.

Месье граф Лаплас[2] обнаружил в своих рассуждениях, основанных на исчислении вероятностей, что метод наименьших квадратов должен предпочитаться всем другим для определения наиболее точных средних значений одного или многих неизвестных элементов, выводимых из всех тех, которые даются различными различающимися наблюдениями. Я полагаю, что те, кто хотел бы применять этот метод, будут очень рады найти здесь то, что я опубликовал в 1805 г. [Лежандр 1805].

В большинстве задач, посвященных извлечению из полученных измерений наиболее точных результатов, которые они могут предоставить, почти всегда возникает система уравнений вида

$$E = a + bx + cy + fz + \ldots$$

Здесь $a, b, c, f, \ldots$ – коэффициенты неизвестных [a – свободный член], изменяющиеся от одного уравнения к другому, а $x, y, z, \ldots$ – неизвестные, которые должны быть определены под условием, что значение E в каждом уравнении сведется либо к очень небольшой величине, либо к нулю.

Если уравнений столько же, сколько неизвестных $x, y, z, \ldots$, то в их определении нет ничего трудного и погрешности [свободных членов] E можно в точности свести к нулю. Но чаще всего число уравнений больше числа неизвестных и уничтожить все ошибки невозможно. В этих условиях, которые имеют место в большинстве задач физики[3] и астрономии, когда стараются [совместно] определить несколько важных элементов, в распределение ошибок неизбежно проникает произвол и не следует думать, что все предположения [об этом распределении] приведут в точности к тем же самым результатам. Но особенно важно поступать так, чтобы чрезмерные ошибки без учета их знака были заключены в наиболее тесные, насколько возможно, границы.

Из всех принципов, которые можно предложить по этому поводу, нет, как я полагаю, ни более общего, ни более точного, ни более простого в приложении, чем тот, который я применил в предшествующих исследованиях [в 1805 г.] и который состоит в том, чтобы привести к *минимуму* сумму квадратов ошибок. При этом между ошибками устанавливается своего рода равновесие, которое, препятствуя преобладанию чрезмерности, весьма подходяще для установления состояния системы, наиболее близкой к истине.

Сумма квадратов погрешностей $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \ldots$ равна

$$(a_1 + b_1x + c_1y + f_1z + \ldots)^2 + (a_2 + b_2x + c_2y + f_2z + \ldots)^2 + \ldots$$

Если отыскивать ее *минимум*, изменяя одно лишь x, мы получим уравнение

$$0 = \sum ab + x\sum b^2 + y\sum bc + z\sum bf + \ldots,$$

в котором под $\sum ab$ понимается сумма аналогичных произведений $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$, под $\sum b^2$ – сумма квадратов коэффициентов x, т. е. $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots$

Аналогичный *минимум* по отношению к y приводит к

$$0 = \sum ac + x\sum bc + y\sum c_2 + z\sum fc + \ldots,$$

а *минимум* по отношению к z – к

$$0 = \sum af + x\sum bf + y\sum cf + z\sum f^2 + \ldots$$

Видно, что одни и те же коэффициенты $\sum bc$, $\sum bf$ …, являются общими для двух уравнений, что способствует упрощению вычислений.

Вообще, чтобы образовать уравнение по условию минимума относительно какого-либо неизвестного, следует умножить все члены каждого данного уравнения на коэффициент при этом неизвестном в соответствующем уравнении, взятым со своим знаком, и суммировать все полученные произведения.

Таким образом выводится столько уравнений, соответствующих условию *минимума*, сколько имеется неизвестных и эти уравнения нужно решить обычными методами. Но следует озаботиться сократить все вычисления и при [предварительных] умножениях, и при решении [системы уравнений] и при каждом действии удерживать лишь столько целых и дробных десятичных знаков, сколько их требует степень приближения данной задачи.

Если при особом стечении обстоятельств окажется возможным удовлетворить все уравнения и свести все погрешности к нулю, мы равным образом получим тот же результат по методу сведения к *минимуму*. Ибо, если после определения значений $x, y, z, \ldots$, которые привели к нулю $E_1, E_2, \ldots$, варьировать [эти] $x, y, z, \ldots$ на величины $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ то ясно, что E_1^2, которое было нулем, станет равным[4] $(a_1\delta x + b_1\delta y + c_1\delta z + \ldots)^2$. И то же самое произойдет с E_2^2, $E_3^2, \ldots$, так что видно, что сумма квадратов ошибок станет при этом варьировании величиной второго порядка относительно $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$, что соответствует природе *минимума*.

Если, определив все неизвестные $x, y, z, \ldots$, подставить их значения в данные уравнения, мы определим различные ошибки $E_1, E_2, E_3, \ldots$, которые возникли в этой системе и которые нельзя уменьшить без увеличения суммы их квадратов. И если среди них найдутся такие, которые представятся слишком крупными и потому неприемлемыми, то уравнения, которые привели к ним, следует отбросить как происшедшие от чересчур несовершенных наблюдений и определить неизвестные из оставшихся уравнений, которые тогда приведут к намного меньшим ошибкам. И следует заметить, что тут не придется вычислять всё заново, потому что уравнения, приводящие к *минимуму*, образуются сложением произведений по каждому данному [исходному] уравнению и достаточно будет исключить из сумм произведения, соответствующие тем уравнениям, которые привели к слишком значительным ошибкам.

Правило, в соответствии с которым принимается среднее [арифметическое] из результатов отличающихся друг от друга наблюдений при одном-единственном неизвестном элементе, есть не более, чем очень простое следствие нашего общего метода, который мы назовем *методом наименьших квдратов*. По существу, если наблюдения привели к различающимся значениям $a_1, a_2, a_3, \ldots$ для некоторого неизвестного x, сумма квадратов будет

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + (a_3 - x)^2 + \ldots$$

и, приведя ее к *минимуму*, мы получим

$$0 = (a_1 - x) + (a_2 - x) + (a_3 - x) + \ldots,$$

откуда $x = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)/n$, где n – число наблюдений. Таким же образом, если при определении положения точки в пространстве первое наблюдение дает координаты $(a_1; b_1; c_1)$ второе – $(a_2; b_2; c_2)$, … и если $(x; y; z)$ – истинные координаты этой точки, то ошибка первого наблюдения есть расстояние точки $(a_1; b_1; c_1)$ до точки

(x; y; z). Его квадрат равен $(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2$, а сумма таких квадратов, приведенная к *минимуму*, доставит три уравнения, из которых

$$x = \sum a/n, y = \sum b/n, z = \sum c/n,$$

где n – число точек, полученных из наблюдений.

Эти формулы те же, которыми определяется общий центр тяжести многих равных масс, расположенных в заданных точках, так что центр тяжести какого-либо тела обладает этим общим свойством.

Если разделить массу тела на равные молекулы, достаточно малые, чтобы их можно было считать точками, то сумма квадратов их расстояний до центра тяжести минимальна.

Видно, стало быть, что метод наименьших квадратов указывает нам в некотором смысле центр, около которого располагаются все результаты, данные наблюдениями, таким образом, чтобы уклоняться от него как можно меньше. *См. в названном сочинении* [1805 г.] *приложение этого метода к измерению* [длины] *градусов дуги меридиана, проведенное для вывода длины четверти меридиана и величины сжатия* [земного эллипсоида вращения][5].

II. Анонимная заметка

Legendre A. M. (1820), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, pp. 79 – 80

В начале предыдущей работы, на с. 4, автор говорил о своем методе наименьших квадратов. Достаточно напомнить, что он впервые опубликовал ее в 1805 г., в конце мемуара о кометах, с указанной в ней датой марта того же года. Однако, поскольку весьма знаменитый геометр не колеблясь приписал этот метод себе в сочинении, вышедшем в 1809 г., мы полагаем своим долгом остановиться на минуту и рассмотреть это притязание, чтобы все непредубежденные читатели смогли впредь называть этот метод по имени, которое они сочтут подходящим.

Вот как утверждается это [притязание]. После пояснения этого метода или принципа в соответствии [со своим сочинением] указанный геометр добавляет [в § 186]: “Наш принцип, которым мы пользуемся с 1795 г., еще недавно был изложен известным Лежандром в его труде [...] 1806 г. ...” Если это [утверждение] не является решающим, то оно по крайней мере весьма ясно и, особенно, крайне удобно. В соответствии с подобной системой история науки будет описываться намного проще. Открытие не будет больше принадлежать тому, кто его установил, но разве это важно! Оно, хоть и относится к более далекому времени, будет каждый раз приписываться тому, кто только сочтет нужным безосновательно притязать на него.

По правде сказать, разве подобная система приемлема? До сих пор, как о том свидетельствует история математики на каждой своей странице, она не приходила нам в голову ни при каких обстоятельствах. Мы полагали, что открытия неизменно обеспечены тому, кто первым обнародовал его и что все противоречащие притязания могут подвергнуть его подозрениям в оскорбительном складе характера [...].

[Далее Лежандр подкрепляет свое обвинение Гаусса аналогичным замечанием, которое относится к теории чисел.]

Примечания

1. Подобную же ошибку допускали Лаплас, Гаусс и Пуассон. По отношению к Гауссу это заметил Мерримен (1877, с. 165).

2. После реставрации Бурбонов Лаплас стал маркизом.

3. Для определения сжатия земного эллипсоида уже в то время и даже раньше проводились маятниковые наблюдения (о которых мы упомянули мимоходом в Предисловии.

4. Здесь ошибка: коэффициенты неизвестных *x, y*, ... Лежандр раньше обозначил через *b, c*, ...

5. Последнее предложение, набранное курсивом и в оригинале, возможно добавлено редакцией.

Библиография

Гаусс К. Ф. (1809, латинск.), *Теория движения* и т. д. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1823, латинск.), Теория комбинаций наблюдений и т. д., часть 1-я. Там же, с. 17 – 36.

--- (1957), *Способ наименьших квадратов*. Редактор Г. В. Багратуни. М.

Шейнин О. Б. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.

--- (2006), *История теории вероятностей и статистики в кратких высказываниях*. Берлин.

Biermann K.-R. (1966), Über die Beziehungen zwischen Gauss und Bessel. *Mitt. Gauss-Ges. Göttingen*, Bd. 3, pp. 7 – 20.

Eisenhart C. (1964), The meaning of "least" in least squares. *J. Wash. Acad. Sci.*, vol. 54, pp. 24 – 33. Перепечатано в книге Ku H. H., редактор (1969), *Precision Measurement and Calibration. Sel. Nat. Bureau Standards Papers on Statistical Concepts and Procedures*. Washington, pp. 265 – 274.

Hald A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Laplace P. S. (1810a), Sur les approximations des formules etc. OC, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345.

--- (1810b), То же название, Supplément. Там же, с. 349 – 353.

Legendre A. M. (1805), Sur la méthode des moindres quarrés. Приложение к книге автора *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, pp. 72 – 80.

Merriman M. (1877), List of writings relating to the method of least squares. Перепечатка в томе 1 Stigler S. M., составитель (1980), *American Contributions to Mathematical Statistics in the 19th Century*, vols 1 – 2. New York. Общей пагинации нет ни в одном томе.

Poisson S. D. (1833), Discours prononcé aux funérailles de M. Legendre. *J. f. die reine u. angew. Math.*, Bd. 10, pp. 360 – 363.

Stigler S. M. (1986), *History of Statistics*. Cambridge, Mass.

--- (1997), Daniel Bernoulli, Euler and maximum likelihood. *Festschrift for Lucien Le Cam.* Редактор Pollard D. и др. New York, pp. 345 – 357.

--- (1999), *Statistics on the Table*. Cambridge, Mass.

Пьер Симон Лаплас

Предисловие переводчика

Мы приводим здесь переводы нескольких сочинений Лапласа (1749 – 1827) или отрывков из них. Один из указанных отрывков это глава из АТВ, которую мы предваряем отдельным предисловием.

Из *Лекций* Лапласа 1795 г. мы, естественно, выбрали ту, которая была посвящена теории вероятностей, притом перевели лишь немногие места, впоследствии не включенные Лапласом в его *Опыт философии теории вероятностей*. Заметка Лапласа о тригонометрическом нивелировании 1819 г. интересна как свидетельство того времени, когда геометрическое нивелирование еще (почти?) не применялось. Эту же тему, но уже с математическими выкладками, Лаплас рассмотрел в *Дополнении 3* (прим. 1919, с. 594 – 608) к *Аналитической теории вероятностей.*

Особняком находятся четыре текста с выступлениями Лапласа в Палате пэров, которые свидетельствуют о его общественной деятельности, хотя далеко не всегда успешной. Так, его убедительные, казалось бы, доводы против лотереи не привели к ее запрещению; впрочем, лотереи, хотя быть может не столь разорительные, существуют и по сей день.

Приходится добавить, что суть дела во всех четырех случаях была безусловно знакома слушателям Лапласа, однако для современного читателя в текстах Лапласа не всё понятно и нам не удалось прояснить их в достаточной мере. Его утверждение в одном из них о том, что картографирование страны следует начинать с выноса в натуру двух линий, ориентированных по сторонам горизонта, возможно было его собственным нововведением (которое во всяком случае было вскоре забыто).

Библиографию к данному разделу см. в его конце.

I. Приложение предыдущих исследований к анализу случаев

Laplace P. S. (1776), Recherches sur l’intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards. OC, t. 8. Paris, 1891, pp. 69 – 197. Глава 25: Application des recherches précédentes à l’analyse des hasards, pp. 144 – 153

Нынешнее состояние системы природы очевидно является продолжением того, что было в предшествующий момент, и, если мы представим себе разум, который на заданное мгновение объемлет все соотношения между сущностями вселенной, он сможет определить относительное расположение, движения и вообще связи (affections) между всеми сущностями на любое прошедшее время или на будущее[1].

Физическая астрономия, которая более всех остальных [отраслей] нашего знания делает честь человеческому уму, дает нам представление, хоть и несовершенное, о том, каким был бы подобный разум. Простота закона, который движет небесные тела, соотношение их масс и расстояний, позволяет анализу понимать до определенного предела их движения. И для установления состояния системы этих больших тел в прошедших или будущих веках геометру достаточно, что наблюдение предоставляет ему их положения и скорости на какой-нибудь момент. И в качестве преимущества человек пользуется инструментами и небольшим числом соотношений, которые он вводит в свои вычисления, но незнание различных причин, взаимодействующих в возникновении явлений и их сложность, а также и несовершенство анализа не дают возможности высказываться столь же достоверно о наибольшем числе явлений. И для него [для нас] существуют неопределенные вещи, [лишь] более или менее вероятные. Невозможность их постигнуть стараются возместить определением различных степеней их правдоподобия и мы поэтому обязаны слабости человеческого ума одной наиболее тонкой и остроумной математической теорией, а именно наукой случаев или вероятностей.

Прежде чем идти дальше, следует установить смысл этих слов, *случай* и *вероятность*[2]. Мы полагаем некую вещь результатом случая, если она не предоставляет нашим глазам ничего правильного или свидетельств о намерениях и притом если причины, которые ее произвели, нам неизвестны. И потому случай сам по себе не обладает никакой реальностью, это лишь подходящий термин, указывающий наше незнание способа, которым различные части явления сочетаются друг с другом и с остальной природой.

Понятие о вероятности заключает в себе это незнание. Если мы уверены, что из двух событий, которые не могут существовать совместно, одно или другое должно наверняка произойти и если мы не видим никаких причин, по которым одно наступило бы скорее другого, существование и несуществование каждого из них равновероятно. Равным образом, если одно из трех взаимоисключающих событий должно несомненно произойти и у нас нет никаких оснований, по которым одно из них наступит скорее, чем другое, их существование равновероятно[3], однако несуществование каждого из них более вероятно, чем существование и притом в отношении 2:1, потому что из трех равновероятных случаев два благоприятны этому [несуществованию] и только один противоположен ему.

Если число возможных случаев остается неизменным, вероятность события возрастает с числом благоприятных случаев; напротив, если число последних остается тем же самым, она убывает в той же мере, в какой возрастает число возможных случаев и таким образом вероятность находится в прямом отношении к числу благоприятных случаев и в обратном – к числу всех возможных случаев.

Итак, вероятность существования события является просто отношением числа благоприятных случаев к числу всех возможных случаев, если притом мы не видим никакой причины, по которой один из случаев происходит скорее других. Она поэтому может быть выражена дробью, числитель которой является числом благоприятных случаев, а знаменатель – числом всех возможных случаев. Аналогично, вероятность несуществования события есть отношение числа случаев, противоположных событию, к числу всех возможных и поэтому должна быть выражена дробью, числитель которой есть число противоположных случаев, а знаменатель – число всех возможных случаев. Отсюда следует, что вероятность существования события, соединенная с вероятностью его несуществования, в сумме составляют единицу, которая, следовательно, представляет полную достоверность, потому что очевидно, что событие наверняка должно либо произойти, либо нет.

Далее, событие происходит достоверно, если ему благоприятствуют все возможные случаи и дробь, выражающая его вероятность, поэтому сама равна единице. Стало быть, достоверность может быть представлена единицей, а вероятность – долей достоверности. Она может всё более и более приближаться к единице и даже отличаться от нее меньше, чем на любую заданную величину, но никогда не сможет стать больше. Теория случаев имеет целью определить эти дроби и поэтому видно, что она является наиболее удачным дополнением, которое можно только представить, к недостоверности наших знаний.

Достоверность и вероятность, как мы их определили, очевидно сравнимы друг с другом и поддаются строгому анализу. Состояние человеческого ума не будет неопределенным, если видно, что все возможные случаи благоприятны событию или если обнаружится, что из этого числа многие ему противны. Эти два состояния абсолютно несравнимы и нельзя утверждать, что первое равно удвоенному или утроенному второму, потому что истина неделима. Здесь происходит то же самое, что и во всех физико-математических науках: мы измеряем силу света, различные степени тепла тел, их прочность, стойкость и т. д. Во всех этих исследованиях объектами анализа являются не наши ощущения сами по себе, а их физические причины.

Вероятность событий служит для определения ожидания или опасения тех, кто заинтересован в их существовании и именно под этим углом зрения наука о случайном является одной из наиболее полезных в гражданской жизни. Слово *ожидание* имеет различные значения. Обычно оно выражает состояние человеческого ума, когда, при определенном и только лишь правдоподобном предположении, для него должно произойти какое-то благо.

В теории случаев ожидание есть произведение ожидаемой суммы на вероятность ее получения. Для различия этих двух значений я называю первое *моральным*, а второе – *математическим*[4]. Представим себе n человек, имеющих равную вероятность получить сумму a, которая достоверно должна будет принадлежать одному из них. Полная вероятность равна единице, т. е. должна быть равна достоверности, и очевидно, что вероятность для каждого из них равна $1/n$, а их математические ожидания поэтому равны a/n. Такова также сумма, которая должна причитаться [каждому из] них, если они захотят разделить всю сумму, не подвергаясь риску [появления неблагоприятного] события.

Если один из них, *P*, обладает двойной вероятностью по сравнению с остальными, его математическое ожидание, а потому и сумма, которая ему положена при разделе, таким же образом будет вдвое больше. Ибо если представить $n + 1$ человек, имеющих равные вероятности получить сумму *a*, их соответствующие вероятности будут $1/(n + 1)$, а их математические ожидания –
$a/(n + 1)$. И можно предположить, что один из них отказывается от своих притязаний и от своего ожидания в пользу *P* и что тот поэтому приобретет двойную вероятность и двойное ожидание, выраженное дробью $2a/(n + 1)$. И при разделе он должен получить сумму $2a/(n + 1)$, вдвое больше, чем остальные.

Таким образом видно, что математическое ожидание есть ни что иное, как частичная сумма, которая должна достаться, если нет никакого желания рисковать [появлением] события и предположить, что раздел всей суммы происходит пропорционально вероятностям ее получить. По существу, если отвлечься от всех посторонних обстоятельств, это единственный способ беспристрастного раздела, потому что равные степени вероятности означают равные права на ожидаемую сумму.

Моральное ожидание, как и математическое, зависит от ожидаемой суммы и вероятности получить ее, но оно не всегда пропорционально произведению этих двух величин. Оно определяется тысячью переменных обстоятельств, которые почти никогда нельзя определить и тем менее подчинить анализу. Правда, это обстоятельство приводит лишь к возрастанию или убыванию преимуществ, доставляемых ожидаемой суммой, так что само по себе моральное ожидание можно полагать произведением этого преимущества на вероятность его получения. Но в ожидаемом благе следует различать его относительную стоимость от абсолютной. Последняя совершенно не зависит от потребностей и других причин, по которой эта сумма является желаемой, тогда как первая возрастает вместе с различными побуждениями.

Для оценки этой относительной стоимости нельзя предложить никакого определенного правила, но вот, тем не менее, весьма остроумное предложение месье Даниила Бернулли, опубликованное в Петербургском томе за 1730 г. [1738]: Для весьма малой суммы эта стоимость, как ее определил этот прославленный геометр, пропорциональна ее абсолютной стоимости, деленной на весь капитал заинтересованного лица. Это правило не является всеобщим, но оно может служить при весьма общих условиях, а это всё, чего здесь можно пожелать.

Большинство тех, кто пишет о случае, видимо путали ожидание и моральную вероятность [?] с ожиданием и математической вероятностью или по крайней мере соотносили одно с другим. Тем самым они хотели придать своим теориям такую протяженность, которая не была для них возможна и затемнила их, сделала малопригодными для умов, привыкших к строгой четкости геометрии. Месье Даламбер весьма тонко возразил им, и это привлекло внимание геометров. При большом числе обстоятельств была осознана нелепость результатов исчисления вероятностей и, соответственно, необходимость установить в этих темах отличие между математическим и моральным. И эта область науки обязана ему преимуществом быть теперь основанной на ясных принципах и ограниченной своими действительными пределами[5].

Позволю себе здесь следующее отступление о трудностях, которым подвержен, видимо, анализ случаев. Вероятности неопределенных вещей и ожиданий, связанные с их существованием, как я сказал, являются двумя объектами этого анализа. Установленное выше различие между моральным и математическим ожиданиями отвечает, как мне представляется, на все возражения, которые могут быть выставлены против второго из этих объектов; рассмотрим поэтому те, которые относятся к первому.

При исследовании вероятности событий отправляются, как это очевидно, от того принципа, что вероятность есть число благоприятных случаев, деленное на число всех возможных случаев. Трудность может быть только в том, что равные вероятности будут приписаны двум неравновозможным случаям и нельзя не согласиться, что существующие до сего времени приложения исчисления вероятностей к объектам гражданской жизни подвержены этой трудности. Я предположу, к примеру, что монета, подброшенная вверх при игре в орлянку, склонна выпасть скорее одной стороной, чем другой, но что ни один игрок не знает на какую именно и ясно, что они будут держать пари на *решетку* так же, как и на *орла*.

Можно предположить, что при первом броске, как это обычно и происходит, *решетка* и *орел* [полагаются] равновероятными. Это предположение более не является, однако, допустимым, если, например, один из игроков держит пари, что выбросит *решетку* в двух бросках. Действительно, следует принять во внимание неравновозможность *решетки* и *орла*, хоть и неизвестно, какая сторона монеты выпадет чаще, это неравенство всегда благоприятствует тому, кто держит пари, что *решетка* не выпадет в двух бросках; вероятность этого выше, чем если бы обе стороны были равновозможны. Причина ошибки, в которую здесь впадают, очевидно в том, что предполагается равновозможность всех четырех случаев: 1) *решетка, решетка* или Р – Р; 2) *решетка, орел*, Р – О; […] Это не так, потому что Р – Р и О – О более вероятны, чем два остальных исхода. По существу я предполагаю, что $(1 + v)/2$ представляет вероятность появления той стороны, на которую монета склонна выпадать чаще, и $(1 - v)/2$ – вероятность другой стороны. Тогда вероятность Р – Р равна $(1 + 2v + v^2)/4$, если именно *решетка* более вероятна и $(1 - 2v + v^2)/4$, если она менее вероятна. Но, поскольку нет причин предполагать скорее одно, нежели другое, следует сложить эти две вероятности и принять за вероятность Р – Р половину суммы, т. е. $(1 + v^2)/4$ и, стало быть, столько же для О – О. Аналогично определяется вероятность Р – О и О – Р, равная $(1 - v^2)/4$, и таким образом видно, что эти четыре случая не равновозможны и что неравенство вероятностей *решетки* и *орла*, хоть и неизвестно какая сторона монеты более вероятна, благоприятна игроку, который держит пари на то, что *решетка* не появится в двух бросках.

То, что я сказал об игре в орлянку, можно применить к игре в кости и вообще ко всем играм, события в которых подвержены физическим неравенствам. Но, развив это замечание в другом мемуаре (1774), я здесь только отмечу, что хоть и неизвестно, какое из этих событий более вероятно, примечательно, что почти всегда можно определить какому игроку благоприятно неравенство.

Теория случаев также предполагает, что если Р и О равновозможны, это же [свойство] сохраняется и для всех их комбинаций (Р – Р – Р и т. д.; О – Р – О и т. д.), и т. д. Многие философы [и Даламбер тоже!] думали, что это предположение неточно и что комбинации, в которых одно событие происходит много раз подряд, менее вероятны, чем остальные, но для этого приходится предполагать, что прошедшие события имеют какое-то влияние на те, которые должны появиться, а это нисколько не допустимо. По существу, при обычном ходе событий в природе, события переплетаются, но, как мне кажется, это происходит потому, что комбинации, в которых это происходит, намного многочисленнее.

Вот, однако, особая трудность, на которую следует возразить. Появление Р, скажем, 20 раз подряд сильно искушает нас поверить, что это не результат случая, тогда как при любом переплетении Р и О мы вовсе не ищем соответствующей причины. И откуда это различие между двумя случаями, если не из-за того, что один из них физически менее возможен, чем другой? На это я отвечу в общем, что там, где мы замечаем симметрию, мы каждый раз готовы признать влияние упорядоченно действующей прчины. И здесь мы рассуждаем в соответствии с вероятностями. Потому что, поскольку симметричный результат наверняка вызван либо действием случая, либо некоей закономерной причиной, вторая из этих возможностей более вероятна, чем первая. Пусть $1/m$ – вероятность существования симметричного события, если оно было вызвано случаем и $1/n$ его вероятность, если причиной была закономерность. Тогда вероятность существования закономерности равна (1774)

$$(1/n)/[(1/m) + (1/n)] = 1 /[1 + (n/m)].$$

Видно поэтому, что чем больше m относительно n, тем более повышается вероятность, что симметричное событие было вызвано закономерностью. И это вовсе не потому, что это событие менее вероятно, чем остальные, а потому, что можно держать пари с большим перевесом, что оно вызвано причиной, действовавшей закономерно, а не чисто случайно, так что [надлежит] отыскивать эту причину. Очень простой пример разъяснит это замечание. Пусть на столе находятся печатные буквы, расположенные в следующем порядке: ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ[6]. Причина, которая заставляет нас поверить, что это расположение не вызвано случаем, не может происходить от того, что, говоря физически, оно менее вероятно, чем остальные. Действительно, будь слово *инфинитезимальный* не известно ни в каком языке, это расположение не было бы ни более, ни менее возможно и потому мы бы тогда не заподозрили никакой особой причины. Но, поскольку мы употребляем это слово, несравненно вероятнее, что кто-то расположил эти буквы таким образом, чем если бы оно было вызвано случаем.

Я возвращаюсь к своей цели. Неуверенность человеческого знания относится либо к событиям, либо к их причинам. Если существует убеждение в том, что, например, урна наполнена только белыми и черными билетиками в известном соотношении, и если требуется определить вероятность, что случайно выбранный билетик окажется белым, то это событие является неуверенным, однако причина, от которой зависит вероятность его существования, т. е. соотношение белых и черных билетиков, известна.

В следующей задаче событие известно, а причина нет. *Урна по предположению заключает заданное число белых и черных билетиков. Извлечен белый билетик и требуется определить вероятность, что соотношение тех и других билетиков равно* p:q. Можно свести к этим двум типам задач все те, которые зависят от теории случаев. Правда, существует очень большое число таких, в которых и причина, и событие представляются в равной мере неизвестными и такова следующая: *По предположению урна может быть равным образом наполнена любым числом белых и черных билетиков от двух до n включительно. Определить вероятность, что два случайно извлеченных билетика окажутся белыми*. И соотношение белых и черных билетиков, и их общее число, а также и событие, которое должно произойти, неизвестны. Но здесь следует считать в качестве причины явления равную возможность всех чисел от двух до n и безразличие в цвете билетиков. И таким образом эта задача относится к типу тех, в которых причина известна, а событие нет.

В мои намерения здесь вовсе не входило представление полного трактата о теории случаев, я удовлетворился приложением предыдущего исследования к решению многих ее задач. И я даже ограничиваюсь здесь теми, в которых причина известна и требуется определить события; в другом мемуаре (1774) я рассмотрел случай, в котором предложено установить события по причинам.

Примечания

1. Гораздо более известно аналогичное позднейшее высказывание Лапласа (1814/1999, с. 835, левый столбец). Впрочем, в любом случае Бошкович и Мопертюи опередили его (Шейнин 2005, с. 129).

2. Об истории понятия случайности в естествознании см. Шейнин (1991/1995). По поводу вероятности правильнее говорить, что с ее помощью изучаются законы случайного в массовых явлениях; слабость ума здесь ни при чем.

3. Здесь и во многих других местах Лаплас исходит из *отсутствия причин*. Он (1814/1999, с. 861, левый столбец), однако, полагал, что гипотезам не следут приписывать реальности и что необходимо постоянно исправлять их новыми наблюдениями.

4. Позднее Лаплас (1812/1886, с. 189) разъяснил, что уточнил давно уже укоренившийся термин *ожидание*, назвав его *математическим*, чтобы тем самым отличить от ставшего модным *морального*. Его уточнение сохранилось во французской и русской литературе.

5. Да, Даламбер высказал интересные мысли о теории вероятностей, но как и в какой степени они повлияли на ее дальнейшее развитие остается непонятным, к тому же *ясные принципы* эта теория приобрела только в результате аксиоматизации. Роль Даламбера вовсе не была, как заявил Лаплас, столь положительной; печально знаменитой стала, например, его элементарная ошибка в рассуждении об игре в орлянку. См. о нем Шейнин и Майстров (1972, с. 144 – 146) и Шейнин (2005, с. 79 – 80). Заметим, однако, что Дастон (1979) усмотрела в критических замечаниях Даламбера полезные рассуждения о соотношении математики и естествознания.

6. Позднее Лаплас (1814/1999, с. 837, левый столбец) заменил *инфинитезимальный* на *Константинополь*. Впрочем, этот пример восходит к Даламберу (1767, с. 254 – 255).

II. Лекции по математике, прочитанные в Нормальной школе в 1795 г. Десятая лекция. О вероятностях (отрывки)

Laplace P. S. (1812), Leçons de mathématiques données à l’Ecole normale en 1795. OC, t. 14. Paris, 1912, pp. 10 – 177. Dixième séance. Sur les probabilités, pp. 146 – 177

С. 146. Чтобы следовать плану, который я наметил для программы курса по математике, я должен еще побеседовать с вами о дифференциальном и интегральном исчислении и в конечных, и в бесконечно малых разностях, о механике, астрономии и теории вероятностей. Малая продолжительность [учебного года?] в Нормальной школе никак не позволяет мне этого, но я намереваюсь возместить это в отношении механики и астрономии публикацией труда, который будет озаглавлен *Изложение системы мира* и в котором я представил независимо от анализа последовательность открытий, сделанных до сего дня о системе мира.

Сегодня в этой последней лекции я расскажу вам о теории вероятностей, интересной и самой по себе, и ввиду ее многочисленных связей с наиболее полезными целями общества.

Все события, даже те, которые по своей незначительности представляются не зависимыми от великих законов вселенной, являются их последствиями, столь же необходимыми как вращение Солнца. При незнании связей, которые объединяют их в полную систему природы, их полагают зависящими от конечных причин или случая в соответствии с тем, происходят и следуют они одно за другим либо закономерно, либо без видимого порядка. Но эти воображаемые причины отодвигались всё дальше и дальше вместе с границами наших познаний и окончательно исчезают перед лицом разумной философии, которая видит в них всего лишь выражение нашего незнания истинных причин.

Мы убедимся в этом важном последствии развития просвещения, если припомним, как некогда наводнения или засухи; кометы, тянувшие за собой длиннющие хвосты; затмения; северные сияния; и вообще все необъяснимые явления считались знаками небесного гнева.

С. 157. При рассмотрении очень большого числа событий формулы, к которым мы приходим, оказываются составленными из столь громадного числа членов и сомножителей, что численные подсчеты становятся невозможными. И поэтому необходимо иметь метод преобразования этих формул в сходящиеся ряды. Соответственно, я опубликовал в мемуарах Академии наук [*Oeuvres complètes*, tt. 9, 10, 12, – ред. примечание] метод, основанный на преобразовании функций очень больших чисел в определенные интегралы, которые вычисляются при помощи быстро сходящихся рядов[1]. И примечательно, что подынтегральные функции являются производящими для функций, выраженных определенными интегралами, так что теории производящих функций и приближений функций очень больших чисел могут почитаться двумя ветвями одного и того же исчисления, которое я называю *исчислением производящих функций*.

С его помощью можно легко определить пределы вероятности результатов и причин, которые указываются большим числом событий, а также и законы, в соответствии с которыми эта вероятность приближается к своим пределам по мере возрастания числа наблюдений. Это исследование, наиболее тонкое в теории случаев, заслуживает внимания геометров[2] ввиду анализа, которого оно требует. Оно также заинтересует философов, поскольку показывает, как в конце-концов закономерность устанавливается даже в вещах, которые нам кажутся полностью отданы [на волю] случаю и в которых мы выявляем ее скрытые но постоянные причины[3].

С. 161. *При неопределенном [неограниченном] увеличении числа наблюдений или испытаний их средний результат сходится к определенному члену [числу], так что, взяв сколь угодно малый интервал в одну и в другую сторону от него, вероятность, что средний результат окажется в нем, в конце-концов будет отличаться от достоверности меньше, чем на любую заданную величину. Этот член есть сама истина коль скоро положительные и отрицательные ошибки совершаются с равной легкостью*[4]*. И вообще он является абсциссой кривой легкости ошибок, которая соответствует центру тяжести ее площади, если начало абсцисс совпадает с началом для ошибок.*

С. 168 – 169. Известно, что хоть рождается больше мальчиков чем девочек, женщин существует больше чем мужчин. Между тем, в странах, в которых население постоянно[5], его отношение к ежегодным рождениям равно числу лет средней продолжительности жизни. И таким образом у женщин эта продолжительность больше, чем у мужчин либо ввиду их конституции, либо потому, что они подвержены меньшим опасностям.

Ясно, что средняя продолжительность жизни возрастает, когда войны случаются реже, зажиточность повышается и распространяется шире и при помощи каких-либо средств человек оздоравливает среду своего обитания и уменьшает число и опасность болезней. И это то, что происходит по отношению к оспе, одному из наиболее гибельных бичей рода человеческого. Остроумно применив исчисление вероятностей, Даниил Бернулли (1766) обнаружил, что вариоляция[6] ощутимо повышает средний [срок] жизни даже если предположить, что один из двухсот погибает от этой процедуры. Нет поэтому сомнения, что вариоляция выгодна государству. Но тот, кто собирается подвергнуться ей, должен сравнить весьма малую, но близкую опасность умереть с намного более серьезной, но и более отдаленной опасностью умереть от натуральной оспы. И, хотя для государства, которое учитывает граждан лишь в массе, соображения о близости опасности не имеют никакого значения, для отдельного человека это не так.

Между тем, правильно произведенная вариоляция губит столь малое число людей, а опустошения, вызываемые натуральной оспой, столь велики, что частные интересы объединяются с государственными в пользу применения этого метода. Отец семейства[7], чья привязанность к своим детям возрастает вместе с ними, должен без всяких колебаний подвергнуть их этой процедуре, которая избавит их от тревог и опасности столь жестокой болезни и которая обеспечит ему плод его забот и их образования. Я нисколько не колеблясь рекомендую благотворную практику вариоляции и рассматриваю ее как одно из наиболее благотворных следствий, которое медицина вывела из опыта.

С. 169 – 171. Насколько игра безнравственна, настолько эти институты [пожизненные ренты, тонтины[8]] благотворны для обычаев и благоприятны наиболее умиротворяющим склонностям природы. К тому же, капиталы, которые ввиду своей незначительности оставались бы втуне в руках каждого частного лица, начинают приносить доход и подкрепляют связи в крупных заведениях, которые их получают, а множество этих капиталов обеспечивает достоверную выгоду, если к ним относятся должным образом и разумно управляют ими. С ними [с этими заведениями] не связаны никакие из тех неприятностей, которые мы заметили даже в самых справедливых играх, а именно приводящих к тому, что потери более ощутимы, чем выгоды. Напротив, они предоставляют возможность заменить избыток на верные средства для будущего. Государство должно поэтому поощрять эти институты и щадить их во всех их превратностях, потому что ожидания, которые они представляют, относятся к отдаленному будущему и они не могут процветать кроме как находясь в тени всех тревог о продолжительности своего существования.

С. 172 – 173. Если желают исправить один или множество уже почти [достаточно] известных элементов по совокупности большого числа наблюдений, то образуют нижеследующим способом уравнения, которые называются *условными*[9]. Аналитическое выражение каждого наблюдения является функцией элементов. Подставляя в него приближенное значение каждого из элементов вместе с его [неизвестной] поправкой, раскладывают полученное выражение в ряд, пренебрегают ввиду их малости квадратами и произведениями этих поправок и приравнивают ряд к наблюдению, которое он представляет. Так получается условное уравнение относительно поправок элементов и каждое наблюдение приводит к подобному уравнению. Если наблюдения точны, достаточно иметь их по числу элементов. Однако, ввиду ошибок, которым они всегда подвержены, рассматривается большое число наблюдений, чтобы тем самым ошибки почти уравновешивались в средних результатах.

Наблюдатель должен выбирать обстоятельства, наиболее благоприятные для определения элементов, а искусство вычислителя состоит в том, чтобы сочетать условные уравнения, выведенные из наблюдений, наиболее выгодным образом, чтобы тем самым уменьшить их число до числа элементов. Все возможные сочетания сводятся к умножению каждого уравнения на соответствующий множитель и вычислению суммы всех этих произведений, что приведет к первому окончательному уравнению относительно принятой системы множителей. Вторая система приведет ко второму окончательному уравнению и т. д. до тех пор, пока их не станет столько, сколько элементов.

Ясно, что наиболее точные поправки будут получены, если выбрать системы множителей так, чтобы средняя ошибка, которой следует опасаться в каждом элементе в избытке и недостатке, была наименьшей. Под *средней ошибкой* следует понимать сумму произведений каждой ошибки, которой следует опасаться, на ее вероятность. Исследование этого минимума, одно из наиболее полезных в теории вероятностей, требует особых ухищрений анализа. Здесь мы ограничимся указанием, что это исследование приводит к тому примечательному результату, что наиболее выгодный способ сочетания условных уравнений состоит в приведении к минимуму суммы квадратов ошибок наблюдений, что обеспечивает столько окончательных уравнений, сколько поправок требуется определить[10].

С. 173 – 174. Представим себе, к примеру, сто человек, собранных без разбора, которым предложено вынести постановление по вопросу: *Вращается ли Солнце ежесуточно вокруг Земли?* Имеются все основания полагать, что большинство решит этот вопрос положительно, причем это станет еще вероятнее, если вместо ста предположить тысячу или десять тысяч собравшихся.

Отсюда можно вывести заключение, продиктованное простым здравым смыслом: Для государства исключительно важно широкое распространение образования и состояние национального представительства [парламента] из справедливой и просвещенной элиты. *Истина, справедливость, человечность*, – вот вечные принципы социального порядка, который должен покоиться исключительно на естественном отношении человека к себе подобным и природе. Они столь же необходимы для поддержания этого порядка, как всемирное тяготение для существования физического порядка. Нет ошибки более опасной, чем думать, что иногда можно уклониться от них и обманывать или порабощать людей ради их собственного блага. Роковой опыт во все времена доказал, что эти священные принципы никогда не нарушаются безнаказанно.

Примечания

1. Возможно, что Курдюмова (1972) исследовала эти результаты Лапласа.

2. И здесь, и впоследствии, см. наше Предисловие к переводу гл. 4-й *Аналитической теории вероятностей* (АТВ), Лаплас отделял себя от (чистых) математиков.

3. Здесь проскальзывает мысль Лапласа о том, что выявление причин является целью теории вероятностей.

4. Это определение "истины" (или *истинного значения* наблюдаемой константы, как его называют в классической теории ошибок) более четко и независимо повторил Фурье (1826). *Центр тяжести площади* (чуть ниже): это понятное, но неточное выражение неоднократно повторял и Пуассон, см. в этом сборнике.

5. Были ли в те времена страны с постоянным населением?

6. Вариоляция – небезопасная профилактическая прививка ослабленной оспы здоровому человеку в до-дженнеровские времена. О работе Даниила Бернулли см. Шейнин и Майстров (1972, с. 143).

7. О матери семейства Лаплас не вспомнил. В 1848 г. так же поступил Буняковский (Шейнин 1999, с. 75) в неудачной газетной статье о холеробоязни.

8. Мнение Лапласа о тонтинах (которых он, правда, не упоминал прямо, но и не исключал из подобных учреждений) вовсе не было общепризнанным, см. Шейнин (1977b, с. 210 – 211), где в частности цитируется доклад Фурье и др. 1826 г., равно как и их ссылка на отрицательный отзыв других французских ученых 1790 г. (включая Лапласа!) об одной из тонтин.

9. Об условных уравнениях см. Прим. 3 к АТВ. Там же, в Прим. 5, разъясняется отличие *окончательного* уравнения (см. ниже) от нормального. Термин *элемент* (также см. ниже) в смысле *искомая величина* звучит странно, но Лаплас неизменно пользовался им.

10. Последние строки могли быть написаны только после публикации мемуара Лежандра 1805 г.

III. О вероятности ошибок средних результатов большого числа наблюдений и о наиболее благоприятных средних результатах

Laplace P. S. (1812), *Théorie analytique des probabilités*, livre 2. OC, t. 7, No. 2. Paris, 1886, pp. 181 – 496. Глава 4-я. De la probabilité des erreurs des résultats moyennes d'un grand nombre d'observations et des résultats moyens les plus avantageux, pp. 309 – 354

Предисловие переводчика

С 1770 по 1809 гг. [правильней: с 1774 по 1811 гг.] ... *Лаплас давал многочисленные мемуары о вероятностях. Но, как бы они*

> *не были интересны, он не хотел объединять их в общую теорию. Однако, как только он установил свойства функций вероятностей* [ЦПТ, – нестрого], *то ясно увидел, что это тот самый принцип, который управляет почти всеми приложениями и составил свою теорию* [свою АТВ (1812)].
>
> Бьенеме (1853, р. 312).

Это утверждение полностью относится к теории ошибок, т. е. к главе 4-й АТВ, которую мы ниже приводим в переводе. Приняв большое число наблюдений и (молчаливо) выполнение предпосылок ЦПТ, он крайне нестрого доказал несколько ее вариантов (притом даже чуть раньше, в 1811 г.) и на этой основе устанавливал предпочтительность МНКв.

Оговоримся: во втором приложении к АТВ Лаплас (1818/1886, с. 536) утверждал (запоздало и притом недостаточно) по поводу равенства порядков основных ошибок в триангуляции:

> *Это предположение* [о нормальности общей погрешности], *наиболее естественное и простейшее из возможных, следует из применения повторительных теодолитов.*

Этот тип теодолитов действительно позволял уравнивать влияние основных ошибок, – наведения трубы и отсчета по лимбу. Там же, на с. 534 – 535 и 561 Лаплас заметил, что независимость наблюдений необходима для приложения “формул вероятностей” и что в противном случае изменятся вероятности средних значений.

Уже здесь можно заметить, что он не оставил после себя цельного и методически приемлемого сочинения и по всей видимости он и не ставил себе такой цели. Так, Лаплас нумеровал свои формулы в явно недостаточной мере и поэтому то и дело повторял их (мы ввели свою собственную нумерацию) и избегал указательных местоимений, предпочитая повторять одни и те же существительные. Оба эти недостатки были, кстати сказать, присущи и Маркову (Шейнин 2006а, с. 91). Далее, одна и та же буква (например, *k*) обозначала у Лапласа различные понятия и один и тот же символ он применял для суммирования и интегрирования, один раз даже в одной и той же формуле (19).

Наконец, в 1811 г. Гаусс ввел весьма удачные обозначения типа

$[aa] = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, $[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$,

которые были восприняты в классической (гауссовой) теории ошибок, Лаплас же в любом случае не имел времени воспользоваться ими. Плохо, однако, что позднейшие французские авторы (как Пуассон) не захотели перенять новшество Гаусса. Сформулируем теперь конкретные замечания по существу.

1. Математические выкладки Лапласа крайне затруднительны и многие комментаторы высказались в этом смысле.

2. Эти выкладки, не говоря уже о ЦПТ, которую даже Чебыщев доказал не вполне строго, подчас не выдерживают критики, см., например, Гнеденко и Шейнин (1978, с. 194).

3. Математический аппарат, вообще говоря, достоин похвалы; так, Лаплас широко использовал интегрирование комплексных

функций, один раз (1810/1898, с. 304) сопроводив их, однако, примечанием, в котором отделил себя от *геометров*. Аналогичные примечания имеются и в его лекциях 1795 г., см. перевод отрывков из них в этом сборнике, и в АТВ (с. 151 и 165).

В теории вероятностей Лаплас использовал понятие характеристической функции и применял формулу обращения, но не ввел (по необходимости интуитивного, как это сделал позднее Пуассон (Гнеденко и Шейнин 1978, с. 200) понятия случайной величины. Уже по этой причине ни плотности распределения, ни характеристические функции не были у него предметом исследования, и принятый им уровень абстракции оказался недостаточным для создания теории вероятностей как цельной математической дисциплины. Ее пришлось создавать заново.

4. В теории ошибок Лаплас не только построил свои изыскания на ЦПТ (см. выше), т. е. ограничил их приложимость, но вдобавок выбрал в качестве критерия минимум абсолютного математического ожидания, что ввиду вычислительных трудностей было возможно лишь для нормального распределения. Это ожидание он, кстати сказать, назвал *средней ошибкой, которой следует опасаться*. Оговоримся: выбор интегральной меры точности, которая встретилась у него уже в 1774 г., было серьезным нововведением; Гаусс применил ту же идею лишь в 1823 г.

5. Лаплас не обращал внимания на крайне желательное доведение своих результатов к виду, удобному для непосредственных приложений. Так, у него нет никаких указаний на возможность одновременного решения системы нормальных уравнений и оценки точности полученных результатов, Гаусс (1809, § 184) же обратил на это внимание с самого начала. Также нет ни слова о систематических ошибках (которые Лаплас обозначил буквой k и включал в свои формулы) и главным образом по этой причине его рассуждение о сравнении астрономических таблиц в конце § 21 просто несерьезно. И, кстати, столь же легковесно утверждение Лапласа (1814/1999, с. 852, правый столбец) о том, что “способ составления таблиц смертности очень прост” и т. д., а его вывод о населении Франции оказался плохо понятным, см. наши примечания к речи Пуассона 1827 г. в этом сборнике.

Крайне уместно привести здесь мнение Субботина (1956, с. 297) об определении орбит небесных тел тремя крупнейшими учеными: Лагранж и Лаплас

> *Ограничились лишь математической стороной дела, тогда как Гаусс не только тщательно обработал свое решение с точки зрения вычислительной техники, но и учел все условия работы и все привычки астрономов-вычислителей.*

Следует указать, что производную Лаплас называл коэффициентом при соответствующем дифференциале и чувствуется также, что дифференцирование интеграла по параметру (начало § 23) не было еще стандартной процедурой, а понятие *якобиан* было введено, разумеется, позже.

Остановимся на двух обсуждаемых Лапласом вопросах. Предложение Котса (в § 24) он описал в расширенном смысле. На самом деле Котс (1722; см. Гоуинг 1983, p. 107) заявил следующее:

> *Пусть p – место некоторого предмета, определенного из наблюдения, а q, r, s – его же место из последующих наблюдений. Пусть также P, Q, R, S будут веса, обратно пропорциональные смещениям, возникающим от ошибок отдельных наблюдений и заданные по предельным значениям данных ошибок, и будем считать эти веса расположенными в точках p, q, r, s. Найдем их центр тяжести Z. Я говорю, что Z есть наиболее вероятное положение предмета.*

Котс приложил рисунок плоскости (быть может картину трехмерного пространства) с одними лишь указанными точками.

Далее. Лаплас неоднократно (в начале и конце § 20 и в § 24) упоминал метод средних. Впоследствии его применял Коши; об этом и о дальнейшей истории метода см. Линник (1958/1962, гл. 15, § 5).

Тобиас Майер, которого Лаплас упомянул в § 24, получил систему из 27 уравнений с тремя неизвестными, разделил ее на три отдельные части и принял, что в каждой из них сумма правых частей уравнений, т. е. остаточных свободных членов, равна нулю (в этом и заключается метод средних) и таким образом вывел три суммарных уравнения с теми же тремя неизвестными. Нетрудно видеть, что в случае непосредственных наблюдений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ некоторой константы метод средних сводится к выбору среднего арифметического. См. также Шейнин (2005, с. 97 – 98 и 165).

……………………………………………………………………………………

18. Рассмотрим теперь средний результат большого числа наблюдений, закон возможности (facilité) ошибок которых известен. Предположим прежде всего, что для каждого наблюдения ошибки могут быть равным образом

$$-n, -n+1, -n+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-2, n-1, n.$$

Вероятность каждой окажется равной $1/(2n + 1)$. Если число наблюдений s, то коэффициент при e^{lvi} в разложении многочлена

$$(e^{-nvi} + e^{-(n-1)vi} + \ldots + e^{-vi} + 1 + e^{vi} + \ldots + e^{nvi})^s$$

будет числом случаев, при которых сумма ошибок станет равной l.

Этот же коэффициент есть член, не зависящий ни от e^{vi}, ни от его степеней в разложении того же многочлена, умноженного на e^{-lvi} и очевидно равен члену, независящему от v в том же разложении, умноженному на $(e^{lvi} + e^{-lvi})/2$ или на $\cos lv$. И для этого коэффициента мы имеем поэтому выражение

$$(1/\pi)\int dv \cos lv\,(1 + 2\cos v + 2\cos 2v + \ldots + 2\cos nv)^s$$

с интегралом, взятым от $v = 0$ до $v = \pi$.

В § 36 первой книги [*Аналитической теории вероятностей*] мы видели, что этот интеграл равен[1]

$$\sqrt{3}\frac{(2n+1)^s}{\sqrt{n\,(n+1)\,2\pi s}}\ \exp\frac{-(3/2)\,l^2}{n(n+1)s}.$$

Общее число случаев для [суммы] ошибок равно $(2n + 1)^s$ и, разделив предыдущее выражение на это, мы получим

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n\,(n+1)\,2\pi s}}\ \exp\frac{-(3/2)\,l^2}{n(n+1)s}$$

для вероятности сумме ошибок s наблюдений равняться l.

Если принять

$$l = 2t\sqrt{n\,(n+1)\,s/6},$$

то вероятность сумме ошибок находиться в пределах

$$\pm 2T\quad\sqrt{n\,(n+1)\,s/6}$$

будет равна

$$(2/\sqrt{\pi})\int\ dt\exp(-t^2)$$

с интегралом, взятым от $t = 0$ до $t = T$. Это выражение имеет место и для бесконечного n. Итак, обозначив интервал между пределами, внутри которых заключена ошибка каждого наблюдения, через $2a$, мы получим $n = a$ и предыдущие пределы станут $\pm 2Ta\sqrt{s/6}$. Таким образом, вероятность сумме ошибок заключаться в пределах $\pm ar\sqrt{s}$ равна

$$2\sqrt{3/2\pi}\int\ dr\exp[(-3/2)r^2] \tag{1}$$

и это в то же время вероятность, что средняя ошибка заключена в пределах $\pm ar/\sqrt{s}$ потому что среднюю ошибку мы вычислим, разделив сумму ошибок на s.

Вероятность сумме наклонностей орбит s комет оказаться внутри заданных пределов, если предположить, что все наклонности от 0 до прямого угла равновозможны, очевидно будет той же, что предыдущая вероятность. Интервал $2a$ для пределов ошибок каждого наблюдения будет в данном случае интервалом $\pi/2$ пределов возможных наклонностей и таким образом вероятность, что сумма наклонностей содержится внутри пределов $\pm \pi r\sqrt{s}/4$ будет равна (1), что согласуется с найденным в § 13[2].

Пусть вообще вероятность каждой ошибки, положительной или отрицательной, выражается через $\varphi(x/n)$, где x и n – бесконечные числа. Тогда каждый член вида $2\cos xv$ в функции

$$1 + 2\cos v + 2\cos 2v + \ldots + 2\cos nv$$

следует умножить на $\varphi(x/n)$. Но

$$2\varphi(x/n) \cos xv = 2\varphi(x/n) - (x^2/n^2)\, \varphi(x/n) n^2 v^2 + \ldots$$

Пусть $z = x/n$ и $dz = 1/n$, тогда функция

$$F = \varphi(0/n) + 2\varphi(1/n) \cos v + 2\varphi(2/n) \cos 2v + \ldots + 2\varphi(n/n) \cos nv \quad (2)$$
)

преобразуется в

$$2n \int dz\, \varphi(z) - n^3 v^2 \int z^2 dz\, \varphi(z) + \ldots,$$

где интегралы распространены от $z = 0$ до $z = 1$. Пусть также

$$k = 2\int dz\, \varphi(z),\ k_2 = \int z^2 dz\, \varphi(z) \qquad (3)$$

и предыдущий ряд будет

$$nk\, [1 - (k_2/k)\, n^2 v^2 + \ldots].$$

Теперь легко убедиться по предыдущим рассуждениям, что вероятность сумме ошибок s наблюдений находиться в пределах $\pm l$ равна

$$(2/\pi) \int \int dv\, dl \cos lv\, F^{\,s},$$

где интеграл [один из них] берется от $v = 0$ до $v = \pi$ и F задано выражением (2). И эта вероятность поэтому равна

$$2[(nk)^s/\pi] \int \int dv\, dl \cos lv\, [1 - (k_2/k)\, n^2 v^2 - \ldots]^s. \qquad (4)$$

Пусть

$$[1 - (k_2/k)\, n^2 v^2 - \ldots]^s = \exp(-t^2).$$

Перейдя к натуральным логарифмам, если s – большое число, мы получим почти точно

$s(k_2/k)\, n^2 v^2 = t^2$ и потому $v = (t/n)\sqrt{k/k_2 s}$.

Если затем заметить, что nk или $2\int dx\varphi(x/n)$, выражающее вероятность, что ошибка одного наблюдения заключена в пределы $\pm n$, то эта величина должна равняться единице и функция (4) становится равной

$$(2/n\pi)\sqrt{k/k_2s}\int\int dl\,dt\exp(-t^2)\cos[(lt/n)\sqrt{k/k_2s}],$$

где интеграл по t берется от 0 до $\pi n\sqrt{k_2s/k}$ или до ∞ если предположить, что n бесконечно. И по § 25 книги 1

$$\int dt\exp(-t^2)\cos[(lt/n)\sqrt{k/k_2s}] = (\sqrt{\pi}/2)\exp[-(l^2/4n^2)(k/k_2s)].$$

Полагая $l/n = 2t_1\sqrt{k_2s/k}$, мы получим из (4)

$$(2/\sqrt{\pi})\int dt_1\exp(-t_1^2).$$

Итак, полагая как и выше, что $2a$ – интервал между пределами ошибок каждого наблюдения, получаем, что вероятность сумме ошибок s наблюдений находиться между пределами $\pm ar\sqrt{s}$ равна

$$\sqrt{k/k_2\pi}\int dr\exp[-kr^2/4k_2]. \qquad (5)$$

Если $\varphi(x/n)$ постоянно, $k/k_2 = 6$ и эта вероятность оказывается равной (1), что соответствует найденному выше.

Если $\varphi(x/n)$ или $\varphi(z)$ рациональные и целые функции z, то по методу § 15 окажется, что вероятность сумме ошибок находиться в пределах $\pm ar\sqrt{s}$ будет выражена рядом степеней s, $2s$, … величин вида $s - \mu \pm r\sqrt{s}$, в которых μ возрастает в арифметической прогрессии. Эти величины учитываются вплоть до того, как они становятся отрицательными. Сравнивая этот ряд с предыдущим выражением той же вероятности, мы очень точно получим его значение. И по отношению к такому типу рядов можно установить теоремы, аналогичные приведенным в § 42 книги 1 о конечных разностях степеней одной переменной.

Если закон возможностей ошибок выражен отрицательной показательной функцией, которая может достигать бесконечности и если, вообще, ошибки [также] могут быть бесконечными, так что a становится бесконечным, то в применении предыдущего метода могут возникнуть трудности. Во всех случаях мы положим

$$x/h = z,\ 1/h = dz,$$

где h – произвольная конечная величина. В точности следуя предыдущему анализу, мы найдем для вероятности сумме ошибок s наблюдений находиться в пределах $\pm hr\sqrt{s}$, выражение (5).

Следует заметить, что здесь $\varphi(x/h)$ или $\varphi(z)$ определяют вероятность ошибки $\pm x$, так что имеют место формулы (3), однако интегралы берутся от $z = 0$ до $z = \infty$.

19. Определим теперь вероятность сумме ошибок без учета их знаков, т. е. полагая их всех положительными, находиться в заданных пределах при очень большом числе наблюдений. Рассмотрим для этого ряд

$$\varphi(n/n)e^{-nvi} + \varphi[(n-1)/n]e^{-(n-1)vi} + \ldots + \varphi(0/n) + \ldots +$$
$$\varphi[(n-1)/n]e^{(n-1)vi} + \varphi(n/n)e^{nvi},$$

где $\varphi(x/n)$ – ордината кривой вероятностей ошибок, соответствующая ошибке ± x, и x, равно как и n, полагаются состоящими из бесконечного количества единиц. Если возвысить этот ряд в степень s и поменять знаки отрицательных показателей степеней, коэффициент некоторой показательной функции, например $e^{(l+\mu s)vi}$, окажется вероятностью, что сумма ошибок без учета их знаков равна $(l + \mu s)$. Таким образом, эта вероятность равна

$$(1/2\pi)\int dve^{-(l+\mu s)vi}\,[\varphi(0/n) + 2\varphi(1/n)e^{vi} + \ldots + 2\varphi(n/n)e^{nvi}]^s, \qquad (6)$$

где интеграл берется от $v = -\pi$ до $v = \pi$. Действительно, в этом интервале интеграл

$$\int dv\, e^{-rvi} \text{ или } \int dv\,(\cos rv - i\sin rv)$$

становится равным нулю для всех ненулевых значений r.

Разложение по степеням v приведет к

$$\log\{e^{-\mu svi}\,[\varphi(0/n) + 2\varphi(1/n)e^{vi} + \ldots + 2\varphi(n/n)e^{nvi}]^s\} =$$
$$s\log\{\varphi(0/n) + 2\varphi(1/n) + \ldots + 2\varphi(n/n) +$$
$$2vi\,[\varphi(1/n) + 2\varphi(2/n) + \ldots + n\varphi(n/n)] -$$
$$v^2[\varphi(1/n) + 2^2\varphi(2/n) + \ldots + n^2\varphi(n/n)]\} - \mu svi. \qquad (7)$$

Полагая $x/n = z$, $1/n = dz$,

$$2\int dz\varphi(z) = k,\ \int zdz\varphi(z) = k_1,\ \int z^2dz\varphi(z) = k_2,$$
$$\int z^3dz\varphi(z) = k_3,\ \int z^4dz\varphi(z) = k_4,\ \ldots,$$

где интегралы берутся от $z = 0$ до $z = 1$, получим правую часть (7) в виде

$$s\log nk + s\log\,[1 + 2(k_1/k)nvi - (k_2/k)n^2v^2 - \ldots] - \mu svi.$$

Поскольку ошибка каждого наблюдения наверняка попадает внутрь пределов ± n, мы имеем $nk = 1$, так что предыдущее выражение становится равным

$$s[(2k_1/k) - (\mu/n)]nvi - \frac{(kk_2 - 2k_1{}^2)sn^2v^2}{k^2} - \ldots$$

Если принять $\mu/n = (2k_1/k)$ и пренебречь степенями v выше второй, эта величина сведется к своему второму члену и предыдущая вероятность (6) станет равной

$$(1/2\pi)\int dv \exp[- lvi - \frac{(kk_2 - 2k_1{}^2)sn^2v^2}{k^2}].$$

Пусть

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{kk_2 - 2k_1{}^2}},\ v = \beta t/(n\sqrt{s}),\ l/n = r\sqrt{s}.$$

Тогда предыдущий интеграл станет равным

$$[1/(2\pi n\sqrt{s})]\exp[-(\beta^2r^2)/4]\int \beta\, dt \exp[-(t + \frac{l\beta i}{2n\sqrt{s}})^2].$$

Полученный интеграл следует взять от $t = -\infty$ до $t = \infty$ и предыдущая величина будет равна

$$\beta/(2n\sqrt{\pi s}) \exp[-(\beta^2r^2)/4].$$

При ее умножении на dl или на $ndr\sqrt{s}$ [и интегрировании] интеграл

$$(1/2\sqrt{\pi})\int \beta dr \exp[-\beta^2r^2/4]$$

окажется половиной вероятности, что значение l и, следовательно, сумма ошибок наблюдений находятся в пределах $2(k_1/k)\ as \pm ar\sqrt{s}$, где $\pm a$ – границы ошибок каждого наблюдения, которые мы обозначим через $\pm n$, полагая их разделенными на бесконечное количество частей.

Итак, видно, что вероятнейшая сумма ошибок без учета их знаков соответствует случаю $r = 0$ и равна $2(k_1/k)\ as$. Если функция $\varphi(x)$ постоянна, то $2(k_1/k) = 1/2$ и эта сумма равна половине наибольшей возможной суммы, т. е. половине sa. Если же эта функция не постоянна и убывает с возрастанием ошибки x, то $2(k_1/k)$ менее 1/2 и сумма ошибок без учета их знаков менее половины наибольшей возможной ошибки.

При помощи того же анализа можно определить вероятность сумме квадратов ошибок равняться $l + \mu s$. Легко видеть, что она выражается интегралом (6), взятым от $v = -\pi$ до $v = \pi$. В точности следуя предыдущему анализу, мы получим

$\mu = 2n^2k_2/k$ и, полагая $\beta_1 = \dfrac{k}{\sqrt{kk_4 - 2k_2^{\ 2}}}$,

установим, что вероятность сумме квадратов ошибок s наблюдений находиться в границах $2(k_2/k)\ a^2s \pm a^2r\sqrt{s}$ окажется равной

$$(1/\sqrt{\pi})\int \beta_1 dr \exp[-(\beta_1^{\ 2}r^2)/4].$$

Наиболее вероятна та сумма, которая соответствует r, равному нулю, т. е. равная $2(k_2/k)\ a^2s$. Если s очень большое число, результат наблюдений будет очень мало отличаться от этого значения и потому мы почти точно определим множитель $a^2(k_2/k)$.

20. Если желательно исправить уже известный с хорошим приближением элемент по совокупности большого числа наблюдений, мы составляем условное уравнение[3] следующим образом. Пусть z будет поправкой элемента, а β – наблюдением, аналитическое выражение которого является фукцией элемента. Если подставить вместо этого элемента его приближенное значение с поправкой z и пренебречь ее квадратом, эта функция примет вид $h + pz$. Приравнивая ее наблюденной величине β, мы получим

$$\beta = h + pz,$$

так что z можно определить, будь наблюдение точным. Но, поскольку оно подвержено ошибкам, и обозначив его ошибку через ε, мы определим с точностью до величин порядка z^2

$$\beta + \varepsilon = h + pz \text{ и, если } \beta - h = \alpha,\ \varepsilon = pz - \alpha.$$

Каждое наблюдение предоставляет подобное уравнение. Для $(i + 1)$-го наблюдения оно может быть записано как

$$\varepsilon_i = p_i z - \alpha_i.$$

Складывая эти уравнения, мы получим

$$\sum\varepsilon_i = z\sum p_i - \sum\alpha_i, \qquad (7)$$

где символ $\sum$ соответствует всем значениям i от 0 до $s - 1$ и s – число наблюдений. Если предположить, что сумма ошибок равна нулю, то

$$z = \sum\alpha_i/\sum p_i$$

и это то, что обычно называется *средним результатом наблюдений*.

Мы видели в § 18, что вероятность сумме ошибок s наблюдений находиться в пределах $\pm ar\sqrt{s}$ равна (5). Пусть ошибка результата z равна $\pm u$. Подставляя $\pm ar\sqrt{s}$ вместо $\sum\varepsilon_i$ в уравнение (7) и $\sum\alpha_i/\sum p_i \pm u$ вместо z, мы получим

$$r = u\sum p_i/a\surd s.$$

Вероятность, что ошибка результата z будет заключена между пределами ± u таким образом равна

$$\sqrt{k/(k_2 s\pi)}\sum p_i\int\ (du/a)\ \exp\,[-\ \frac{ku^2(\sum p_i)^2}{4k_2a^2s}]\,.$$

Вместо того, чтобы предположить, что сумма ошибок равна нулю, мы можем принять за нуль произвольную линейную функцию этих ошибок, как например функцию

$$m\varepsilon + m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + \ldots + m_{s-1}\,\varepsilon_{s-1}, \qquad (8)$$

где m, m_1, m_2 – положительные или отрицательные целые числа. Подставляя в эту функцию вместо ε, $\varepsilon_{1,}$ … значения, задаваемые условными уравнениями, получим

$$z\sum m_ip_i - \sum m_i\alpha_i.$$

Если принять (8) равным нулю, то

$$z = \sum m_i\alpha_i/\sum m_ip_i.$$

Пусть u – ошибка этого результата, так что [фактически]

$$z = \sum m_i\alpha_i/\sum m_ip_i + u$$

и функция (8) становится равной

$$u\sum m_ip_i.$$

Определим вероятность ошибки u при большом числе наблюдений и рассмотрим для этого произведение

$$\sum\varphi(x/a)\exp[mxvi]\cdot\sum\varphi(x/a)\exp[m_1xvi]\cdot\ldots\cdot\sum\varphi(x/a)\exp[m_{s-1}xvi].$$

Символ $\sum$ распространяется здесь на все значения x от крайнего отрицательного значения до крайнего положительного. Как и в предыдущих параграфах, $\varphi(x/a)$ – вероятность ошибки x в каждом наблюдении, причем x, как и a, состоит из бесконечного множества частей, принятых за единицу. Ясно, что коэффициент какой-либо показательной функции e^{lvi} в разложении этого произведения будет вероятностью, что сумма ошибок наблюдений, умноженных соответственно на m, m_1, …, т. е. функция (8), окажется равной l. И если умножить предыдущее произведение на e^{-lvi}, то член, не зависящий ни от e^{vi}, ни от его степеней в новом произведении, выразит эту вероятность.

Если предположить, как мы это здесь сделали, что вероятности положительных ошибок совпадают с вероятностями отрицательных, можно будет объединить в сумме $\sum\varphi(x/a)\exp[mxvi]$

члены, умноженные на $\exp[mxvi]$ и на $\exp[-mxvi]$, так что эта сумма примет вид $2\sum\varphi(x/a)\cos(mxv)$. То же можно проделать со всеми аналогичными суммами и поэтому вероятность функции (8) равняться l окажется равной

$$(1/2\pi)\int dv\, e^{-lvi} \cdot 2\sum\varphi(x/a)\cos(mxv) \cdot$$
$$2\sum\varphi(x/a)\cos(m_1xv) \cdot \ldots \cdot 2\sum\varphi(x/a)\cos(m_{s-1}xv), \qquad (9)$$

где интеграл берется от $v = -\pi$ до $v = \pi$. Сведя [разложив] косинус в ряд, получим

$$\sum\varphi(x/a)\cos(mxv) = \sum\varphi(x/a) - (1/2)m^2a^2v^2 \cdot \sum(x^2/a^2)\varphi(x/a) + \ldots$$

Если принять $x/a = x_1$ и заметить, что, поскольку вариация x равна 1, $dx_1 = 1/a$, то

$$\sum\varphi(x/a) = a\int dx_1\varphi(x_1).$$

Как и в предыдущих параграфах, примем за k интеграл $2\int dx_1\varphi(x_1)$, взятый от $x_1 = 0$ до его крайнего положительного значения и вместе с тем примем за k_2 интеграл $\int x_1^2 dx_1\varphi(x_1)$, взятый в тех же пределах и т. д. Тогда

$$2\sum\varphi(x/a)\cos(mxv) = ak[1 - (k_2/k)m^2a^2v^2 + (k_4/12k)m^4a^4v^4 - \ldots].$$

Логарифм правой части этого уравнения равен

$$-(k_2/k)m^2a^2v^2 + \frac{kk_4 - 6k_2^2}{12k^2}m^4a^4v^4 - \ldots + \log(ak).$$

Но ak или $2a\int dx_1\varphi(x_1)$ выражает вероятность, что ошибка каждого наблюдения заключена в своих пределах, что достоверно, и потому $ak = 1$ [и последний член в предыдущем выражении равен нулю].

Теперь можно легко заключить, что произведение [сумм в (9)] равно

$$[1 + \frac{kk_4 - 6k_2^2}{12k^2}a^4v^4\sum m_i^4 + \ldots]\exp[(-k_2/k)a^2v^2\sum m_i^2.$$

Предыдущий интеграл (9) сведется тогда к

$$(1/2\pi)\int dv\,[1 + \frac{kk_4 - 6k_2^2}{12k^2}a^4v^4\sum m_i^4 + \ldots] \cdot$$
$$\exp[-lvi - (k_2/k)a^2v^2\sum m_i^2].$$

Если принять $sa^2v^2 = t^2$, то этот интеграл преобразуется в

$$(1/2a\pi\surd s)\int\ dt\,[1+\frac{kk_4-6k_2^{\,2}}{12k^2}(t^4/s^2)\sum m_i^{\,4}+\ldots]\cdot$$
$$\exp[-(lti/a\surd s)-(t^2k_2/ks)\sum m_i^{\,2},$$

где $\sum m_i^{\,2}$, $\sum m_i^{\,4}$, … очевидно являются величинами порядка s. Таким образом, $\sum m_i^{\,4}/s^2$ есть величина порядка $1/s$ и, если пренебречь членами подобного порядка по сравнению с единицей, то последний интеграл окажется равным

$$(1/2a\pi\surd s)\int\ dt\,\exp[-(lti/a\surd s)-(t^2k_2/ks)\sum m_i^{\,2}].$$

Интеграл по v должен браться от $-\pi$ до π, а интеграл по t – от $-a\pi\surd s$ до $a\pi\surd s$ и в таких случаях показательная функция под знаком [последнего] интеграла при указанных пределах пренебрегаема либо потому, что s – большое число, либо потому, что a по предположению разделено на бесконечное количество частей, принятых за единицу. Поэтому мы можем принять, что интеграл распространен от $t=-\infty$ до $t=\infty$. Пусть

$$t_1=\sqrt{\frac{k_2\sum m_i^{\,2}}{ks}}\,[t+\frac{lik\sqrt{s}}{2ak_2\sum m_i^{\,2}}].$$

Тогда последний интеграл станет равным

$$\frac{\exp[-(kl^2/4k_2a^2\sum m_i^{\,2})]}{2a\pi\sqrt{(k_2/k)\sum m_i^{\,2}}}\int\ dt_1\exp(-t_1^{\,2}).$$

Здесь интеграл по t_1, как и по t, следует взять от $-\infty$ до ∞, так что предыдущая величина становится равной

$$\frac{\exp[-(kl^2/4k_2a^2\sum m_i^{\,2})]}{2a\sqrt{\pi(k_2/k)\sum m_i^{\,2}}}.$$

Пусть $l=ar\surd s$; если заметить, что вариация l равна единице, то $adr=1$ и вероятность, что функция (8) заключена в пределы 0 и $ar\surd s$ будет равна

$$\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{\pi(k_2/k)\sum m_i^{\,2}}}\int\ dr\,\exp[-(kr^2s/4k_2\sum m_i^{\,2})],$$

где интеграл берется от $r=0$.

Здесь нам следует знать вероятность ошибки u в определяемом элементе, если положить функцию (8) равной нулю. Эта функция, будучи предположена равной l или $ar\surd s$, окажется равной, по предыдущему,

$u\sum m_i p_i = ar\sqrt{s}.$

При подстановке этого значения в предыдущий интеграл он станет равным

$$\frac{\sum m_i p_i}{2a\sqrt{\pi(k_2/k)\sum m_i^2}} \int du \exp\left[-\frac{ku^2(\sum m_i p_i)^2}{4k_2a^2\sum m_i^2}\right].$$

Это – выражение вероятности, что значение *u* заключено в пределах 0 и *u* и это также выражение вероятности, что *u* заключено в пределах 0 и – *u*. Если положить

$$u = 2at\sqrt{k_2/k}\,\frac{\sqrt{\sum m_i^2}}{\sum m_i p_i}, \tag{10}$$

то предыдущая вероятность станет равной

$$(1/\sqrt{\pi})\int dt \exp(-t^2).$$

Теперь, если вероятность остается той же самой когда *t* остается тем же самым, то интервал между пределами для *u* сужается тем больше, чем [правая часть (10) без 2*t*] становится меньше. Если этот интервал не изменяется, то значение *t* и, следовательно, вероятность ошибки элемента быть заключенным в нем окажется тем больше (выше), чем меньше эта же величина [правая часть (10) без 2*t*]. Мы должны поэтому выбрать такую систему множителей m_i, которая приведет эту величину к минимуму. А так как *a*, *k* и k_2 остаются без изменения во всех этих системах, то следует выбрать систему, которая приведет к минимуму $\frac{\sqrt{\sum m_i^2}}{\sum m_i p_i}$.

К тому же результату можно придти [и] таким путем. Рассмотрим снова выражение для вероятности, что *u* заключено в пределах 0 и *u*. Коэффициент *du* в дифференциале этого выражения есть ордината кривой вероятностей ошибок *u* элемента, – тех ошибок, которые представлены абсциссой *u* этой кривой, которую можно продолжать до бесконечности по обе стороны от ординаты, соответствующей нулевому значению *u*. И тогда каждую ошибку, и положительную, и отрицательную, надо будет считать потерей или реальным убытком в какой-то игре.

По принципам теории вероятностей, изложенным в начале этой [второй] книги, указанная потеря оценивается суммой произведений каждой потери на ее вероятность. Среднее значение ошибки избытка, которой следует опасаться, поэтому равно сумме произведений каждой ошибки на ее вероятность и оно поэтому равно интегралу

$$\frac{\int udu\sum m_i p_i \exp\{-[ku^2 (\sum m_i p_i)^2]/4k_2 a^2 \sum m_i^2\}}{2a\sqrt{(k_2/k)\pi \sum m_i^2}},$$

взятому от $u = 0$ до $u = \infty$. Эта ошибка, стало быть, равна

$$a\sqrt{k_2 / k\pi} \cdot \frac{\sqrt{\sum m_i^2}}{\sum m_i p_i}.$$

Та же величина, взятая со знаком минус, даст среднюю ошибку недостатка, которой следует опасаться. Ясно, что система множителей m_i, которую следут выбрать, должна быть такой, чтобы эти ошибки стали минимальными, т. е. чтобы минимальным стал [последний сомножитель (дробь) в (10)].

Если продифференцировать этот сомножитель относительно m_i и приравнять его дифференциал нулю, мы получим по условию минимума

$$m_i/\sum m_i^2 = p_i/\sum m_i p_i.$$

Это уравнение имеет место для любого i и, поскольку изменение индекса не может повлиять на дробь $\sum m_i^2/\sum m_i p_i$, которую мы назовем μ, то

$$m = \mu p,\ m_1 = \mu p_1,\ \ldots,\ m_{s-1} = \mu p_{s-1},$$

и, каковы бы ни были p, p_1, ..., можно принять μ так, чтобы числа m, m_1, … оказались целыми, что и было предположено в предыдущем анализе. Итак,

$$z = \sum p_i \alpha_i/\sum p_i^2, \tag{11}$$

а средняя ошибка, которой следует опасаться, становится равной

$$\pm a\sqrt{k_2 / k\pi} \div \sqrt{\sum p_i^2}.$$

При всех предположениях, которые можно принять относительно множителей m, m_i, это – наименьшая средняя ошибка из возможных. Если принять значения m, m_1, … равными ± 1 и выбрать знаки так, чтобы $m_i p_i$ были положительны, средняя ошибка, которой следует опасаться, окажется меньше. Указанный выбор равнозначен предположению $1 = m = m_1 = \ldots$ и такому преобразованию условных уравнений, что коэффициент z в каждом из них оказывается положительным и это то, что делается в обычном методе. Итак, средний результат наблюдений равен [см. начало этого параграфа]

$$z = \sum \alpha_i/\sum p_i,$$

а средняя ошибка в избытке и недостатке оказывается равной

$$\pm a\sqrt{k_2 s / k\pi} \div \sum p_i.$$

Но она больше, чем предыдущая, которая, как это было видно, является наименьшей из возможных. И это можно также показать следующим образом. Достаточно доказать неравенства

$$\sqrt{s} / \sum p_i > 1/\sqrt{\sum p_i^2} \text{ или } s\sum p_i^2 > [\sum p_i]^2.$$

По существу $2pp_1$ меньше чем $p^2 + p_1^2$ потому что $(p_1 - p)^2$ есть величина положительная. Поэтому в правой части предыдущего неравенства можно заменить $2pp_1$ на $p^2 + p_1^2 - f$ при положительном f. Если произвести аналогичную замену во всех подобных произведениях, правая часть неравенства станет равной левой без положительной величины. Результату (11) соответствует минимум средней ошибки, которой следует опасаться. Он будет тем же, что при методе наименьших квадратов ошибок наблюдений, потому что сумма этих квадратов равна

$$(pz - \alpha)^2 + (p_1 z - \alpha_1)^2 + \ldots + (p_{s-1} z - \alpha_{s-1})^2$$

и минимум этой функции, достигаемый при варьировании z, дает для этой переменной предыдущее выражение. Поэтому этот метод должен быть предпочитаем при любом законе возможностей ошибок, от которого зависит отношение k_2/k.

Если $\varphi(x)$ постоянно, то это отношение равно 1/6. Оно меньше 1/6, если $\varphi(x)$ переменно и убывает при возрастании x, что естественно предположить. Приняв средний закон ошибок, который мы ввели в § 15, в соответствии с коим

$$\varphi(x) = (1/2a) \log(a/x),$$

мы имеем**[4]** $(k_2/k) = 1/18$. Что касается пределов $\pm a$, можно принять за них пределы уклонения от среднего, которые заставили бы отбросить одно наблюдение. Но можно определить множитель $a\sqrt{k_2 / k}$ в выражении для средней ошибки из самих наблюдений.

По существу в предыдущем параграфе было видно, что сумма квадратов ошибок наблюдений почти в точности равна $2sa^2(k_2/k)$ и что если наблюдений очень много, становится крайне вероятным, что наблюдаемая сумма не уклоняется от этого значения на ощутимую величину. Их можно поэтому приравнять друг другу. Теперь, наблюдаемая сумма равна $\sum\varepsilon_i^2$ или $\sum(p_i z - \alpha_i)^2$. Подставляя вместо z его значение (11), мы найдем, что

$$2sa^2(k_2/k) = \frac{\sum p_i^2 \sum \alpha_i^2 - [\sum p_i \alpha_i]^2}{\sum p_i^2}.$$

Предыдущее выражение для средней ошибки, которой следует опасаться в z, станет поэтому равным

$$\pm \frac{\sqrt{\sum p_i^2 \sum \alpha_i^2 - [\sum p_i \alpha_i]^2}}{\sum p_i^2 \sqrt{2s\pi}}$$

и в нем нет ничего, что не было бы дано наблюдениями и коэффициентами условных уравнений.

21. Предположим теперь, что имеется два элемента, поправки к которым следует определить по совокупности большого числа наблюдений. Обозначим их через z и z_1 и образуем, как и в предыдущем параграфе, условные уравнения, которые могут быть записаны в такой общей форме

$$\varepsilon_i = p_i z + q_i z_1 - \alpha_i.$$

Здесь ε_i, как и в предыдущем параграфе, погрешность (i + 1)-го наблюдения. Если умножить эти уравнения соответственно на m, m_1, …, m_{s-1} и сложить произведения, будет получено первое окончательное уравнение[5]

$$\sum m_i\varepsilon_i = z\sum m_i p_i + z_1\sum m_i q_i - \sum m_i\alpha_i.$$

Если затем умножить эти же уравнения соответственно на n, n_1, …, n_{s-1} и сложить произведения, мы получим второе окончательное уравнение

$$\sum n_i\varepsilon_i = z\sum n_i p_i + z_1\sum n_i q_i - \sum n_i\alpha_i.$$

Символ $\sum$, как и в предыдущем параграфе, распространен на все значения i от 0 до s – 1.

Если предположить, что обе функции, $\sum m_i\varepsilon_i$ и $\sum n_i\varepsilon_i$, которые мы обозначим через (12) и (13), равны нулю, эти два окончательные уравнения приведут к поправкам z и z_1 обоих элементов. Но эти поправки подвержены ошибкам, которые зависят от только что сделанного нами также возможно ошибочного предположения. Представим себе поэтому, что функции (12) и (13) равны не нулю, а соответственно l и l_1 и обозначим через u и u_1 ошибки, соответствующие поправкам z и z_1, которые определяются как указано выше. Окончательные уравнения станут

$$l = u\sum m_i p_i + u_1\sum m_i q_i,\ l_1 = u\sum n_i p_i + u_1\sum n_i q_i.$$

Теперь надо определить множители m, m_1, …, n, n_1, … так, чтобы средняя ошибка, которой следует опасаться в каждом элементе, была минимальна. Рассмотрим для этого произведение

$$\sum\varphi(x/a)\exp[-(mv + nv_1)xi]\cdot\sum\varphi(x/a)\exp[-(m_1v + n_1v_1)xi]\cdot\ldots\cdot$$
$$\sum\varphi(x/a)\exp[-(m_{s-1}v + n_{s-1}v_1)xi],$$

в котором знак $\sum$ относится ко всем значениям x от $-a$ до a и $\varphi(x/a)$, как и в предыдущем параграфе, – вероятность ошибки x, равно как и $-x$. При объединении двух показательных функций, относящихся к x и $-x$, предыдущая функция окажется равной

$$2\sum\varphi(x/a)\cos[(mv + nv_1)x]\cdot 2\sum\varphi(x/a)\cos[(m_1v + n_1v_1)x]\cdot\ldots\cdot$$
$$2\sum\varphi(x/a)\cos[(m_{s-1}v + n_{s-1}v_1)x],$$

где знак $\sum$ распространен на все значения x от 0 до a; по предположению, x, как и a, разделен на бесконечное множество частей, принятых за единицу.

Теперь ясно, что член, не зависящий от этих показательных функций в произведении предыдущих функций на $\exp[lvi - l_1vi]$, будет вероятностью сумме ошибок каждого наблюдения, умноженных соответственно на m, m_1, … или на функцию (12) равняться l и одновременно сумме этих ошибок, умноженных соответственно на n, n_1, … равняться l_1. Эта вероятность поэтому будет равна

$$(1/4\pi^2)\iint dvdv_1\exp[lvi - l_1vi][2\sum\varphi(x/a)\cos[(mv + nv_1)x]\cdot$$
$$2\sum\varphi(x/a)\cos[(m_1v + n_1v_1)x]\cdot\ldots\cdot 2\sum\varphi(x/a)\cos[(m_{s-1}v + n_{s-1}v_1)x],$$

где интегралы взяты и по v и по v_1 от $-\pi$ до π.

И теперь в точности следуя анализу предыдущего параграфа, мы обнаружим, что предыдущая функция сведется почти в точности к

$$(1/4\pi^2)\iint dvdv_1\cdot$$
$$\exp[lvi - l_1vi - (k_2/k)a^2(v^2\sum m_i^2 + 2vv_1\sum m_in_i + v_1^2\sum n_i^2],$$

где смысл k и k_2 тот же самый, что и в указанном параграфе. И видно также, в соответствии с тем же параграфом, что интегралы могут быть распространены от $av = -\infty$ и $av_1 = -\infty$ до $av = \infty$ и $av_1 = \infty$. Примем, что

$$t = av + av_1(\sum m_in_i/\sum m_i^2) + kli/(2k_2a\sum m_i^2),$$

$$t_1 = av_1 - k/(2k_2a)\,\frac{i\,(l\sum m_in_i - l_1\sum m_i^2)}{\sum m_i^2\sum n_i^2 - (\sum m_in_i)^2}$$

и, далее, что

$$E = \sum m_i^2\sum n_i^2 - (\sum m_i\sum n_i)^2$$

и тогда предыдущий двойной интеграл станет равным

$$\exp\{-[k/(4k_2a^2E)]\,(l^2\sum n_i^2 - 2ll_1\sum m_in_i + l_1^2\sum m_i^2)\cdot$$
$$\iint(1/4\pi^2a^2)\,dtdt_1\exp[-(k_2t_1^2/k)\sum m_i^2 - (k_2t^2E/k\sum m_i^2)].$$

Полагая, что, как и относительно av и av_1, интегралы распространены от отрицательной до положительной бесконечности, мы получим

$$[k/(4\pi k_2 a^2\sqrt{E})]\exp[-k/(4k_2a^2)(1/E)\,(l^2\sum n_i^2 - 2ll_1\sum m_in_i + l_1^2\sum m_i^2).\ (14)$$

Чтобы теперь определить вероятность, что значения l и l_1 заключены в заданных пределах, умножим эти величины на $dldl_1$ и проинтегрируем в этих же пределах. Если обозначить получаемую величину через X, то указанная вероятность будет равна $\iint X dldl_1$. Но, чтобы получить вероятность,что ошибки u и u_1 поправок элементов были заключены в заданные пределы, следует подставить в этот интеграл вместо l и l_1 их значения, выраженные через u и u_1. Или, если продифференцировать выражения для l и l_1 и полагать при этом l_1 постоянным, мы получим

$$dl = du\sum m_ip_i + du_1\sum m_iq_i,\ 0 = du\sum n_ip_i + du_1\sum n_iq_i,$$

что даст нам

$$dl = du\,(\sum m_ip_i\sum n_iq_i - \sum n_ip_i\sum m_iq_i) \div \sum n_iq_i.$$

Если же далее продифференцировать выражение для l_1, полагая u постоянным, мы получим

$$dl_1 = du_1\sum n_iq_i$$

и потому

$$dl\,dl_1 = (\sum m_ip_i\sum n_iq_i - \sum n_ip_i\sum m_iq_i)du\,du_1.$$

Примем теперь

$$\begin{aligned}
&F = \sum n_i^2(\sum m_ip_i)^2 - 2\sum m_in_i\sum m_ip_i\sum n_ip_i + \sum m_i^2(\sum n_ip_i)^2,\\
&G = \sum n_i^2\sum m_ip_i\sum m_iq_i + \sum m_i^2\sum n_ip_i\sum n_iq_i -\\
&\qquad \sum m_in_i\sum n_ip_i\sum m_iq_i + \sum m_ip_i\sum n_iq_i,\\
&H = \sum n_i^2(\sum m_iq_i)^2 - 2\sum m_in_i\sum m_iq_i\sum n_iq_i + \sum m_i^2(\sum n_iq_i)^2,\\
&I = \sum m_ip_i\sum n_iq_i - \sum n_ip_i\sum m_iq_i
\end{aligned}$$

и функция (14) окажется равной

$$[k/(4\pi a^2k_2\sqrt{E})]\iint dudu_1\exp[-(k/4k_2a^2E)\,(Fu^2 + 2Guu_1 + Hu_1^2)].$$

Проинтегрируем это вначале от $u_1 = -\infty$ до $u_1 = \infty$. Если

$$t = [u_1 + (Gu/H)]\sqrt{kH/4k_2} \div a\sqrt{E}$$

и принять интеграл от $t = -\infty$ до $t = \infty$, то, учитывая лишь изменение u_1, мы получим

$$\sqrt{k/4\pi k_2}\ (I/\surd H)\ (1/a) \int du \exp\,[-\,(ku^2/4k_2a^2)\ (FH - G^2)/EH].$$

Но $(FH - G^2)/E = I^2$ и предыдущий интеграл оказывается равным

$$\sqrt{k/4\pi k_2}\ (I/\surd H)\ (1/a) \int du \exp\,[-\,(ku^2/4k_2a^2)\ I^2/H].$$

В соответствии с предыдущим параграфом, средняя ошибка в избытке и недостатке, которой следует опасаться в поправке первого элемента, равна произведению подынтегральной функции на $\pm u$ при пределах интеграла, равных 0 и ∞. Это даст

$$\pm a\surd H \div I\sqrt{k\pi/k_2}\,,$$

где знаки плюс и минус соответствуют указанной ошибке с избытком и недостатком.

Определим теперь множители m_i и n_i так, чтобы эта ошибка оказалась минимальной. Изменяя одни лишь m_i, мы получим

$$d \log (\surd H/I) = (dm_i/I)\ [-\,p_i\textstyle\sum n_iq_i + q_i\sum n_ip_i] +$$
$$(dm_i/H)\ [q_i\textstyle\sum n_i^2\sum m_iq_i - n_i\sum m_iq_i\sum n_iq_i - q_i\sum m_in_i\sum n_iq_i + m_i\,(\sum n_iq_i)^2].$$

Легко видеть, что этот дифференциал станет равным нулю, если предположить, что коэффициенты dm_i равны

$$m_i = \mu p_i,\ n_i = \mu q_i,$$

где μ – произвольный коэффициент, не зависящий от i, в связи с чем можно привести m_i и n_i к целым числам.

В соответствии с предыдущим предположением дифференциал $(\surd H/I)$ по отношению к m_i приводится к нулю. Тем же способом можно привести к нулю и дифференциал той же величины по отношению к n_i. Итак, это предположение приводит к минимальной средней ошибке, которой следует опасаться в поправке первого элемента, – и видно, что тем же способом при замене H на F оно приводит к минимуму и среднюю ошибку второго элемента.

При этом предположении поправки обоих элементов оказываются равными

$$z = \frac{\sum q_i^2 \sum p_i\alpha_i - \sum p_iq_i \sum q_i\alpha_i}{\sum p_i^2 \sum q_i^2 - (\sum p_iq_i)^2}$$

[поправка для z_1 та же, но с циклической заменой p на q]. Легко видеть, что эти поправки совпадают с теми, к которым приводит метод наименьших квадратов ошибок наблюдений[6], или минимум функции

$$\textstyle\sum(p_iz + q_iz_1 - \alpha_i)^2.$$

Отсюда следует, что этот метод является общим при любом числе определяемых элементов, так как видно, что предыдущий анализ можно распространить на этот общий случай.

В соответствии с § 20 можно предположить, что

$$a\sqrt{k_2/k\pi} = \sqrt{\sum \varepsilon_i^2/2s\pi},$$

где ε, ε_1, … – остаточные члены условных уравнений после подстановки в них поправок, определенных по методу наименьших квадратов ошибок. Средняя ошибка, которой следует опасаться в первом элементе, будет равна

$$\pm\sqrt{\sum \varepsilon_i^2/2s\pi}\,\sqrt{\sum q_i^2} \div \sqrt{\sum p_i^2 \sum q_i^2 - (\sum p_i q_i)^2}\,. \qquad (15)$$

Средняя ошибка во втором элементе, которой следует опасаться в избытке и недостатке [та же, но с заменой q на p в числителе]. Видно, стало быть, что первый элемент определяется лучше или хуже второго в соответствии с тем, меньше $\sum q_i^2$ или больше чем $\sum p_i^2$. Если первые r условных уравнений совсем не содержат q, а последние $(s - r)$ совсем не содержат p, то $\sum p_i q_i = 0$ и предыдущие формулы совпадают с подобной формулой предшествующего параграфа.

Можно также установить среднюю ошибку, которой следует опасаться, для каждого элемента, определенного по методу наименьших квадратов ошибок, при любом их числе, если только рассматривать большое число наблюдений. Пусть z, z_1, z_2, z_3, … – поправки каждого элемента. Условные уравнения в общем случае мы представим в виде

$$\varepsilon_i = p_i z + q_i z_1 + r_i z_2 + t_i z_3 + \ldots - \alpha_i.$$

В случае одного-единственного элемента средняя ошибка, которой следует опасаться, равна, как мы видим [из (15)],

$$\pm\sqrt{\sum \varepsilon_i^2/2s\pi} \div \sqrt{\sum p_i^2}\,. \qquad (16)$$

В случае двух элементов эта ошибка для первого элемента будет получена при замене $\sum p_i^2$ на $\sum p_i^2 - (\sum p_i q_i)^2/\sum q_i^2$ в функции (16), что приведет к (15). Для трех элементов та же величина определяется из (15) при замене $\sum p_i^2$ на $\sum p_i^2 - (\sum p_i r_i)^2/\sum r_i^2$, $\sum p_i q_i$ на $\sum p_i q_i - (\sum p_i r_i \sum q_i r_i)/\sum r_i^2$ и $\sum q_i^2$ на $\sum q_i^2 - (\sum q_i r_i)^2/\sum r_i^2$. Это приведет к [здесь также формула (17)]. В случае четырех элементов средняя ошибка, которой следует опасаться в первом элементе, будет получена из (17) при замене […] и т. д.

Продолжая подобным образом, можно определить эту величину при любом числе элементов. И, если в выражении для этой ошибки изменить то, что относится к первому элементу, на то, что относится ко второму, и наоборот, мы получим среднюю ошибку, которой следует опасаться во втором элементе, – и подобным же образом для остальных элементов.

Отсюда вытекает простой метод сравнения различных астрономических таблиц [каталогов] друг с другом с точки зрения [их] точности. Можно всегда предположить, что эти таблицы переведены в одну и ту же форму и потому отличаются друг от друга лишь по принятым в них эпохам [моментам, на которые они составлены], средним движениям [светил] и коэффициентам своих аргументов. Ибо, если одна из них, к примеру, содержит аргумент, который вообще отсутствует в других, ясно, что это равносильно предположению, что в них он равен нулю.

Далее, если сравнить эти таблицы по всей совокупности подходящих наблюдений и исправить их указанным сравнением (en les rectifiant par cette comparaison) [?], то в соответствии с предыдущим в исправленных подобным образом таблицах сумма квадратов оставшихся еще ошибок окажется наименьшей. Таблицы, которые наиболее близки к соблюдению этого условия, поэтому заслуживают предпочтения. Отсюда следует, что при сравнении различных таблиц, содержащих большое число наблюдений, предположения об их точности должны быть приняты в пользу тех, в которых сумма квадратов ошибок меньше, чем в остальных.

22. До сих пор мы предполагали, что возможности положительных ошибок те же, что и отрицательных. Теперь мы рассмотрим общий случай, при котором эти возможности могут быть различными. Пусть a – интервал, внутри которого могут находиться ошибки каждого наблюдения. Предположим, что он разделен на бесконечное количество $n + n_1$ равных частей, принятых за единицу, где n и n_1 – количества частей, которые соответствуют отрицательным и положительным ошибкам. В каждой точке интервала a восставим перпендикуляр, который выразит вероятность ошибки и обозначим полученные ординаты, соответствующие ошибкам x, через $\varphi[x/(n + n_1)]$.

Рассмотрим теперь сумму

$$\begin{aligned}&\varphi[-n/(n+n_1)]\,e^{-qnvi} + \varphi[-(n-1)/(n+n_1)]\,e^{-q(n-1)vi} + \ldots +\\ &\varphi[-1/(n+n_1)]\,e^{-qvi} + \varphi[0/(n+n_1)] + \varphi[1/(n+n_1)]\,e^{qvi} + \ldots +\\ &\varphi[(n_1-1)/(n+n_1)]\exp[q(n_1-1)vi] + \varphi[n_1/(n+n_1)]\exp[qn_1vi],\end{aligned}$$

которую мы представим как

$$\sum \varphi[x/(n+n_1)]\,e^{qxvi},$$

где символ $\sum$ распространен на все значения x от $-n$ до n_1. В соответствии с § 21 член, не зависящий ни от e^{vi}, ни от его степеней, в разложении функции

$$\begin{aligned}&e^{-(l+\mu)vi}\sum \varphi[x/(n+n_1)]\exp[qnvi]\cdot\sum \varphi[x/(n+n_1)]\exp[q_1nvi]\cdot\ldots\\ &\cdot\sum \varphi[x/(n+n_1)]\exp[q_{s-1}nvi]\end{aligned}$$

окажется вероятностью, что функция

$$q\varepsilon + q_1\varepsilon_1 + + \ldots + q_{s-1}\,\varepsilon_{s-1} \qquad (18)$$

равна $l + \mu$. Эта вероятность таким образом принимает значение

$$(1/2\pi)\int dv\, e^{-lvi}\, e^{-\mu vi}\sum \varphi[x/(n + n_1)] \exp{[qxvi]} \cdot \ldots, \qquad (19)$$

где интеграл берется от $v = -\pi$ до $v = \pi$. Логарифм функции

$$e^{-\mu vi}\sum \varphi[x/(n + n_1)]\exp{[qxvi]} \cdot \sum \varphi[x/(n + n_1)]\exp{[q_1xvi]}\cdot \ldots \qquad (20)$$

равен

$$-\mu vi + \log\{\sum \varphi[x/(n + n_1)] \exp{[qxvi]}\} + \ldots$$

Если n и n_1 предполагаются бесконечными количествами и если положить

$$x/(n + n_1) = \xi,\ 1/(n + n_1) = d\xi,\ k = \int d\,\xi\,\varphi(\xi),$$
$$k_1 = \int \xi\, d\,\xi\,\varphi(\xi),\ k_2 = \int \xi^2\, d\,\xi\,\varphi(\xi),\ \ldots,$$

где интегралы взяты от $\xi = -\, n/(n + n_1)$ до $\xi = n_1/(n + n_1)$, то

$$\sum \varphi[x/(n + n_1)] \exp{[qxvi]} =$$
$$(n + n_1)k\,[1 + (k_1/k)\,q\,(n + n_1)vi - (k_2/2k)\,q^2(n + n_1)^2v^2 + \ldots].$$

Ошибка каждого наблюдения должна заключаться в пределах $-\,n$ и n_1 и вероятность, что это имеет место, равная

$$\int \varphi[x/(n + n_1)] = (n + n_1)k,$$

должна равняться единице. Поэтому легко заключить, что логарифм функции (20) равен

$$[(k_1/k)\sum q_i - \mu_1](n + n_1)vi - [(kk_2 - k_1^2)/2k^2](n + n_1)^2v^2\sum q_i^2 + \ldots,$$

где $\mu_1 = \mu/(n + n_1)$ и сумма распространена на все значения i от 0 до $(s - 1)$. Первая степень v исчезнет, если $\mu_1 = (k_1/k)\sum q_i$ и если учитывается лишь ее квадрат, что возможно в соответствии с предыдущим, потому что s – очень большое число, мы получим для логарифма (20) [одно лишь второе слагаемое предыдущей суммы]. При переходе от логарифмов к числам эта функция (20) преобразуется в

$$\exp{\{-[(kk_2 - k_1^2)/2k^2]\,(n + n_1)^2v^2\sum q_i^2\}},$$

а интеграл (19) станет равным

$$(1/2\pi)\int dv\, e^{-lvi} \exp\{-[(kk_2 - k_1^2)/2k^2]\,(n + n_1)^2v^2 \sum q_i^2\}.$$

Пусть

$$l = (n + n_1)\, r\sqrt{\sum q_i^2}\ ,$$
$$t = \sqrt{(kk_2 - k_1^2)\sum q_i^2 / 2k^2}\ (n + n_1)v - (ri/2)\sqrt{2k^2/(kk_2 - k_1^2)}\ .$$

Вариация l равна единице и поэтому

$$1 = (n + n_1)\, dr\sqrt{\sum q_i^2}\ ,$$

так что предыдущий интеграл после интегрирования от $t = -\infty$ до $t = \infty$ станет равным

$$\frac{kdr}{\sqrt{2\pi(kk_2 - k_1^2)}} \exp\,[-\frac{k^2r^2}{2\,(kk_2 - k_1^2)}].$$

Итак, вероятность, что функция (18) заключена в пределы

$$(ak_1/k) \sum q_i \pm ar\sqrt{\sum q_i^2}$$

равна

$$(2/\sqrt{\pi})\int \frac{kdr}{\sqrt{2\,(kk_2 - k_1^2)}} \exp\,[-\frac{k^2r^2}{2\,(kk_2 - k_1^2)}],$$

где интеграл берется от $r = 0$.

Величина (ak_1/k) это абсцисса, чья ордината проходит через центр тяжести кривой вероятностей ошибок каждого наблюдения. Произведение этой абсциссы на $\sum q_i$ есть поэтому средний результат, к которому функция (8) непрестанно стремится**[7]**. Если $1 = q = q_1 = \ldots$, то эта функция станет суммой ошибок, а $\sum q_i$ окажется равной s. Если поэтому разделить на s сумму ошибок, чтобы получить среднюю ошибку, то эта средняя будет непрестанно стремится к абсциссе центра тяжести таким образом, что при неопределенном [неограниченном] возрастании числа наблюдений вероятность, что она окажется заключенной в сколь угодно малом интервале по ту и иную сторону от центра тяжести, будет отличаться от достоверности менее, чем на любую заданную величину.

23. Мы теперь исследуем средний результат, который многочисленные и еще не сделанные наблюдения должны указывать с бóльшей пользой и установим закон вероятности этого результата**[8]**. Рассмотрим средний результат уже произведенных наблюдений, уклонения которых от него известны. Представим себе для этого некоторое число s наблюдений одного и того же класса, т. е. таких, закон ошибок которых один и тот же у них всех. Пусть A – результат первого, $A + q$ – второго, $A + q_1$ – третьего и т. д.

Величины q, q_1, q_2, … положительны и возрастают, чего всегда можно достичь подходящим расположением наблюдений. Обозначим еще вероятность ошибки z каждого наблюдения через $\varphi(z)$ и положим, что истинный результат равен $A + x$. Ошибка первого наблюдения поэтому будет равна x, второго, $q - x$, третьего, $q_1 - x$ и т. д. – Вероятность одновременного существования всех этих ошибок есть произведение их соответствующих вероятностей, т. е.

$$\varphi(-x)\cdot\varphi(q-x)\cdot\varphi(q_1-x)\cdot\ldots$$

Далее, x может принимать бесконечное количество значений. Если считать их столькими же причинами наблюденного явления, то вероятность каждой в соответствии с § 1 равна

$$\frac{dx\,\phi(-x)\,\phi(q-x)\,\phi(q_1-x)\ldots}{\int dx\,\phi(-x)\,\phi(q-x)\,\phi(q_1-x)\ldots},$$

где интегрирование в знаменателе производится по всем принимаемым значениям x. Обозначим этот знаменатель через $1/H$ и представим себе кривую вероятностей значений x с ординатой

$$y = H\varphi(-x)\cdot\varphi(q-x)\cdot\varphi(q_1-x)\ \ldots,$$

соответствующей ее абсциссе x. За средний результат надо принять значение, приводящее к минимуму ошибку, которой следует опасаться. Каждую ошибку, положительную или отрицательную, надо считать убытком или реальной потерей в игре, а средний убыток мы получим, если примем сумму произведений каждого на его вероятность. И поэтому среднее значение ошибки, которой следует опасаться, равно сумме произведений каждой ошибки без учета знака на свою вероятность.

Определим абсциссу, которую следует выбрать, чтобы эта сумма оказалась минимальной. Для этого придадим абсциссам в качестве начала первую оконечность предыдущей кривой и обозначим координаты кривой относительно этого начала через x' и y'. Пусть l – значение, которое следует выбрать. Ясно, что если истинный результат x', ошибка величины l будет, без учета знака, $l - x'$ пока x' меньше l. Между тем, y' есть вероятность, что x' – истинный результат и сумма ошибок без учета знака, которых следует опасаться, умноженных на их вероятности, будет поэтому равна $\int(l - x')\,y'dx'$ для всех x', меньших, чем l, так что интеграл берется от $x' = 0$ до $x' = l$. Таким же образом видно, что для значений x', превышающих l, интеграл $\int(x' - l)\,y'dx'$, распространенный от $x' = l$ до абсциссы, соответствующей последней оконечности кривой, есть сумма ошибок, которых следует опасаться, умноженных на их вероятности. Полная сумма таких ошибок равна поэтому

$$\int (l - x')\, y' d x' + \int (x' - l)\, y' d x'.$$

Дифференциал этой функции, взятый относительно l, равен

$$dl \int y' d x' - dl \int y' d x'.$$

Действительно, при дифференцировании первого интеграла следует вначале дифференцировать значение l в подынтегральной функции и присоединить к полученному дифференциалу приращение, которое происходит при вариации предела интегрирования, принимающего значение $l + dl$. Это приращение равно элементу $(l - x')\, y' d x'$ при $x' = l$ и поэтому равно нулю и $dl \int y' d x'$ есть дифференциал первого интеграла. Видно, что таким же образом $- dl \int y' d x'$ есть дифференциал второго интеграла. Сумма этих дифференциалов относительно абсциссы l, соответствующей минимуму ошибки, которой следует опасаться, равна нулю. Поэтому, относительно этой абсциссы,

$$\int y' d x' = \int y' d x',$$

где первый интеграл берется от $x' = 0$ до $x' = l$, а второй – от $x' = l$ до крайнего значения x'.

Отсюда следует, что абсцисса, при которой средняя ошибка, которой следует опасаться, минимальна, делит площадь [под] кривой на две равные части. Эта точка [абсцисса] обладает также тем свойством, что истинный результат уклоняется от нее в одну и в другую сторону с одной и той же вероятностью и по этой причине ее можно еще назвать *средней по вероятности*. Прославленные геометры принимали за среднее то, которое делало наблюденный результат наиболее вероятным и потому выбирали абсциссу, соответствующую наибольшей ординате кривой**[9]**. Но то среднее, которое мы приняли, очевидно указывается теорией вероятностей.

Если принять $\varphi(x)$ в показательной форме и обозначить ее через $\exp [- \psi(x^2)]$, чтобы она равным образом соответствовала положительным и отрицательным ошибкам, мы получим

$$y = H \exp [- \psi(x^2) - \psi(x - q)^2 - \psi(x - q_1)^2 - \ldots]. \qquad (21)$$

Если теперь положить $x = a + z$ и разложить показатель степени по степеням z, y примет вид

$$y = H\exp [- M - 2Nz - Pz^2 - Qz^3 \ldots].$$

Здесь

$$M = \psi(a^2) + \psi(a - q)^2 + \psi(a - q_1)^2 + \ldots,$$

$$N = a\psi'(a^2) + (a - q)\,\psi'(a - q)^2 + (a - q_1)\psi'(a - q_1)^2 + \ldots, \qquad (22)$$
$$P = \psi'(a^2) + \psi'(a - q)^2 + \psi'(a - q_1)^2 +$$
$$2a^2\psi''(a^2) + 2(a - q)^2\psi''(a - q)^2 + 2(a - q_1)^2\psi''(a - q_1)^2 + \ldots \text{ и т. д.,}$$

$\psi'(t)$ – коэффициент dt в дифференциале $\psi(t)$, $\psi''(t)$ – коэффициент dt в дифференциале $\psi'(t)$ и т. д.

Пусть число s наблюдений очень велико. Определим a из уравнения $N = 0$, что обеспечит максимум y. Мы будем иметь

$$y = H\exp\,[- M - Pz^2 - Qz^3 \ldots],$$

где $M, P, Q, \ldots$ имеют порядок s. И если z очень мало, порядка $1/\surd s$, то Qz^3 оказывается [также] порядка $1/\surd s$ и показательная функция exp $[- Qz^3 \ldots]$ может быть сведена [считаться равной] единице. Итак, в интервале от
$z = 0$ до $z = r/\surd s$ можно принять

$$y = H\exp\,[- M - Pz^2]. \qquad (23)$$

За этим интервалом, когда z имеет порядок $s^{-m/2}$ и m менее единицы, Pz^2 становится порядка s^{1-m} и, как и y, exp $[-Pz^2]$ будет неощутимым. Таким образом, мы можем на всем протяжении кривой предположить, что имеет место (23). Значение a определяется по уравнению $N = 0$ [см. (22)], т. е., стало быть, является абсциссой x, соответствующей ординате, которая делит площадь кривой на равные части. Условие, при котором вся эта площадь представляет достоверность или единицу, приводит к

$$(1/H) = \int dz \exp\,[- M - Pz^2],$$

где интеграл берется от $z = - \infty$ до $z = \infty$ и потому

$$H = e^M \sqrt{P/\pi}\,.$$

Если a принято за средний результат наблюдений, то средняя ошибка в избытке и недостатке, которой следует опасаться, равна
$\pm \int zydz$, где интеграл берется от $z = 0$ до $z = \infty$, так что эта ошибка равна $\pm\ 1/2\sqrt{\pi P}$. Но полное незнание, является ли exp $[- \psi(x^2)]$ законом ошибок наблюдения, не позволяет составить уравнение
$N = 0$ [см. (22)]. Итак, значения q, q_1, … не обеспечивают никакого *апостериорного* знания о среднем результате a наблюдений и следует придерживаться наиболее вероятного результата, определенного *априорно* и доставляемого, как мы видели, методом наименьших квадратов ошибок.

Найдем функцию $\psi(x^2)$, которая непременно приводит к принятым наблюдателями средним арифметическим. Для этого представим, что и первые i из s наблюдений, и последние $(s - i)$ из них совпадают друг с другом. Тогда уравнение $N = 0$ [см. (22)] примет вид

$$0 = ia\psi'(a^2) + (s - i)\,(a - q)\,\psi'(a - q)^2,$$

а правило средних арифметических даст нам $a = [(s - i)/s]q$. Предыдущее уравнение таким образом преобразуется в

$$\psi'\{[(s - i)/s]^2 q^2\} = \psi'[(i^2/s^2)\,q^2].$$

Это уравнение должно иметь место при любых i/s и q и потому необходимо, чтобы $\psi'(t)$ было независимо от t, так что $\psi'(t) = k$, где k – константа. Интегрирование приводит к

$$\psi(t) = kt - L,$$

где L – произвольное постоянное и поэтому

$$\exp\,[-\,\psi(x^2)] = \exp\,(L - kx^2).$$

Такова, стало быть, единственная функция, которая всегда приводит к правилу средних арифметических. Постоянная L должна быть определена так, чтобы

$$\int dx \exp\,(L - kx^2),$$

взятый от $x = -\,\infty$ до $x = \infty$, был равен единице, потому что достоверно, что ошибка наблюдения должна заключаться в этих пределах. Таким образом,

$$e^L = \sqrt{k/\pi}$$

и, следовательно, вероятность ошибки x равна

$$\sqrt{k/\pi}\,\exp\,(-\,kx^2).$$

По правде сказать, это выражение приводит к бесконечным пределам ошибок, что неприемлемо. Но ввиду скорости, с которой этот вид показательных функций убывает с ростом x, можно принять k достаточно большим [?], чтобы за пределами допустимых ошибок их вероятности оказались неощутимыми и могли считаться нулями. Если определить H так, чтобы весь интеграл $\int ydx$ был равен единице и принять

$$x = (\sum q_i/s) + u,$$

то предыдущий закон ошибок приведет общее выражение (21) для y к

$$y = \sqrt{sk/\pi}\,\exp\,(-\,ksu^2).$$

Ордината, которая делит площадь кривой на две равные части, соответствует значению $u = 0$ [так что в правой части предыдущего равенства остается лишь первое слагаемое]. Это приводит к значению x, которое следует выбрать за средний результат наблюдений, и это то значение, из которого вытекает правило средних арифметических. Таким образом, предыдущий закон ошибок каждого наблюдения непременно приводит к тем же результатам, что и указанное правило и видно, что это единственный закон, обладающий подобным свойством.

Приняв этот закон, вероятность ошибки ε_i $(i + 1)$-го наблюдения окажется равной

$$\sqrt{k/\pi}\,\exp\,(-\,k\varepsilon_i^2).$$

В § 20 мы видели, что если z – поправка элемента, то это наблюдение приводит к условному уравнению

$$\varepsilon_i = p_i z - \alpha_i.$$

Вероятность значения $p_i z - \alpha_i$ поэтому равна

$$\sqrt{k/\pi}\,\exp\,[-\,k\,(p_i z - \alpha_i)^2],$$

а вероятность одновременного существования s значений $(pz - \alpha)$, $(p_1 z - \alpha_1)$, …, $(p_{s-1}\,z - \alpha_{s-1})$ окажется равной[10]

$$(\sqrt{k/\pi}\,)^{s-1}\,\exp\,[-\,k\sum\,(p_i z - \alpha_i)^2].$$

Эта вероятность изменяется с z. Поэтому мы получим вероятность некоторого значения z при умножении этой величины на dz и деления произведения на его интеграл, взятый от $z - \infty$ до $z = \infty$. Пусть

$$z = \frac{\sum p_i\alpha_i}{\sum p_i^2} + u, \qquad (24)$$

тогда эта вероятность станет равной

$$du\sqrt{k\sum p_i^2/\pi}\,\exp\,[-\,ku^2\sum\ p_i^2].$$

Следовательно, если провести кривую, простирающуюся от $u = -\,\infty$ до $u = \infty$, ординатами которой являлись бы коэффициенты при du, а абсциссами – величины u, она могла бы считаться кривой вероятностей ошибок u, которым подвержен результат [формула (24) без поправочного члена]. Ордината, которая делит площадь кривой на две равные части, соответствует значению $u = 0$ и поэтому z равен [правой части формулы (24) без поправочного члена]. Это, стало быть, тот результат, который следует выбирать, притом совпадающий с результатом метода наименьших квадратов ошибок наблюдений. Предыдущий закон ошибок каждого наблюдения таким образом приводит к тому же, что и этот метод.

Метод наименьших кваратов ошибок становится необходимым, если следует принимать среднее между многими результатами, каждый из которых задан совокупностью большого числа наблюдений различных классов. Пусть один и тот же элемент задан 1) Средним результатом A из s наблюдений первого класса. 2) Средним результатом $A + q$ из s_1 наблюдений второго класса. 3) Средним результатом $A + q_1$ из s_2 наблюдений третьего класса и т. д. Если истинный элемент представить в виде $A + x$, то ошибка результата из s наблюдений будет равна $-x$. Пусть

$$\beta = \sqrt{k/k_2}\,\frac{\sqrt{\sum p_i^2}}{2a}$$

если применить метод наименьших квадратов ошибок для определения среднего результата или, если для той же цели с применением обычного метода [средних] положить

$$\beta = \sqrt{k/k_2}\,\frac{\sum p_i}{2a\sqrt{s}},$$

то вероятность этой ошибки окажется равной в соответствии с § 20

$$(\beta/\sqrt{\pi}) \exp [-(\beta^2 x^2)].$$

Ошибка результата s_1 наблюдений равна $q - x$; если обозначить для них то, что было названо β, через β_1, то вероятность этой ошибки окажется равной

$$(\beta_1/\sqrt{\pi}) \exp [-(\beta_1^2(x - q)^2].$$

Таким же образом для погрешности $q_1 - x$ в результате s_2 наблюдений получим вероятность

$$(\beta_2/\sqrt{\pi}) \exp [-(\beta_2^2(x - q_1)^2]$$

и т. д. Произведение всех этих вероятностей будет вероятностью, что $-x$, $q - x$, $q_1 - x$, … [действительно] окажутся ошибками средних результатов из s, s_1, s_2, … наблюдений. Если умножить это произведение на dx и проинтегрировать его от $x = -\infty$ до $x = \infty$, то получим вероятность, что средние результаты этих наблюдений превысят на q, q_1, … средний результат из s наблюдений.

Если взять этот интеграл в определенных пределах, мы получим вероятность, что при выполнении указанного условия ошибка первого результата будет заключена в этих пределах. Разделив полученную вероятность на вероятность самогó условия, мы получим вероятность, что ошибка первого результата будет заключена в заданных пределах, поскольку [теперь] достоверно, что это условие действительно имеет место. Эта вероятность, стало быть, равна [отношению двух совпадающих интегралов]

$$\int dx \exp\,[\,-(\beta^2x^2)-(\beta_1{}^2(x-q)^2-(\beta_2{}^2(x-q_1)^2-\ldots],$$

причем интеграл в числителе берется в заданных пределах, а в знаменателе – от $x = -\infty$ до $x = \infty$.

Мы имеем

$$(\beta^2x^2)+\beta_1{}^2(x-q)^2+\beta_2{}^2(x-q_1)^2+\ldots =$$
$$(\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots)x^2-2x(\beta_1{}^2q+\beta_2{}^2\,q_1+\ldots)+\beta_1{}^2\,q^2+\beta_2{}^2\,q_1{}^2+\ldots$$

Пусть

$$x = [(\beta_1{}^2q+\beta_2{}^2\,q_1+\ldots)\div(\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots)]+t. \qquad (25)$$

Тогда вероятность станет равной [отношению двух совпадающих интегралов]

$$\int dt \exp\,[\,-(\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots)]\,t^2,$$

причем интеграл в числителе берется в заданных пределах, а в знаменателе – от $t = -\infty$ до $t = \infty$. Этот последний интеграл равен

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots}}\,.$$

Если полагать

$$t_1 = t\sqrt{\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots}\,,$$

то предыдущая вероятность окажется равной

$$(1/\sqrt{\pi})\int dt_1 \exp\,[\,-(t_1{}^2)].$$

Наиболее вероятное значение t_1 соответствует нулевому t_1 и потому наиболее вероятно значение x, отвечающее значению $t = 0$[11]. Итак, поправка первого результата, к которому с наивысшей вероятностью приводит совокупность всех s, s_1, s_2, … наблюдений, равна [выражению (25) без t]. Присоединенная к результату A, она приводит к тому результату, который надо выбрать:

$$\frac{A\beta^2+(A+q)\beta_1{}^2+(A+q_1)\beta_2{}^2+\ldots}{\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots},$$

а предыдущая поправка приводит к минимуму функцию

$$(\beta^2x^2)+\beta_1{}^2(x-q)^2+\beta_2{}^2(x-q_1)^2+\ldots$$

И наибольшая ордината кривой вероятностей первого результата равна, как мы сейчас видели, $\beta/\sqrt{\pi}$. Для кривой вероятностей второго результата – $\beta_1/\sqrt{\pi}$ и т. д. Среднее, которое следует выбрать, приводит к минимуму сумму квадратов ошибок каждого результата, умноженных на наибольшие ординаты соответствующих кривых вероятностей. И закон минимума квадратов ошибок становится необходимым, если требуется принять среднее из результатов, каждый из которых задан большим числом наблюдений.

24. Мы видели, что из всех способов сочетания условных уравнений с целью перехода к окончательным линейным уравнениям, необходимым для определения элементов, наиболее выгоден тот, который следует из метода наименьших квадратов ошибок наблюдений, по крайней мере тогда, когда имеется большое число наблюдений. Если, вместо рассмотрения минимума квадратов ошибок, перейти к минимуму их других степеней, или даже совсем к иным функциям ошибок, окончательные уравнения перестанут быть линейными и их решение окажется неосуществимым.

Тем не менее, имеется случай, который заслуживает особого внимания, поскольку он определяет систему, в которой наибольшая ошибка без учета знака меньше, чем в любой иной системе. Это случай минимума бесконечных и четных степеней ошибок. Рассматривая здесь только поправку одного-единственного элемента и обозначая ее через z, представим, как и раннее, условные уравнения в виде

$$\varepsilon_i = p_i z - \alpha_i,$$

где i изменяется от нуля до $s - 1$ и s – число наблюдений. Сумма ошибок, взятых в степени $2n$, равна $\sum(\alpha_i - p_i z)^{2n}$, где символ $\sum$ распространяется на все значения i. Можно предположить, что в этой сумме все значения p_i положительны, ибо, если одно из них отрицательно, оно станет положительным при допустимом изменении знака обоих членов соответствующего бинома, возведенного в степень $2n$.

Итак, если предположить, что величины $(\alpha - pz)$, $(\alpha_1 - p_1 z)$, $(\alpha_2 - p_2 z)$, … расположены таким образом, что величины p, p_1, p_2, … положительны и возрастают и если $2n$ бесконечно, то ясно, что наибольший член в сумме $\sum(\alpha_i - p_i z)^{2n}$ будет равен всей сумме, по крайней мере если нет ни одного, ни многих других членов, равных ему, хотя в случае минимума суммы это предположение не должно иметь места.

По существу, если только одна-единственная величина, например $(\alpha_i - p_i z)$, является наибольшей без учета знака, ее можно уменьшить подходящим изменением z и поскольку $\sum(\alpha_i - p_i z)^{2n}$ при этом убывает, она не была минимальна. Более того, если $(\alpha_i - p_i z)$ и $(\alpha_j - p_j z)$ – две наибольшие величины, равные друг другу без учета знаков, они должны быть противоположны по знаку. По существу, если сумма

$$(\alpha_i - p_i z)^{2n} + (\alpha_j - p_j z)^{2n}$$

становится минимальной, ее дифференциал

$$-2ndz\,[p_i(\alpha_i - p_iz)^{2n-1} + p_j(\alpha_j - p_jz)^{2n-1}]$$

должен равняться нулю, что может случиться если n бесконечно разве лишь при бесконечно мало отличающихся друг от друга величинах $(\alpha_i - p_iz)$ и $(\alpha_j - p_jz)$ противоположных по знаку. Если три величины являются наибольшими и равными друг другу без учета знаков, то мы таким же образом убеждаемся, что их знаки не могут совпадать.

Рассмотрим теперь последовательность

$$(\alpha_{s-1} - p_{s-1}z),\ (\alpha_{s-2} - p_{s-2}z),\ (\alpha_{s-3} - p_{s-3}z),\ \ldots,\ (\alpha - pz),\ (-\alpha + pz),\ \ldots,$$
$$(-\alpha_{s-3} + p_{s-3}z),\ (-\alpha_{s-2} + p_{s-2}z),\ (-\alpha_{s-1} + p_{s-1}z). \qquad (26)$$

Если предположить, что $z = -\infty$, первый член окажется больше последующих и будет оставаться больше их при возрастании z до того момента, пока не окажется равным одному из них. А затем этот [появившийся член] при возрастании z станет больше всех остальных и останется больше, чем те, кому он предшествует. Чтобы определить этот член, мы образуем последовательность частных

$$[(\alpha_{s-1} - \alpha_{s-2})/(p_{s-1} - p_{s-2})],\ [(\alpha_{s-1} - \alpha_{s-3})/(p_{s-1} - p_{s-3})],\ \ldots,$$
$$[(\alpha_{s-1} - \alpha)/(p_{s-1} - p)],\ [(\alpha_{s-1} + \alpha)/(p_{s-1} + p)],\ \ldots,$$
$$[(\alpha_{s-1} + \alpha_{s-2})/(p_{s-1} + p_{s-2})].$$

Пусть $[(\alpha_{s-1} - \alpha_r)/(p_{s-1} - p_r)]$ будет наименьшим из них с учетом знаков, т. е. полагая, что бóльшая отрицательнная величина меньше чем меньшая отрицательная. Если имеется много меньших и равных отношений, мы примем во внимание то, которое относится к члену, наиболее удаленному от первого в последовательности (26). Этот член будет наибольшим из всех, пока при возрастании z он не станет равным одному из последующих, который затем станет наибольшим. Чтобы определить этот новый член, мы образуем новую последовательность отношений

$$[(\alpha_r - \alpha_{r-1})/(p_r - p_{r-1})],\ [(\alpha_r - \alpha_{r-2})/(p_r - p_{r-2})],\ \ldots,$$
$$[(\alpha_r - \alpha)/(p_r - p)],\ [(\alpha_r + \alpha)/(p_r + p)],\ \ldots$$

Член последовательности (26), которому соответствует наименьшее из этих отношений, окажется этим новым членом. Так следует продолжать до тех пор, пока один из двух членов, ставших равными и наибольшими, не окажется в первой, а второй – во второй половине последовательности (26). Пусть эти два члена будут $(\alpha_i - p_iz)$ и $-(\alpha_j - p_jz)$. Тогда значение z, которому соответствует наименьшая из наибольших ошибок без учета знаков, будет

$$z = (\alpha_i + \alpha_j)/(p_i + p_j).$$

Если надо исправить много элементов, то условные уравнения, которые определяют их поправки, включают много неизвестных и исследование системы поправок, в которой наибольшая ошибка без учета знаков оказывается меньше, чем в любой иной системе, становится более сложным. Я рассмотрел этот вариант в общем случае в третьей книге *Небесной механики* [прим. 1804/1878, гл. 5, § 39] и здесь я только замечу, что, как и при одном-единственном неизвестном, сумма ошибок наблюдений в степени $2n$ минимальна, когда $2n$ бесконечно. Отсюда легко заключить, что в системе, о которой идет речь, число равных и наибольших без учета знаков ошибок должно на единицу превышать число исправляемых элементов.

Понятно, что результаты, соответствующие большому значению $2n$, должны мало отличаться от тех, к которым приводит бесконечное $2n$. И здесь даже не обязательно, чтобы $2n$ было очень большим, и мне известно по многим примерам, что даже в случаях, когда эта степень не превышает двух, результаты мало отличаются от тех, к которым приводит система минимума наибольших ошибок, и в этом состоит новое преимущество метода наименьших квадратов ошибок наблюдений.

В течение долгого времени геометры применяли среднее арифметическое из своих наблюдений, и для определения элементов, которые они хотели установить, они выбирали наиболее благоприятные для этого обстоятельства, т. е. те, при которых ошибки наблюдений как можно меньше изменяли значения этих элементов. Но, если не ошибаюсь, Котс был первым, кто привел общее правило, чтобы помочь определению элемента по многим наблюдениям пропорционально их влиянию. Если рассматривать каждое наблюдение как функцию элемента, а его ошибку как бесконечно малый дифференциал, то она окажется равной дифференциалу функции, взятому относительно этого элемента. Чем больше коэффициент дифференциала элемента, тем меньше следует варьировать элемент, чтобы произведение его вариации на коэффициент равнялось ошибке наблюдения. И таким образом этот коэффициент выразит влияние наблюдения на значение элемента.

Итак, Котс представил все значения элемента, данные каждым наблюдением, частями бесконечной прямой с единым началом. Представим далее, на их других концах веса, пропорциональные влияниям соответствующих наблюдений. Расстояние от общего начала частей до общего центра тяжести всех этих весов будет значением, которое выбирается для элемента.

Вернемся к условному уравнению § 20:

$$\varepsilon_i = p_i z - \alpha_i,$$

где ε_i – ошибка $(i + 1)$-го наблюдения, z – поправка уже почти известного элемента, а p_i, которое всегда можно считать положительным, выражает влияние соответствующего наблюдения. Значение z, вытекающее из наблюдения, будет α_i/p_i, и правило Котса сводится к умножению этого значения на p_i, образованию суммы всех произведений, относящихся к различным значениям, и ее делению на сумму всех p_i, что приводит к

$$z = \sum \alpha_i / \sum p_i.$$

Такова по сути поправка, которую принимали наблюдатели до применения метода наименьших квадратов ошибок наблюдений. Тем не менее, мы не видим, чтобы после этого прекрасного геометра кто-нибудь применил его правило до Эйлера, который в своем первом мемуаре о Юпитере и Сатурне [1749 г.], как мне представляется, первым употребил условные уравнения для определения элементов эллиптического движения этих двух планет. Почти в то же время Тобиас Майер [1750 г.] использовал их в своих замечательных исследованиях либрации Луны, а затем для составления лунных таблиц. С тех пор лучшие астрономы следовали этому методу и успех таблиц, которые они составили с его помощью, обосновал его преимущество.

Если определяется только один элемент, то этот метод не приводит ни к каким затруднениям, но если требуется исправить сразу несколько элементов, нужно иметь столько же окончательных уравнений, образованных сочетанием многих условных уравнений, и при их помощи определять поправки элементов [последовательным] исключением [неизвестных]. Но каков наиболее выгодный способ сочетания условных уравнений для образования окончательных уравнений? Именно здесь наблюдатели поддаются произвольным действиям наугад, которые и приводят их к различающимся результатам, хотя и выведенным из одних и тех же наблюдений.

Чтобы избежать этого произвола, г-н Лежандр [1805г., см. в этом сборнике] возымел простую идею рассматривать сумму квадратов ошибок наблюдений и приводить ее к минимуму, что непосредственно приводит к стольким же окончательным уравнениям, сколько элементов следует исправить. Этот ученый геометр первым опубликовал указанный метод, но надо отдать должное г-ну Гауссу, заметив, что за много лет до публикации Лежандра он постоянно пользовался той же идеей и сообщил о ней многим астрономам.

Г-н Гаусс, в *Теории движения* [1809 г.], стремился соотнести этот метод с теорией вероятностей, показав, что тот же закон ошибок наблюдений, который в общем случае приводит к принятому наблюдателями правилу среднего арифметического из многих наблюдений, вместе с тем обеспечивает правило наименьших квадратов наблюдений, – и это то, что видно в § 23. Но, поскольку ничто не доказывает, что первое из этих правил приводит к наиболее выгодным результатам, та же самая неопределенность существовала и по отношению ко второму. Исследование наиболее выгоднейшего способа образования окончательных уравнений несомненно является одним из наиболее полезных в теории вероятностей и его значение в физике и астрономии обратило меня к этому.

И я рассмотрел, как все способы сочетания условных уравнений для образования окончательного уравнения сводятся к их умножению на множители, становящиеся равными нулю для уравнений, которые мы вовсе не используем, и образованию суммы всех этих произведений, что нам и дает первое окончательное уравнение. Вторая система множителей приводит ко второму окончательному уравнению и т. д. до тех пор, пока их не окажется столько, сколько элементов требуется исправить. Тем не менее видно, что надо выбрать системы множителей так, чтобы средняя ошибка в избытке и недостатке, которой следует опасаться в каждом элементе, была минимальной. Средняя ошибка это сумма произведений каждой ошибки на ее вероятность.

Когда наблюдений мало, выбор этих систем зависит от закона ошибок каждого наблюдения. Но если рассматривать большое число наблюдений, что чаще всего происходит в астрономических исследованиях, этот выбор становится независимым от указанного закона и из предыдущего видно, что анализ тогда непосредственно приводит к результатам метода наименьших квадратов ошибок наблюдений. Итак, этот метод, который вначале не обеспечивал ничего, кроме преимущества приводить без всякого произвола к окончательным уравнениям, необходимым для исправления элементов, в то же время дает наиболее точные [?] поправки, по крайней мере если применять только линейные окончательные уравнения. Это является необходимым условием, если рассматриваешь сразу большое число наблюдений, иначе [последовательное] исключение неизвестных [из уравнений] и их определение становится неосуществимым.

Примечания

1. См. Де Брюин (1958, §41.1).

2. См. АТВ, с. 264, где формула (1) приведена с поправочным членом.

3. В классической (гауссовой) теории ошибок были приняты термины *уравнение погрешности* (по Лапласу, *условное*) и *условное уравнение*. Первое обозначало уравнение вида

$$a_1x + b_1y + \dots + l_i = v_i$$

со свободными членами l_i и неизбежными остаточными свободными членами v_i. Неизвестными x, y, ... фактически являлись их *оценки*, которые определялись почти исключительно по МНКв. Условными же были названы уравнения, которые являлись следствиями геометрических соотношений и должны были выполняться в точности. Так, в плоском треугольнике сумма его трех исправленных углов должна была в точности равняться двум прямым.

4. Хальд (1998, p. 316) замечает, что Лаплас определил дисперсию (т. е. k_2) для этого *среднего закона* при помощи (нестрого им доказанной) ЦПТ и что она оказалась равной $a^2/9$, но это плохо понятно. Мы сами подтвердили вывод Лапласа (k_2/k =

1/18), приняв при вычислении каждого интеграла нижний предел равным ε, а затем устремив этот предел к нулю.

5. Современный термин – *нормальное уравнение* – был введен, как заметил Дейвид (2001, p. 222), Гауссом (1822, с. 130). Относился он, однако, лишь к уравниванию по МНКв, Лаплас же употреблял свое словосочетание в широком смысле.

6. Лаплас несколько раз употребляет неверное выражение: *МНКв ошибок*. Ошибки, однако, остаются неизвестными; сумма квадратов относится к остаточным свободным членам исходных уравнений. Ту же ошибку совершали Пуассон и Бессель (который, разумеется, писал по-немецки).

7. В другом сочинении Лаплас (1786/1894, с. 308) указал, как заметил Molina (1930, p. 386), что аппроксимация в теории вероятностей отличается от "обычных, при которых всегда есть уверенность, что результат содержится в устанавливаемых пределах".

8. Фраза не подтверждается дальнейшими рассуждениями. Возможно, что Лаплас понимал наблюдения как выборку из некоторой совокупности.

9. *Прославленными геометрами* были Ламберт в 1760 г. и Даниил Бернулли в 1778 г., также Гаусс, но только в 1809 г.

10. Коэффициент показательной функции должен был бы быть в степени **s.**

11. Крайне неудачная фраза, поскольку неясно как наиболее вероятное значение t_1 соотносится с только что выписанным интегралом.

IV. О приложении исчисления вероятностей к наблюдениям и специально к [тригонометрическому] нивелированию

Laplace P. S. (1819), Sur l'application du calcul des probabilités aux observations et spécialement aux opérations du nivellement. OC, t. 14. Paris, 1912, pp. 301 – 304

В обширной триангуляции, которая выполняется для измерения Земли, тщательно измеряются зенитные расстояния [смежных] сигналов, либо для редуцирования наблюдений [углов треугольников] к горизонту, либо для определения превышений различных станций[1]. Большое влияние на эти превышения оказывает вертикальная рефракция, а ее изменчивость делает их весьма ненадежными. Я предлагаю здесь оценку вероятности ошибок, которым они подвержены.

Теория [вертикальной] рефракции указывает нам, что в постоянной атмосфере она является кратной частью небесной дуги, содержащейся между зенитом наблюдателя и наблюдаемым сигналом [она содержится целое число раз в этой дуге]. Таким образом, чтобы ее установить, достаточно умножить эту дугу на множитель, который остается постоянным, если атмосфера всегда одна и та же, но который беспрестанно изменяется вввиду непрерывных изменений температуры и плотности воздуха. Большое число наблюдений может дать среднее значение этого множителя и закон вероятности его изменения[2].

Я исхожу из наблюдений месье Деламбра [Мешен и Деламбр 1807] и определяю вероятность погрешности в высоте Парижа над [уровнем] моря в предположении, что Дюнкерк и Париж соединены цепью из 25 равносторонних треугольников, что означает, что каждая их сторона имеет длину[3] примерно 20 000*м*. Эту высоту можно получить различными методами, но предпочитаться как наиболее выгодный должен тот, при котором закон вероятности ошибок убывает быстрее всего. Его исследование является простым следствием анализа всех этих тем, который я предложил в другом месте, и из него следует, что можно ставить 9 против одного, что в таком случае ошибка превышения Парижа над [уровнем] моря не более 8*м*. Метод, которому следовал месье Деламбр, чтобы заключить,что это превышение, переданное [цепью] почти из того же числа треугольников, несколько менее точен. Но в основном это длина сторон многих его треугольников, которая придает его результату ненадежность и которая не позволяет поручиться с достаточной вероятностью, что она не равна 16 или 18*м*, т. е. что она не является существенной.

Равновероятные ошибки сильно убывают когда станции сближаются и необходимо этого добиваться при желании обеспечить точное нивелирование. Большие треугольники, весьма подходящие для измерения градусов земного [меридиана], нисколько не годятся для измерения высот и эти два вида наблюдений следует отделять друг от друга. Но при умножении числа станций ошибка измерения зенитных углов [расстояний] возрастает с их числом и становится сравнимой с ошибкой, зависящей от изменчивости вертикальной рефпакции. Это дало мне повод исследовать закон вероятности ошибок результатов при большом числе источников ошибок[4]. Таково большинство астрономических результатов, потому что звезды наблюдаются при помощи двух приборов, меридианного круга и теодолита[5], каждый из которых подвержен ошибкам, чьи законы вероятности нельзя предполагать одними и теми же. Анализ, который я привел в *Аналитической теории вероятностей*, легко применим к этому случаю при любом числе источников ошибок и устанавливает наиболее выгодные результаты и законы вероятности ошибок, которым они подвержены. Чтобы приложить его к нивелированию, следует знать закон вероятности ошибок, вызванных астрономической [вертикальной] рефракцией. И только что было указано, что он вытекает [определяется наличием] больших треугольников обширных триангуляций, проводимых [для измерения] меридиана. И далее следует знать закон вероятности ошибок зенитных углов [расстояний]. Наблюдений на этот счет у нас нет, но мы мало уклонимся от истины, если предположим, что он тот же, что и для горизонтальных углов, который выводится из ошибок сумм трех углов каждого треугольника триангуляции[6]. Исходя из этих законов, я нашел, что при делении расстояния от Парижа до Дюнкерка станциями, отстоящими друг от друга на одно и то же расстояние 1200*м*, можно ставить тысячу против одного, что ошибка в превышении Парижа над [уровнем] моря не превзойдет 0.4*м*. Эта ошибка убывает при сближении станций, но точность, которая при этом достигается, не уравновешивает длительности требуемой работы.

Условные уравнения, которые составляются для вывода астрономических элементов, неявно включают ошибки обоих приборов, служащие для определения положения звезд. Эти ошибки влияют на различные коэффициенты каждого уравнения и поэтому система наиболее выгодных множителей[7], на которые следует соответственно умножить эти уравнения, чтобы вывести при объединении получаемых произведений столько окончательных уравнений, сколько имеется определяемых элементов, – эта система, я говорю, более не будет системой коэффициентов при элементах в каждом условном уравнении. Анализ подвел меня к общему выражению этой системы множителей, а потому и к результату с менее вероятной одинаковой ошибкой, которой следует опасаться, чем в любой иной системе. Тот же анализ установил законы вероятности ошибок этих результатов. Его формулы включают постоянные по числу источников ошибок, притом зависящие от законов их вероятности. В случае, когда источник один-единственный, я указал, в моей теории вероятностей, средство исключить постоянную, образуя сумму квадратов остаточных свободных членов условных уравнений после подстановки в них найденных значений элементов. В общем случае подобным методом определяются значения этих постоянных, сколько бы их ни было, и это завершает приложение исчисления вероятностей к результатам наблюдений.

Я заканчиваю замечанием, которое мне представляется важным. Неуверенность при определении значений только что упомянутых постоянных, если наблюдений не очень много, приводит к небольшой неуверенности в вероятностях, устанавливаемых анализом. Но почти всегда бывает достаточно знать, стремится ли (approche extrêmement) к единице вероятность ошибки найденных результатов, заключенная в узкие пределы, и если нет, достаточно будет выяснить, насколько следует увеличить число наблюдений, чтобы добиться такой вероятности, при которой не останется никакого разумного сомнения в доброкачественности результата. Аналитические формулы вероятности в совершенстве выполняют эту задачу и с этой точки зрения их можно рассматривать как необходимое дополнение научного метода, основанного на изучении совокупности большого числа наблюдений, подверженных ошибкам. Итак, если погрешность, которой следует опасаться в превышении Парижа над [уровнем] моря, выведенная из больших треугольников [измеренных вдоль] меридиана сокращена с 18*м* до 15, то не менее верно, что это превышение [всё же] неуверенно и что его следует определить более точными методами. В то же время аналитические формулы, относящиеся к этим треугольникам, проложенным от базиса возде Перпиньяна до Форментера, указывают, что можно ставить примерно 1700 000 против одного, что погрешность соответствующей дуги меридиана, длина которой превышает 460 000*м*, ошибочна не более, чем на 60*м*. Это должно рассеять опасения в неуверенности, которые могут быть внушены отсутствием контрольного базиса[8] на испанском конце цепи. Можно будет еще не беспокоиться об этом, если даже вероятность ошибки, равной 60*м* или большей, превысит дробь, устанавливаемую формулами, и дойдет до одной миллионной[9].

Примечания

1. Точным является *геометрическое* нивелирование, – определение превышений между близко расположенными друг к другу вертикальными рейками при помощи горизонтального луча трубы нивелира. Оно начало широко применяться лишь в середине XIX в., Лаплас же описывает *тригонометрическое* нивелирование (при котором, разумеется, вводились поправки за высоту над поверхностью земли и инструмента, поднятого на сигнал, и цели на соседнем сигнале), термин же этот был, возможно, более позднего происхождения. При употреблении теодолитов более позднего изготовления углы треугольников уже не надо было приводить к горизонту.

2. Эмпирическое исследование вертикальной рефракции имеет смысл лишь для определенного района и установленного времени суток.

3. Выписывание заведомо избыточных цифр объяснялось давней традицией, которая дожила по крайней мере до XX в.

4. Лаплас имеет в виду часть *Дополнения 3* к своей *Аналитической теории вероятностей* (1812, с. 608 – 616), в которой он действительно исследовал совместное действие двух (легко обобщаемое на большее число) источников ошибок. Однако, в обоих случаях он рассматривал только нормальные распределения (правда, с различающимися параметрами) и кроме того всё его исследование прекрасно укладывается в схему метода наименьших квадратов, см. Шейнин (1977a, pp. 46 – 47) и Хальд (1998, pp. 430 – 431).

5. В оригинале: lunette méridienne, cercle. Второй термин относился к различным типам теодолитов.

6. Иными словами, – в обоих случаях нормальные законы, однако их параметры не могли совпадать.

7. Скорее системы (во множественном числе), каждая из которых определяет одно окончательное уравнение.

8. Понятие контрольного базиса давно устарело. Для контроля масштаба триангуляции и особо для последующего исключения систематических влияний необходимы два равноправных базиса. Впрочем, эту роль базисы начали выполнять лишь после внедрения высокоточных базисных приборов.

9. Лаплас конечно же имеет в виду не вероятность, а соотношение шансов (10^6:1).

V. [Выступление в палате пэров]

P. S. Laplace (1814), *Archives parlementaires 1787 – 1860.* Paris, 1868, pp. 470 – 471

Господа, прошу палату снисходительно выслушать размышления, подсказанные мне отчетом комиссии о важном законе, которым мы занимаемся. Я полностью принимаю принципы докладчика о свободе экспорта зерна и думаю, что выгоды от этой торговли для нашей страны такие же, как разлив Нила для Египта. Это доказывают благоприятные результаты постановлений 1764 и 1774 гг. Следующее рассуждение дополнительно укрепит указанные принципы.

Известно, что в соответствии с законом природы, общим для всех видов животного мира, род людской непрестанно стремится становиться многочисленнее и превысить продовольственный уровень[1]. Но когда дело действительно дойдет до этого, люди станут несчастными, и никто не будет иметь ничего, кроме совершенно необходимого, а от малейшего неурожая погибнут миллионы, как это часто происходит в Китае и Индии. Важно поэтому для общего благополучия, чтобы продовольствия было всегда больше, чем строго необходимо населению. И это превосходно достигается торговлей зерном, которая пордкрепляет его производство и расширяет зажиточность в наиболее многочисленных слоях общества. Чтобы они смогли пережить бесплодные годы, достаточно пожертвовать избытком. По существу, население еще не столь многочисленно, но оно болеее активно и, главным образом, более счастливо, и в этом, если я не ошибаюсь, одно из главных преимуществ европейских обществ, и крайне полезно сохранить и даже усилить его свободным обменом сельскохозяйственной продукции.

Но особые обстоятельства заставляют ограничить это естественное право собственности. Обе палаты, специально созданные, чтобы поддерживать все права, обязаны ослабить, насколько позволяет благоразумие, предложенные препятствия к их осуществлению. Такова цель отчета вашей комиссии. Причины, которые приведены для отмены налога на экспорт зерна в законопроекте, представляются мне разумными. Но я не могу разделить ее мнение о праве, которое она предоставляет правительству прерывать экспорт по своему усмотрению. Мне представляется, что подобная возможность полностью уничтожит торговлю, которая больше, чем всё другое, нуждается в уверенности [в завтрашнем дне]. На память приходят потери у большого числа коммерсантов от непредвиденного перерыва, вызванного несколько лет назад воображаемыми опасениями. И это воспоминание без сомнения остановит спекулянтов, если закон не позаботится успокоить их на этот счет. Этот закон является лишь уступкой предрассудкам и распространенным опасениям. Разделение всех департаментов на большое число разрядов мне представляется следствием этой системы [?]. Быть может достаточно двух разрядов. Мы сможем лучше судить об этом, если, как это желательно, законопроект распределит департаменты, что, кроме того, целесообразно, ибо предоставит оптовикам уверенность, что их спекуляции не будут никак нарушены непредвиденными изменениями классификации. И необходимая безопасность будет достигнута, если в конце § 11 добавить, что опубликованное правительственное административное постановление ни в коем случае не будет изменено.

Таковы видоизменения, которые я предлагаю внести в представленный вам законопроект и которые я предложил как средство придти через какое-то время к неограниченной свободе торговли зерном, требуемой лучшими авторами политэкономии, преимущество которой [к тому же] подтверждено длительной практикой в Тоскане [область в Италии]. Ввиду развития просвещенности наши провинции уже перестали быть в этом отношении чуждыми друг другу, и будем надеяться, что вскоре то же произойдет со всеми народами Европы.

Палата постановила опубликовать выступление графа Лапласа.

Примечание

1. Лапласу было бы трудно комментировать свое утверждение с точки зрения Ветхого завета (Бытие 1:28): “Плодитесь и размножайтесь, и наполняйте землю ...” Впрочем, религией он, кажется, смолоду не интересовался.

VI. О составлении кадастра

Laplace P. S. (выступление 1817 г., 1868), Sur l’exécution du cadastre. OC, t. 14. Paris, 1912, pp. 372 – 374

Господа, нижеследующие соображения о составлении кадастра специально относятся к правительству, но мне показалось, что работы, расходы по которым достигают 100 млн, заслуживают привлечения на несколько минут внимания Палаты [пэров] и я думаю, что слова, произнесенные с этой трибуны, будут лучше услышаны.

Я совсем не рассматриваю, можно ли достаточно точно и притом быстрее, чем при помощи кадастра, обеспечить равное [правильное] распределение поземельного налога. [Но] кадастр хорош сам по себе и он слишком продвинут, чтобы забросить его и я хочу здесь только указать подходящие меры для его улучшения.

Его топографическая [геодезическая] часть такова, что требует наибольшего времени и наибольших расходов. Для составления точного плана [для точного картографирования] какого-либо королевства есть только один метод, которому, к сожалению, не следовали при составлении кадастра. Он состоит в том, чтобы вынести в натуру две длинные взаимо перпендикулярные линии, направленные на север и юг и на восток и запад. [Далее] всё измеряемое пространство покрывают сетью больших треугольников, привязанных к этим линиям, делят каждый из них на вторичные и т. д. и таким образом доходят до межевания коммун[1]. Тем самым местные измерения ограничиваются по своим расстояниям [масштабам] описывающими их треугольниками, и небрежности землемеров выявляются и исправляются. В результате система этих действий оказывается подходящей в своих деталях и совершенной в целом.

Для составления такой системы Франция имеет все средства, которые можно только пожелать: ученых, наиболее способных руководить этим, и корпусом весьма опытных инженеров-географов, которые выполнят подобный вид работ наилучшим образом и к которому можно присоединить офицеров артиллерии и инженерных войск. Кадастр предоставит им [офицерам] наиболее благоприятную возможность тренироваться в действиях, которые они обязаны выполнять во время войны. И именно таким образом Пруссия продолжает по ту сторону Рейна топографические [геодезические] работы наших инженеров; она не сможет [не] следовать лучшим образцам.

Одна из основных линий, о которых я только что говорил, уже пересекает Францию от Дюнкерка до Перпиньяна; начался вынос в натуру перпендикуляра, направленного от Страсбурга к Бресту. Первая из этих линий, прокладываемых с исключительной точностью, продолжена за Пиренеи до острова Форментера в Средиземном море. Благодаря просвещенным заботам Министра внутренних дел о развитии наук, эта линия пойдет [и] на север до Ярмута [Англия]. Полковник Мадж[2], который, применяя описанный мной метод, составляет планы [карты] Англии и Шотландии столь же умело как и старательно, должен объединиться с французскими учеными, чтобы продолжать наш меридиан [наше градусное измерение]. Эта громадная дуга [меридиана] фактически простирается примерно на 1/7 часть расстояния от полюса до экватора. Широты определяются в ее крайних и во многих промежуточных точках и также измеряются длины секундного маятника. Это проливает живой свет на фигуру Земли и на неравенство длин ее градусов [меридиана] и силы тяжести. [Вся] эта операция, замечательнейшая в своем роде из всех, предпринятых до сих пор, является основой десятичной метрической системы мер и весов, чье всеобщее утверждение принесло бы государствам громадную пользу.

Являясь удачным дополнением нашей восхитительной системы счисления и, подобно ей, в равной мере соответствуя всем народам, она была только что принята в королевстве Нидерландов.

Во Франции иногда даже раздосаданные властями [новаторы] всё же успешно борются с препятствиями, которые сила (puissance) привычек противопоставляет введению даже самого полезного. Надеемся, что вскоре они преодолеют эти препятствия. Тогда их поддержит эта сила (puissance), которая, соединенная со здравым смыслом, обеспечит новым гуманным установлениям продолжительность навечно.

Мне хотелось бы, чтобы министры действительно пожелали принять во внимание предложенный мной план. Его можно приспособить к уже выполненной части кадастра и следовать ему не задерживая работ и не повышая расходов. Быть может в нашем нынешнем состоянии мира окажется даже возможным использовать на этих работах, в которых, к сожалению, участвуют иностранцы, большое число инженеров-географов, что приведет к более быстрому и менее дорогому их исполнению. И комиссия, выбранная правительством для разъяснений по этому поводу, соберет необходимые сведения. Она исследует, в какой мере обоснованы упреки в пренебрежении и неспособности, высказанные в адрес многих работников кадастра и укажет пути его ускоренного завершения.

Составление великой Карты Франции, даст пример, которому другие нации поторопятся следовать. Не станем же хуже них, не отступим ни на шаг, когда они двинутся вперед. Сохраним славу наших наук и изобразительных искусств. Она сладка и умиротворяюща и имеет ценное свойство возрастать не уменьшая ни иноземной славы, ни интересов каких-либо народов и доставляет новые наслаждения.

Примечания

1. Подобная практика была оставлена быть может уже через одно или два десятилетия; Гаусс, во всяком случае, ни о каких перпендикулярных линиях не упоминал. Для картографирования страны в целом действительно необходима единая система координат, которая должна быть основана на *исходных геодезических датах* (БСЭ, 3-е изд., т. 10).

2. William Mudge (1762 – 1820).

VII. О запрете лотереи

P. S. Laplace (выступление 1819 г., 1868), Sur la suppression de la loterie. OC, t. 14. Paris, 1912, pp. 375 – 378

Господа, состояние финансов позволяет сократить налоги. Законопроект, который представлен нам, сокращает прямой налог и вычеты из заработной платы, но являются ли эти меры самыми полезными? Имею честь представить палате [пэров] соображения по этому поводу. […]

Вспомним то, что тысячу раз говорилось о безнравственности этой игры [лотереи] и о зле, которое она причиняет. Из всех игр она является той, где предприниматель получает наибольшую прибыль, а большинство игроков имеет меньше всего [шансов] удачи, так что ущерб, либо физический, либо моральный, намного больше, чем от других игр в общественных местах, которые едва терпимы во избежание бóльших зол. В этих играх банкомёт не изымает более 1/40 доли ставки, в лотерее же правительство забирает себе 1/3. Так, при игре на *извлечение* [угадывание одного номера из пяти] от 18 франков остается 15; деньги сжимаются на 2/3 и на половину при угадывании двух и трех номеров и намного ниже [больше?] при угадывании четырех и в этом физический ущерб от этой игры[1]. Но потеря денег, незаметная для богатых, весьма ощутима для наибольшей части тех, кто участвует в лотерее, и в этом их моральный ущерб.

Бедные, возбужденные желанием лучшей судьбы, соблазненные ожиданием, несбыточность которого они не в силах оценить, подвергают риску этой игры свое необходимое. Они цепляются за комбинации, которые обещают им большую выгоду, хотя сразу же видно насколько они неблагоприятны. Таким образом, всё способствует тому, чтобы эта игра стала невыгодной и всё за то, чтобы мы приняли закон, запрещающий ее. Мы рукоплескали бы тому, кто для отвлечения присутствующих от игры страстно опишет преступления, нищету, банкротства и самоубийства, которые она порождает. Поспешим же упразднить игру, столь противоречащую нравственности и настолько невыгодную игрокам, что полиция не допускает ее в некоторых местах, где приходится терпеть [другие] игры.

Говорят, что к нам проникают билеты иностранных лотерей. Надзор государства может, однако, пресечь это или по крайней мере сделать их настолько редкими, что они никак не достигнут населения внутренней части королевства. Можно утверждать, что при некоторой бдительности ставки [их общая сумма] в этих лотереях не достигнет 1/50 части ставок нынешней лотереи Франции.

Говорят также, что этот налог доброволен. Без сомнения это так для каждого в отдельности, но для совокупности людей он необходим [он существует] так же, как необходимы женитьбы, рождения и все переменные действия[2], притом ежегодно почти постоянно если они в больших числах [если речь идет о больших числах]; таким образом, доход от лотереи по меньшей мере столь же устойчив, как продукция сельского хозяйства.

Это тот налог, который требует наибольших издержек по его взиманию. Он наверняка отягощает население намного более, чем дает государству, потому что отданное в качестве ставок не возвращается и к сотой доле игроков, а огласка, которую стараются придать выигрышам от лотереи, становится новой причиной возбуждения этой пагубной игрой. И, хотя лотерея ежегодно приносит в общественную казну лишь 10 – 12 млн, налог, который она накладывает на большую, притом беднейшую часть населения, доходит до 40 или 50 млн.

Сколько ложных рассуждений, сколько заблуждений и предрассудков распускает лотерея! Она развращает и дух, и нравы народа. А между тем именно на его нравственное воспитание должен законодатель в основном обращать свой взгляд. Он обязан пожертвовать этой великой цели мелкие налоговые соображения. Но я утверждаю, что эта жертва никак не сократит наши денежные средства, потому что здесь, как и во всех вещах, что хорошо само по себе, то в то же время и выгодно. Народ, став более предприимчивым и зажиточным, будет легче платить налоги и больше потреблять, и налоговая служба с лихвой возместит потери от запрета лотереи этим косвенным вкладом.

Благодать благородному пэру, основателю сберегательной кассы![3]

Этот институт, столь благоприятный нравственности и предприимчивости, уменьшает прибыли лотереи и уже в этом его польза. Пусть правительство поощряет подобные учреждения, с чьей помощью, немного жертвуя своими доходами, он [отец семейства] обеспечивает существование самого себя и своей семьи на то время, когда больше нельзя будет удовлетворять свои потребности. Насколько игра лотереи безнравственна, настолько эти учреждения благотворны нравам, содействуя двум самым умиротворяющим наклонностям природы. Но надо щадить их при всех превратностях общественного достояния, потому что ожидания, которые они предоставляют, относятся к отдаленному будущему и они не могут процветать кроме как находясь в тени всех тревог о продолжительности своего существования. Это [эта та возможность], которую удачная форма нашего строя позволяет дать им.

Поощрим же также объединения, чьи члены взаимно обеспечивают свое имущество от случайностей и пропорционально несут бремя этой гарантии, подражая обществу, которое можно по существу рассматривать как большое объединение взаимного обеспечения[4]. Однако, учреждения, основанные на заблуждениях, невежестве и жадности, должны быть строго запрещены. Никакие выгоды не могут уравновесить приносимое ими зло. Крайне жалко, что запрет лотереи не поставлен на первое место в списке сокращений налога в качестве дара, приносимого нравственности[5].

Примечания

1. Изложение непонятно: из каких именно сумм изымается, например, 1/3? Изымается ли в качестве налога? И кому достаются оставшиеся 2/3?

2. Вряд ли следовало упоминать рождения в контексте добровольных явлений.

3. В редакционном примечании основателем назван герцог Ларошфуко. Точнее, герцог F.-A.-F. LaRochefoucauld, 1747 – 1827, открывший сберегательную кассу в провинции. В Париже первая подобная касса открылась в 1818 г. (*Grand Dict. Universel Larousse*, t. 3, p. 92; первый том этого источника вышел в 1865 г.).

4. Эту же мысль Лаплас высказал раннее (1814/1999, с. 854, правый столбец).

5. Лотерея была запрещена только в 1829 г., да и то лишь в некоторых департаментах, и окончательно в 1836 г., однако через какое-то время вновь разрешена (*La Grande Enc*., t. 22, pp. 584 – 585, статья Loterie). Пуассон (1837, с. 68) упомянул, что лотерея была “к счастью недавно упразднена”.

VIII. О том, как присяжные принимают решения

Laplace P. S. (выступление 1821 г., 1868), Sur la manière dont se forme la décision du jury. OC, t. 14. Paris, 1912, pp. 379 – 381

Господа, тот способ, при помощи которого присяжные принимают решения, является без всякого сомнения наиболее важным элементом в установленном порядке их работы. Существующий способ серьезно мешает [исполнению правосудия] и с момента своего установления он поражал воображение здравых умов. Когда 5 из 12 заявляют, что [рассматриваемое] событие не установлено, закон разумно указывает на сомнительность дела и стремится рассеять его вмешательством судей ассизов[1]. Закон никак не усматривает, что простое большинство семи голосов из 12 достаточно для осуждения и хочет подтвердить причины голосования большинства решением судей.

Это справедливо и соответствует учению о вероятностях, которое по сути является лишь здравым смыслом, сведенным к исчислению, заимствуя у него силу для вывода следствий, которые он не смог бы извлечь сам по себе[2]. Но если решение судей принимается большинством в 3 голоса из пяти, оно не только не подтверждает причину осуждения, но ставит его под сомнение. Разве не очевидно, что, поскольку осуждение уже было признано недостаточно обоснованным, это решение еще больше ослабляет его основательность? И не окажется ли осуждение обвиняемого противным здравому смыслу и человечности?

Более того. Известно, что иногда присяжные, не уверенные в виновности подсудимого и желая передать решение в ассизы, произвольным образом составляют большинство семи голосов против пяти. В таких случаях решение присяжных фиктивно и должно почитаться ничтожным. А 5 судей ассизов рассматривают дело и если 3 высказываются в пользу обвинения и 2 – против, подсудимый осуждается. Я не знаю, найдется ли в юридических летописях каких-либо народов другой пример осуждения, [фактически] вынесенного меньшинством голосов. Важно поэтому, чтобы закон, который существенно влияет на жизнь людей, срочно устранил столь серьезные препятствия [правосудию].

Но говорят, что законопроект, представленный вам по этому поводу, извращает суть института присяжных, поскольку над большинством их голосов будет поставлено большинство судей ассизов. Я отвечаю, что это делается лишь в интересах подсудимых в случаях, когда в решении судей стремятся отыскать новые причины, чтобы поддержать решение присяжных, которое закон признает недостаточным для осуждения. И эта недостаточность в соответствии с законопроектом отменяет, а не подтверждает и даже не ослабляет решение присяжных.

Говорят еще, что произвольное распределение семи присяжных против пяти стало более частым, потому что они нисколько не сдерживаются опасением видеть подсудимого осужденным меньшинством [?] судей ассиза. Мы не знаем соотношения числа дел, при котором указанное большинство присяжных 7:5 является просто их соглашением, к общему числу дел, решенных тем же большинством. У нас нет подобных наблюдений, без которых числа будут либо преувеличиваться, либо преуменьшаться в интересах желаемых результатов. Еще меньше нам известно, как скажется [принятие] законопроекта на этом соотношении.

Но нам известно наверняка, что следует срочно прекратить одно из наибольших возможных злоупотреблений, а именно осуждение обвиняемого меньшинством голосов. Законодатель должен рассчитывать на чувство ответственности присяжных, выносящих решения о жизни себе подобных[3]. Многие из них говорили мне, что при рассмотрении подобных дел им по крайней мере приходилось углубленно исследовать виновность подсудимого. Даже когда закон нисколько не предусматривает вмешательства ассизов, не следует опасаться, что присяжные никак не обсуждают со всем необходимым тщанием те вопросы, которые поставлены перед ними.

Для принуждения присяжных к этому у многих народов требуется, чтобы они совещались до тех пор, пока не придут к единому решению. Но тут возникает новое препятствие, проявляющееся ввиду упрямства присяжных, их темперамента, привычек и тысячи других причин, посторонних по отношению к принимаемому решению и иногда столь вредно влияющие на него, что преобладающим оказывается мнение меньшинства.

Скажем, однако, что всё в нашем мире имеет и отрицательные, и положительные стороны и что трудности правильного выбора и введения полезных новшеств состоят в их верной оценке. Не будем изменять наших законов без особой осмотрительности, но срочно примем улучшения, которые очевидно указываются здравым смыслом и гуманностью.

Возражают, наконец, что принятие законопроекта закрепит вмешательство судей и, видимо, противно институту присяжных. Однако, улучшая существующий закон, законодатель никогда не запрещает ни возможности его пересмотра в целом, ни внесения таких изменений, которые опыт и углубленное исследование сочтут благоприятным. И особенно в важных законопроектах о присяжных это исследование потребует длительного и здравого размышления. Следует поэтому видеть в представленном вам законопроекте лишь срочную поправку серьезного злоупотребления, которое может ежедневно подрывать невиновность. И именно с этой точки зрения я вот уже более четырех лет назад предлагал этот самый проект и сейчас призываю принять его сегодня же.

Примечания

1. Суды ассизов, как мы поняли, существовали в каждом департаменте и по крайней мере при рассмотрении некоторых дел в их работе участвовали их собственные присяжные.

2. Лаплас таким образом истолковал свое известное изречение (которое, как и данное, могло бы определить всю тогдашнюю математику в целом): "Теория вероятностей есть в сущности ни что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению" (1814/1999, с. 863, правый столбец).

3. Рассчитывать, конечно же, следовало только после изучения соответствующих статистических данных, если они только имелись.

Библиография

Бернулли Д., Bernoulli D. (1738, латинск.), Опыт новой теории измерения жребия. В книге *Теория потребительского поведения и спроса*. СПб, 1999, с. 11 – 27.

--- (1766), Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole etc. *Werke*, Bd. 2. Basel, 1982, pp. 235 – 267.

Блажко С. Н. (1947), *Курс общей астрономии.* М. – Л.

Гаусс К. Ф., Gauss C. F. (1809, латинск.), Теория движения ... В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1811, латинск.), Исследование об эллиптических элементах Паллады ... Там же, с. 111 – 120.

--- (1822, нем.), Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии. Там же, с. 129 – 133.

--- (1823, латинск.), Теория комбинации наблюдений ..., часть 1-я. Там же, с. 17 – 36.

--- (1957), *Способ наименьших квадратов*. Ред. Г. В. Багратуни. М.

Гнеденко Б. В., Шейнин О. Б. (1978), Теория вероятностей. Глава в книге *Математика XIX века*, т. 1. Ред., А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М., с. 184 – 240.

Курдюмова А. И. (1972), Гамма-функция и приближенные методы вычисления определенных интегралов у лапласа. *Тр. Моск. инст. хим. маш.*, № 45, с. 122 – 136.

Лаплас П. С., Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. OC, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.

--- (1796, франц.), *Изложение системы мира*. СПб, 1861. Франц. изд. 1835 г. перепечатано в OC, t. 6. Paris, 1884.

--- (1798; 1798; год 11, прим. 1804; 1805; 1825), *Traité de Mécanique Céleste*, tt. 1 – 5. OC, tt. 1 – 5. Paris, 1878 – 1882.

--- (1810), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et leur application aux probabilités. OC, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345.

--- (1812), *Théorie analytique des probabilités.* OC, t. 7, NNo. 1 – 2. Paris, 1886.

--- (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей.* Русск. перевод 1908 г. перепечатан в книге Прохоров Ю. В., ред (1999), *Вероятность и математическая статистики. Энциклопедия.* М., с. 834 – 863.

--- (1818), *Théor. anal. prob.*, Suppl. 2. OC, t. 7, No. 2, pp. 531 – 580.

--- (прим. 1819), *Théor. anal. prob.*, Suppl. 3. Там же, с. 581 – 616.

Линник Ю. В. (1962), *Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений*. М. Первое изд. 1958 г.

Субботин М. Ф. (1956), Астрономические и геодезические работы Гаусса. В мемориальном сборнике *Гаусс*. М., с. 243 – 310.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1976), Laplace's work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 16, pp. 137 – 187. Частичн. перевод в *Историко-математич. исследованиях* (ИМИ), вып. 22, 1977, с. 212 – 224.

--- (1977a), Laplace's theory of errors. Там же, т. 17, с. 1 – 61.

--- (1977b), Early history of the theory of probability. Там же, с. 201 – 259.

---- (1991), Понятие случайности от Аристотеля до Пуанкаре. ИМИ, вып. 1 (36), №1, с. 85 – 105.

--- (1999), О работах В. Я. Буняковского по теории вероятностей. ИМИ, вып. 4 (39), с. 57 – 81.

--- (2005), *Теория вероятностей. исторический очерк*. Берлин.

--- (2006), Markov's work on the treatment of observations. *Historia scientiarum*, vol. 16, pp. 80 – 95.

Шейнин О. Б., Майстров Л. Е. (1972), Теория вероятностей. Глава в книге *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия*, т. 3. ред. А. П. Юшкович. М., с. 126 – 152.

Bienaymé I. J. (1853), Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité … *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 37, pp. 309 – 324.

Cotes, R. (1722), Aestimatio errorum in mixta mathesis etc. *Opera misc.* London, 1768, pp. 10 – 58.

D'Alembert J. Le Rond (1767), Doutes et questions sur le calcul des probabilités. *Mélanges de litterature, d'histoire et de philosophie*, t. 5. Amsterdam, pp. 239 – 264.

Daston Lorraine J. (1979), D'Alembert's critique of probability theory. *Hist. Math.*, vol. 6, pp. 259 – 279.

David H. A. (2001), First (?) occurrence of common terms in statistics and probability. Составлено из статей 1995 и 1998 гг. В книге автора и A. W. F. Edwards, *Annotated Readings in the History of Statistics.* New York, pp. 209 – 246.

De Bruijn N. G. (1958), *Asymptotic Methods in Analysis*. Amsterdam.

Euler L. (1749), Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. *Opera omnia*, ser. 2, t. 25. Zürich, 1960, pp. 45 – 157.

Fourier J. B. J. (1826), Sur les résultats moyens déduits d' un grand nombre d'observations. *Œuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.

Gowing R. (1983), *R. Cotes – Natural Philosopher*. Cambridge.

Hald A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Mayer T. (1759), Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe. *Kosmogr. Nachr. u. Samml.* für 1748, pp. 52 – 183.

Molina E. C. (1930), The theory of probability: some comments on Laplace's Théorie Analytique. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, pp. 369 – 392.

Poisson S. D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements* etc. Paris, 2003.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Симон Дени Пуассон

Предисловие переводчика

Мы приводим переводы рефератов Пуассона работ Лапласа, его речи на похоронах своего предшественника, обеих частей мемуара о средних результатах наблюдения и забытой заметки на ту же тему. В качестве приложения помещен перевод обзорной статьи Б. Брю 1981 г., которая описывает жизнь и творчество Пуассона включая его кипучую деятельность в области просвещения. Заметим, что тот же автор (2001) опубликовал сжатую заметку на ту же тему.

Свои труды по теории вероятностей Пуассон начал с указанных (малоизвестных) рефератов, которые, впрочем, были еще слабоваты. Но кто кроме него смог бы в то время, т. е. в 1811 – 1812 гг., более основательно описать работы Лапласа? Разве лишь Фурье.

Речь Пуассона на похоронах Лапласа заслуживает внимания, хотя о теории вероятностей он сказал мало и вообще не упомянул ни общественной, ни научно-популярной деятельности покойного.

К работам Брю мы добавим, во-первых, что Пуассон оказал сильное влияние на Чебышева, и, во-вторых, что с его трудов началось изучение устойчивости статистических рядов, – основной темы исследований континентального направления статистики (1870-е годы и далее). В своем трактате 1837 г. Пуассон рассматривал устойчивость отношения числа осужденных к числу обвиняемых и первым указал на подобные же исследования в только-только зарождавшейся медицинской статистике, см об этом нашу работу [82] в списке литературы к статье Брю и заметку (1981).

И вот слова Чебышева (1846/1947, с. 14):

> *Это основное предложение теории вероятностей, заключающее как частный случай закон Якоба Бернулли, было выведено г. Пуассоном из формулы, которую он получил, вычисляя по приближению величину одного довольно сложного определенного интеграла ... Однако, как ни остроумен способ, употребленный знаменитым геометром, он не доставляет предела погрешности, которую допускает этот приближенный анализ, и вследствие такой неизвестности величины погрешности доказательство не имеет надлежащей строгости. Я покажу здесь, как можно доказать ...*

I. П. С. Лаплас, Об аппроксимации формул, которые являются функциями очень больших чисел и об их приложении к вероятностям

Laplace P. S. (1810), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leurs application aux probabilités. OC, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345. Реферат С. Д. Пуассона: *Nouv. Bull des Sciences, Soc. philomatique de Paris*, t. 2, No. 35, 1811, pp. 132 – 136

Исследования, содержащиеся в этом мемуаре, дополняют те, которые месье Лаплас уже опубликовал по этой же теме в *Мемуарах* Парижской академии наук за годы 1778, 1782 и 1783 [1781; 1785; 1786]. Решения задач о вероятностях часто приводят к формулам, в которые требуется подставлять очень большие числа, так что численное вычисление по ним становится невозможным. И хотя аналитические формулы содержат общие решения предложенных задач, в каждом отдельном случае приходится останавливаться перед выводом численного значения вероятности. Следовало поэтому придумать метод для применения этих формул и это-то месье Лаплас и сделал в своих предыдущих работах. Его мемуар 1782 г. [1785] содержит общий метод для сведения функций больших чисел в ряды, притом сходящиеся тем лучше, чем эти числа больше, так что эти ряды тем удобнее, чем они необходимее. Но в некоторых особых задачах оказывается, что искомая вероятность лишь частично равна функции больших чисел, другая же ее часть не зависит от значения этой функции, что привело к новым затруднениям, преодоление которых стало основной целью данного мемуара месье Лапласа.

В этом реферате мы ограничиваемся описанием наиболее примечательных результатов автора. Что же касается исключительно тонкого анализа, который привел его к ним, мы [здесь] не в состоянии дать о них удовлетворительное представление и отсылаем читателей к самому мемуару, который выходит в свет в ближайшем томе Института [Франции][1].

Автор вначале определяет вероятность сумме наклонностей орбит некоторого числа планет или комет относительно эклиптики находиться внутри заданных границ, предположив, что все наклонности от нуля до двух прямых равновозможны. Его первое решение совпадает с тем, которое он уже представил в мемуаре 1778 г. [1781] и оно приводит к следующему выражению для искомой вероятности:

$$[1/(n!h^n)]\ [(s+e_2)^n - n\,(s+e_2-h)^n + C_n^2\,(s+e_2-2h)^n -$$

$$C_n^3\,(s+e_2-3h)^n + \ldots - (s-e_1)^n + n\,(s-e_1-h)^n - C_n^2\,(s-e_1-2h)^n +$$

$$C_n^3\,(s-e_1-3h)^n - \ldots].$$

В этой формуле $(s + e_2)$ и $(s - e_1)$ – заданные границы, h представляет полуокружность, n – число наклонностей. Каждый из обоих рядов, которые составляют эту вероятность, должен закончиться членом, присоединенным к величине, возводимой в степень n и перестающей быть положительной, так что все члены, в которых эта величина отрицательна, должны быть отброшены. Таким образом, это выражение всегда остается конечным при любых $(s + e_2)$ и $(s - e_1)$. Месье Лаплас применяет эти формулы к планетам, обнаруженным до сего времени; их 10 [вместе с четырьмя астероидами] исключая Землю. Сумма их наклонностей к эклиптике в начале 1801 г. была равна $90^G.4187$ [все подобные числа указаны не в градусах, а в градах; 90° = 100^G]. Если принять h

$= 200^G$, $s + e_2 = 91^G.4187$, $s - e_1 = 0$, $n = 10$, то предыдущая формула укажет вероятность, что эта сумма будет заключена между 0 и $91^G.4187$ в предположении, что все наклонности равновозможны и это позволит нам узнать степень правдоподобия указанного предположения. Формула таким образом приводит к

$$(1/10!)\ (91.4187/200)^{10} = 1.0972/10^{10},$$

а вероятность противоположного события равна $1 - 1.0972/10^{10}$ и, поскольку она не отличается существенно от единицы, которая представляет достоверность, следует заключить, что предположение о равновозможности наклонностей полностью неправдоподобно. Итак, некая неизвестная причина с самого начала предопределила близость орбит планет к эклиптике, и нелепо объяснять малость их наклонностей случайностью.

Видно, что численное значение, данное этой формулой, легко всякий раз вычислить если n не очень велико. Но если желательно применить ее ко всем наблюденным до сих пор кометам и предпринять вычисления, то n возрастет до 97 и работа станет невозможной, а формула бесполезной. Месье Лаплас заново рассмотрел задачу с новой точки зрения и привел второе решение, при котором искомая вероятность выражается следующим рядом:

$$(2/\sqrt{\pi})[\int dx \exp(-x^2) - (1/20n) \exp(-x^2)\ (3x - 2x^3) + \ldots].$$

Здесь π – […], e – […], n всегда представляет число наклонностей. Пределы средней наклонности, т. е. их суммы, деленной на n, предполагаются равными $(1/2)K \pm rK/(2\sqrt{n})$, K это прямой угол, $x^2 = (3/2)r^2$ и нижний предел интеграла равен x. При очень больших n, как в случае комет, когда $n = 97$, ряд весьма быстро сходится. Средняя наклонность их орбит к плоскости эклиптики равна $51^G.87663$.

[Пуассон повторяет вывод Лапласа:] последняя формула выражает вероятность, что эта средняя наклонность должна находиться в границах $50^G \pm 1^G.87663$. Вычисление приводит к вероятности, равной 0.4913, почти равной ½. Следовательно, вероятность, что эта же наклонность окажется вне указанных границ, также равна ½. Получив этот результат, мы уже не будем иметь никакого повода полагать, что некая исходная причина повлияла на наклонности комет и предположение о равной легкости их наклонностей никак не будет неправдоподобным.

Сравнивая оба решения одной и той же задачи и добиваясь совпадения их результатов, месье Лаплас вывел примечательное уравнение

$$[1/(n!\ 2^n)]\ [(n + r\sqrt{n})^n - n(n + r\sqrt{n} - 2)^n + C_n^2\,(n + r\sqrt{n} - 4)^n -$$

$$C_n^3\,(n + r\sqrt{n} - 6)^n + \ldots] = (1/2) + \sqrt{3/2\pi} \int dr \exp[-(3/2)r^2].$$

Здесь предполагается, что n – очень большое целое число, а формула является приближенной, поскольку она пренебрегает членами порядка (1/*n*). Значение *r* может быть каким угодно положительным и отрицательным; нижний предел интеграла равен этому значению. А ряд в левой части равенства, как и в предыдущем случае, должен быть остановлен на члене, присоединенном к величине в степени *n*, которая перестает быть положительной, так что все члены, в которых она отрицательна, должны быть отброшены.

Это уравнение можно дифференцировать или интегрировать сколько угодно раз относительно *r* и таким образом образовывать ряд других уравнений, которые, как и предыдущее, будут иметь место лишь для очень больших целых чисел *n*.

Рассуждение, которое привело месье Лапласа к этому уравнению, было косвенным и желательно отыскать прямой метод его вывода. Месье Лаплас привел многое, чего мы к сожалению не можем здесь указать. При описании одного из своих методов он заметил, что левая часть этого уравнения является функцией *n* и *r*, которая по своей форме должна удовлетворять двум разностным дифференциальным уравнениям. Приближенно интегрируя их, он вновь определил известное значение этой функции.

Другой [его] метод основан на взаимном переходе от комплексных результатов к действительным, который автор уже привел в мемуаре [1809]. Он, говорит месье Лаплас,

> *Аналогичен переходу от положительных целых чисел к отрицательным и дробным, при помощи которого геометры по индукции обнаружили много важных теорем. Применяя его, как и тот, осмотрительно, приходишь к плодотворному средству изобретения, что всё более и более указывает на общность анализа.*

Предыдущая задача о наклонностях орбит совпадает с той, в которой предлагается определить вероятность сумме ошибок некоторого числа *n* наблюдений находиться в заданных границах в предположении, что все ошибки от нуля до некоторого значения *h* равновозможны. Таким образом, формулы, которые мы только что привели, сразу же применимы к определению этой вероятности. Но месье Лаплас кроме того рассмотрел общую задачу, в которой ошибки уже не равновозможны и закон их легкости выражается некоторой заданной функцией. Какова бы она ни была, в случае большого числа наблюдений он обнаружил, что вероятность средней ошибки, т. е. суммы ошибок, деленной на их число, должна находиться в границах, расстояние между которыми сокращается по мере возрастания числа наблюдений. Таким образом, средняя ошибка непрестанно стремится к определенному члену [числу], общему для обеих границ. Если закон легкости ошибок представлен некоторой кривой, то это число в общем окажется абсциссой, которая соответствует ординате ее центра тяжести и нулевой ошибке. В случае, если положительные и отрицательные ошибки равновозможны, указанная кривая будет симметрична относительно оси ординат и абсцисса ее центра тяжести окажется равной нулю.

Таким образом, средняя ошибка будет стремиться к нулю и, следовательно, средний результат, выведенный из многих наблюдений, в то же время будет стремиться к истине. При умножении числа наблюдений вероятность, что этот средний результат будет отличаться от истины в избытке и в недостатке не более, чем на сколь угодно малую величину, будет неограниченно повышаться. И эта вероятность, значение которой месье Лаплас определил для любого числа наблюдений, всё более и более приблизится к достоверности и наконец совпадет с ней при бесконечном числе наблюдений.

Примечания

1. Институт Франции (Institut de France) был учрежден в 1795 г. и Парижская академия наук стала его составной частью, его классом физических и математических наук. Институт просуществовал до 1814 г.

II. П. С. Лаплас, О проиводящих функциях, определенных интегралах и об их применении к вероятностям

Laplace P. S. Sur les fonctions génératrices, les intégrales définies, et leur application aux probabilités. Реферат С. Д. Пуассона: *Nouv. Bull. des Sciences, Soc. philomatique de Paris*, t. 2, No. 49, 1811, pp. 360 – 364

Предисловие переводчика

По поводу первых двух из трех задач, о которых сообщает Пуассон, см. Шейнин (1976, с. 145 и 149 – 151), о третьей – Шейнин (1977, § 5.1). Задачу № 2 Лаплас рассмотрел и в своей *Аналитической теории вероятностей*, в гл. 3-й кн. 2, а задачу № 3 – там же, в §§ 20 и 21 гл. 4-й, которые переведены в этом сборнике. Задача № 2, которая восходит к Даниилу Бернулли и выводы из обобщения которой сам Лаплас поэтически описал в своем *Опыте философии*, можно считать началом истории случайных процессов. При упомянутом Пуассоном преобразовании уравнения с частными разностями в дифференциальное оно будто бы оказалось “беспощадно изуродованным” (Тодхантер 1865, § 999); Хальд (1998, с. 339), однако, установил, что Тодхантер не понял намеков Лапласа, которые свидетельствовали об обратном. Несомненно, впрочем, что фактически определяется не некоторое количество шаров, а его математическое ожидание.

Задачу № 3 Пуассон описал не совсем ясно, отнеся ее к уравниванию прямых наблюдений (с одним неизвестным), тогда как МНКв в основном касается общего случая уравнивания наблюдений.

Автор прежде всего излагает некоторые общие соображения о теории производящих функций и теории функций больших чисел и замечает, что они являются взаимообратными ветвями одного и того же исчисления, которое он назвал *исчислением производящих функций*. […] После этих общих соображений месье Лаплас занялся исследованием значений многих определенных интегралов. […]

Мемуар, о котором мы даем отчет, содержит решение трех задач о вероятностях. Я приведу, следуя самому мемуару, их формулировку и опишу, насколько [это здесь] возможно, анализ, который послужил для их решения.

[**Первая задача.**] *Рассмотрим двух одинаково сноровистых игроков, A и B. Перед игрой B имеет r жетонов, а A – бесконечное количество их; после каждой проигранной партии он отдает 1 жетон игроку A и получает от него жетон после каждой выигранной. Пусть r – большое число. Игра заканчивается после того, как A выиграет у B все его жетоны. Требуется определить число партий, после которых можно будет ставить 1, 2 или 3 к одному, что A уже победил.*

Прежде всего доказывается, что вероятность окончания игры равна единице, т. е. достоверности. Далее отыскивается вероятность, что она закончится за x партий или еще раньше. Эта вероятность является функцией x и r и определяется уравнением второго порядка с частными разностями, которое составлено сразу же после формулирования задачи. Месье Лаплас выражает эту вероятность определенным интегралом, который при очень больших x и r преобразуется в раннее рассмотренный интеграл. Получив таким образом выражение вероятности, его приравнивают 1/2, чтобы определить число партий, после которых можно держать пари на равных, что игра уже закончена. При решении полученного уравнения с этим неизвестным числом и полагая, что $r = 100$, месье Лаплас находит, что это пари неблагоприятно, если допустить, что A выигрывает в 23 780 партиях, но становится благоприятным, если принять это число равным 23 781. Вообще, если приравнять полученное выражение вероятности дроби $m/(m + n)$, можно определить подобное число партий если ставить m против n.

Вторая задача. *Рассмотрим две урны, A и B, содержащие по n шаров каждая, причем из общего числа 2n шаров белых столько же, сколько черных. Представим себе, что одновременно перекладывают по одному шару из одной урны в другую и обратно и что это повторяется некоторое число r раз, притом каждый раз шары в урнах перемешиваются. Требуется определить вероятность, что после этого числа перестановок в урне A окажется x белых шаров.*

Эта вероятность является функцией x и r. Тонко обсудив все имеющие место случаи, месье Лаплас нашел, что она определяется уравнением второго порядка с частными разностями, которое при очень больших x преобразуется в дифференциальное уравнение с частными производными. Это уравнение, хотя оно действительно второго порядка, относится к тому виду, полный интеграл которого содержит лишь одну произвольную функцию.

Автор ограничился рассмотрением случая очень большого x, т. е. указанным дифференциальным уравнением, и заметил, что его задача представляет первый пример приложения таких уравнений в исчислении вероятностей. При помощи одного определенного интеграла он установил полный интеграл этого уравнения в конечной форме. Осталось указать содержащуюся в нем произвольную функцию в соответствии с начальным распределением шаров в урнах, которое предполагается известным. Это потребовало примечательного разложения интеграла, подробности которого здесь описать невозможно.

Последняя задача, решенная в этом мемуаре, относится к среднему, которое следует выбрать из результатов наблюдений. Значение этого вопроса главным образом для астрономических вычислений известно. Здесь он впервые разрешен прямым и общим способом в единственном предположении очень большого числа наблюдений. Обычный метод состоит в выборе среднего арифметического, что приводит сумму ошибок к нулю. В одном из своих предшествующих мемуаров месье Лаплас (1810) [в этом сборнике] определил вероятность этого результата, каков бы ни был закон легкости ошибок, теперь же он, однако, рассматривает свою задачу в более общем виде. Он приравнивает нулю сумму ошибок, умноженных на неопределенные множители и вычисляет их так, чтобы ошибка найденного таким образом результата была наименьшей из возможных.

При помощи своего анализа автор приходит к результату, который дается *методом наименьших квадратов ошибок*, уже применяемый многими геометрами, но преимущества которого никто еще не доказал. Теперь же установлено, что этот метод обеспечивает *минимум* ошибок, которых можно опасаться в результате [вычислений]. Но он обладает еще и другим преимуществом, которое делает его предпочтительнее обычного метода. По существу, если в условиях одной и той же задачи сравнить результаты обоих методов и определить вероятность, что их ошибки содержатся внутри определенных границ, то, как доказал месье Лаплас, при одной и той же вероятности интервал между границами меньше при МНКв, и, обратно, если границы одни и те же, вероятность выше при использовании этого метода.

Наконец, автор закончил свой мемуар рассмотрением случая, при котором один-единственный результат должен быть определен по большому числу наблюдений различных классов и установил, что МНКв ошибок становится необходимым, чтобы принять среднее между наблюдениями этих различных классов.

III. П. С. Лаплас, Аналитическая теория вероятностей.

Laplace P. S. (1812), *Théorie analytique des probabilités*. OC, t. 7, No. 1 – 2. Paris, 1886. Реферат С. Д. Пуассона: *Nouv. Bull. des Sciences, Soc. philomatique de Paris*, t. 3, 1812, pp. 160 – 163

В этом сочинении месье Лаплас объединил мемуары, прежде опубликованные им по [исчислению] вероятностей, включая два вышедших в последнее время на ту же тему, отчет о которых мы привели в №№35 и 49 этого *Бюллетеня* [см. в этом сборнике]. В результате в свет вышел полный трактат о теории случаев, в котором можно найти однообразные и общие методы для решения вопросов, относящихся к этой теории и их приложению к наиболее важным задачам. Мы коснемся хода [рассуждений] автора и последовательности вопросов, которые он рассмотрел.

Труд месье Лапласа разделен на две части. Первая включает изложение аналитических методов, которые он применил в исчислении вероятностей и которые сумел свести в единый общий, полностью ему принадлежащий метод, названный им *исчислением производящих функций*. Это исчисление разделено на две ветви, одна из которых обнимает известную теорию производящих функций, а вторая, обратная относительно первой, заключает в себе методы для выражения функций больших чисел определенными интегралами и для их разложения в сходящиеся ряды.

В этой первой части мы найдем важные замечания о метафизике [умозрительных началах] дифференциального исчисления, о переходе от конечных величин к бесконечно малым [от разностных уравнений к дифференциальным], о применении разрывных функций в исчислении частных [конечных] разностей и, наконец, об одном виде индукции, который Эйлер и месье Лаплас применяли много раз и который указал им значения различных определенных интегралов[1].

Вторая часть содержит общую теорию вероятностей и особенно приложение исчисления производящих функций к ее наиболее важным вопросам. Месье Лаплас свел общие принципы, на которых она основана, к четырем[2]. Их изложение и доказательство являются целью первой главы. Во второй он рассматривает вероятности событий, составленных из простых событий, чьи возможности известны.

Простейшая задача такого вида и первая из изученных им это исчисление шансов в лотерее. В ней определяется число тиражей, после которых можно будет держать пари на равных, что вышли все номера лотереи. А при очень большом числе номеров эта задача представляет первый пример применения формул о функциях больших чисел.

Среди других задач, включенных в эту главу, отметим [в § 8] знаменитый вопрос о *разделе ставки*, который первыми решили Паскаль и Ферма. Месье Лаплас привел общее решение, применимое к любому числу игроков, чьи сноровки находятся в заданных отношениях, притом с учетом особого обстоятельства [?], которое никто еще не ввел в вычисления.

Укажем также, что здесь находится полное решение задачи о наклонностях планетных орбит к эклиптике, из которой практически достоверно следует, что все наклонности от 0 до 100^G [до 100 град, т. е. до 90 градусов] с самого начала не были равновозможны, но что, напротив, какая-то неизвестная причина определила весьма малые наклонности, наблюдаемые астрономами.

Следующая глава изучает законы вероятностей, вытекающие из неограниченного повторения событий. Доказано, что после длинной последовательности испытаний возможности [вероятности] многих простых событий, одно-единственное из которых происходит в каждом испытании, пропорциональны числу их появлений.

Так, например, если в урне имеется неизвестное число белых и черных шаров и после очень большого числа извлечений [с возвращением] появилось *a* белых шаров и *b* черных, весьма вероятно, что количества шаров этих цветов в урне находятся в соотношении a:b. Месье Лаплас привел выражение для этой вероятности, которая тем больше приближается к достоверности, чем больше число тиражей. И хотя этот вывод сам по себе очень прост и его весьма естественно предположить, это тем не менее один из наиболее тонких вопросов теории случаев[3].

Другие задачи, решенные в этой главе, примечательны, поскольку они решаются при помощи частных разностных уравнений; Одну из них мы сформулировали в № 49 этого *Бюллетеня*. И мы также описали в том же номере (как и в № 35) новые исследования месье Лапласа о средних, которые надлежит выбирать из большого числа наблюдений.

Теперь этой теме посвящена четвертая глава его труда, где он доказывает, что метод наименьших квадратов ошибок это тот, который приводит к *минимуму* ошибку, которой следует опасаться в среднем результате большого числа наблюдений и где он предлагает выражение для этой вероятнейшей наименьшей ошибки. Эта глава особенно интересна астрономам, которые найдут в ней наиболее верное средство сравнивать относительное достоинство своих таблиц[4] и принципы, которые должны руководить ими при составлении условных уравнений для исправления [приближенно известных] элементов.

Пятая глава имеет дело с приложением исчисления вероятностей к исследованию явлений и их причин. Она заканчивается раннее не решенной достопримечательной и трудной задачей: “Пол разделен паралелльными и перпендикулярными друг другу прямыми на небольшие прямоугольные клетки. Определить вероятность, что брошенная наугад [сверху] игла упадет на какую-либо сторону этих клеток”[5].

Шестая глава трактует о вероятностях причин и будущих событий, выведенных из наблюденных событий. Общая задача, решенная здесь, по отношению к которой остальные являются лишь ее специальными приложениями, такова: “Наблюденное событие, возможность которого неизвестна, состоит из простых событий одного и того же вида. Определить вероятность, что эта возможность заключена в заданных пределах”.

Формула, которая содержит решение этой задачи, применена к рождениям, наблюденным в основных местах Европы, причем оказалось, что преобладание мужских рождений над женскими не может быть приписано случаю и что, напротив, оно вызвано какой-то неизвестной причиной.

Соотношение этих рождений, выведенное из большого числа наблюдений, выражается дробью 22/21, однако в Париже она, видимо, меньше и равна лишь 25/24. Месье Лаплас вычислил вероятность, что выявленная неправильность не была вызвана случаем и определил, что эта вероятность очень высока. Соответственно, он заключил, что наблюденная разность между Парижем и другими крупными городами Европы есть следствие неизвестной причины и весьма правдоподобно указал ее[6].
Он также установил в этой главе вероятность результатов, основанных на таблицах смертности.

Наконец, исходя из годичного числа рождений, он занялся оценкой населения крупной империи и приложил свои результаты к Франции. Ее население, вычисленное подобным образом, составляет 42 500 000 душ и месье Лаплас показал, что можно ставить более 1000 против одного, что погрешность этой оценки не более полумиллиона[7].

Тема седьмой главы – влияние возможных неравенств между шансами, которые полагаются совершенно одинаковыми. Доказано, что оно всегда благоприятствует повторению одного и того же события. Так, при игре в орлянку, если монета склонна выпадать скорее одной стороной, чем другой, преимущество всегда у того, кто держит пари на одинаковые исходы, пусть даже более вероятная сторона совершенно неизвестна игрокам.

В восьмой и девятой главах месье Лаплас рассматривает наиболее важные вопросы политической арифметики, как среднюю продолжительность жизни, женитьб и других объединений, таблицы смертности, выгоды, зависящие от вероятностей будущих событий, и преимущества институтов, основанных на вероятностях [продолжительности] жизни.

Один из наиболее интересных результатов, к которым он пришел, это возрастание среднего срока жизни, которое последовало бы при полном искоренении оспы ввиду применения вакцины[8]. Он определил, что средний срок жизни возрастет при этом более чем на 3 года, если, однако, соответствующее возрастание населения нисколько не будет приостановлено недостаточностью продовольствия.

Наконец, в последней главе труда, который мы описываем, обсуждается *моральное ожидание* и в качестве способа его определения принято правило Даниила Бернулли [1738], предполагающее, что выгода от какого-нибудь выигрыша обратно пропорциональна уже обладаемому капиталу.

Примечания

1. Индукцию Лаплас упоминает по крайней мере дважды: во-первых, в книге 1-й, на с. 3, он одобрительно отозвался по этому поводу о Валлисе; во-вторых, Лаплас (1814/1999, глава *Различные способы приближения к достоверности*) специально рассуждал об индукции, аналогии и гипотезах. Он разумно посчитал, что индукция полезна, что в нестрогом виде она может оказаться ошибочной, но что вероятность достоверности ее заключений возрастает с увеличением числа наблюдений; Бейеса он здесь не упомянул. В качестве примера ошибочного применения неполной индукции Лаплас назвал известное утверждение Ферма из области теории чисел, опровергнутое Эйлером.

В связи с Эйлером, но не по поводу Ферма, мы можем лишь указать его сочинение (1771), в котором, применив весьма подходящие обозначения, он подметил закономерность при решении задачи о лотереях. См. также Боттачини (1981/1986, с. 132) о применении метода индукции многими учеными включая Лапласа при переходе в комплексную область.

2. Эти принципы Лаплас изложил не выделяя их должным образом из контекста. Позднее он (1814/1999, с. 836 – 838) перечислил 10 принципов.

3. В точности такой задачи у Лапласа всё же нет.

4. О неудачном рассуждении Лапласа по поводу сравнения астрономических таблиц см. в этом сборнике наше Предисловие к переводу гл. 4-й этого труда, пункт 5.

5. Лаплас не указал (а Пуассон, видимо, и не знал), что эту задачу сформулировал Бюффон, который тем самым окончательно ввел геометрические вероятности в науку о случае. Лаплас верно решил указанную задачу лишь в первом издании своей книги, а затем заменил верное решение неправильным, см. Тодхантер (1865, с. 590 – 591), Гриджмен (1960) и Шейнин (2005, с. 108 – 109).

6. Лаплас (с. 392) объяснил причину тем, что среди подкидышей, привозимых в Париж из окрестных деревень, преобладали девочки. Странно, однако, что ни он, ни его комментаторы не указали, что подобное явление могло иметь место также, например, и в Лондоне.

7. Здесь Пуассон ошибся, хотя виновником его промаха был сам Лаплас, который нечетко сформулировал свои выводы. На с. 399 Лаплас указал, что, если принять число рождений во Франции равным миллиону, то ее население составит 28 353 тысяч селовек, что "мало уклоняется от истины". На с. 401 он, однако, добавил, что при полутора миллионах рождений население составило бы 42 529 тысяч, однако условность своего нового предположения никак не отметил и о прежней (но окончательной) оценке не вспомнил. Лишь впоследствии Лаплас (1814/1999, с. 842, правый столбец) подтвердил свою прежнюю действительную оценку.

8. Дженнера Лаплас упомянул лишь позднее (1814/1999, с. 853, левый столбец) как "благодетеля человечества". Там же он вспомнил о прежнем методе профилактики оспы при помощи вариоляции и, разумеется, назвал Даниила Бернулли. См. также выписки из его лекций 1795 г. в этом сборнике.

IV. Речь на похоронах маркиза Лапласа

Discours prononcé aux obsèques de M. le marquis de Laplace. *Connaissance des tem[p]s* pour 1830, 1827, pp. 19 – 22 второй пагинации

Господа, Подобает ли, что столетие со дня смерти Ньютона было отмечено кончиной одного из самых знаменитых его последователей, – того, кого Англия и Франция так часто называли французским Ньютоном, чтобы в одно и то же время выразить славу обоих народов? Без сомнения, сейчас не время пытаться уменьшить нашу глубокую скорбь, но если рассматривать всё столетие, которое отделяет эти два больших события, какое же восхитительное зрелище представит нам развитие наук, их склонность к духу математики, которая является истинной философией, и особенно та высота, на которую поднялась физическая астрономия ввиду сочетания тончайшего анализа и наиболее точных наблюдений! Если пройтись умелой рукой по этой огромной сводке, то не без удивления заметишь, что все ее части разъяснены гением одного и того же человека, потерю которого, увы! мы оплакиваем. Друг Лавуазье, он проводил вместе с ним опыты, которые достаточны, чтобы стать известным как физик первого ранга. Он был тесно связан с Бертолле и между ними существовала общность идей, которые принесла свои плоды и в *Statique chimique* [1803] и в *Изложении системы мира* [1796]. Он способствовал всем наукам и все они почитали его. Самые знаменитые представители во всех ее отраслях, Аюи[1], Бертолле, Кювье, Био, Гумбольдт считали за честь посвящать ему свои труды. Ньютон объял единой мыслью постоянные законы, управляющие материей, и, что не менее достойно восхищения, указал бóльшую часть следствий своего принципа, которые время и прилежные наблюдения позволили нам выявить. Но как было возможно пройти еще дальше по этому пути, предвосхищенному гением, который казался вознесенным выше человечества, к полному пониманию явлений, к их совершенному сравнению с наблюдениями, что составляет предмет астрономии нашей эпохи? Чтобы достичь этой цели потребовались труды Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа и Лапласа. И сегодня *Небесная механика* является полным развитием *Математических начал натуральной философии*. Эти труды, носящие имя одного-единственного автора, являются плодом глубоких размышлений многих поколений.

Я не могу назвать Лагранжа без того, чтобы не вспомнить, господа, как его имя и имя Лапласа часто произносились вместе и как они были едины в мнениях [научного] мира, для которого они означали вершину разума. В течение длительного времени ученая Европа наблюдала, как по одной и той же теме мемуар одного из них следовал за трудом другого, и Бюро долгот, от имени которого я сейчас говорю, навсегда сохранит память о том действительно достопамятном заседании, куда они пришли сообщить о работах по одной и той же теории, одной из самых важных в физической астрономии. Но таков был обширный масштаб проблем, которые занимали этих выдающихся людей, что они, эти проблемы, виделись ими под совершенно различными углами зрения и иногда даже не исчерпывали темы.

Было, впрочем, между их дарованиями различие, которое отмечали все, кто изучал их труды, относились ли они к либрации Луны или к задаче из чисел [?]. Лагранж, казалось, чаще всего видел в рассматриваемых им вопросах только имевшую там место математику, откуда и происходило большое значение, которое он придавал изяществу формул и общности методов. Для Лапласа, напротив, математический анализ был орудием, которое он приспосабливал к наиболее разнообразным приложениям, всегда подчиняя его специальному методу, [который отвечал] самой сути соответствующей задачи. Быть может последующие [ученые] назовут одного из них великим геометром, а другого – великим философом, который стремился познать природу при помощи самой утонченной геометрии. Именно таким образом Лаплас дал нам теорию капиллярных явлений, определил степени вероятности различных методов исчисления, приложенного к большому числу наблюдений, и законы приливов и отливов; несмотря на большое число произвольных элементов, от которых они зависят, формулы этих законов с особой точностью представляют наблюдения, отделенные интервалом более чем в сто лет.

Далее, Лаплас выявил причину и меру векового уравнения Луны и долгопериодических неравенств Сатурна и Юпитера. Эти две [последние] проблемы больше всего занимали геометров с тех пор как бывшая [парижская] Королевская академия наук многократно [и тщетно] предлагала их (они каждый раз противились усилиям ученых). Из многочисленных периодических неравенств Луны он выделил те, которые зависят от параллакса Солнца и выявил неравенства, причиной которых является сжатие Земли, так что не выходя из своей обсерватории астроном может [теперь] действительно определить форму нашей планеты и ее расстояние от Солнца по наблюдению движения Луны. И, наконец, чтобы ограничить это перечисление замечательных результатов, включающие те, которые наиболее удовлетворяли его воображение, [я добавлю, что] особое расположение его духа позволило ему распознать столь сложные законы [движения] спутников Юпитера. Трудность этой проблемы, происходящая от единственного в своем роде обстоятельства в системе мира, связана с движением первых трех спутников Юпитера. Лаплас уловил ее с удачной проницательностью.

Работы Лапласа продолжались без перерыва около 60 лет. Если не знать, что плодовитость всегда является существенным свойством гения, можно удивляться их числу и разнообразию. Можно также сказать, что числовые вычисления, которые поглощают существенную часть столь ценного времени, проделал его друг Бувар[2]. Их формулы оказались основой астрономических таблиц Деламбра[2], который также был другом Лапласа и чье двойное качество [автора и друга] было упомянуто при его погребении.

Первые шаги Лапласа в его научной карьере направлял Даламбер, не замедливший распознать в нем геометра, с которым ему придется вскоре состязаться. Хотя Лаплас стал академиком в 24 года, он еще до этого сделал фундаментальное открытие, а именно обнаружил инвариантность средних расстояний планет от Солнца и кроме того опубликовал многие важные мемуары. Бюро долгот выслушало чтение его последнего труда и, так сказать, его последние интонации. Еще в нынешнем году, всего за 15 дней до его заболевания, он представил нам мемуар о колебательных движениях в атмосфере, печатание которого в *Connaissance des tem[p]s* уже закончилось. Началось печатание нового издания исторической части *Изложения системы мира*. Он подготовил первое дополнение к труду своих последних лет, пятому тому *Небесной механики,* и шестой том *Мемуаров* академии наук[3], вот-вот выходящий в свет, включает его мемуар, достойный закончить длинную серию его трудов, которые обогатили все наши коллекции и ведут начало с 1772 г.

Пылкая любовь к наукам была его жизнью и погасла только вместе с ним. Кто теперь будет давать тот толчок наукам, который они получали от его духа и теплоты его души? Где те, которые их развивают, найдут столь приятное одобрение и благородное поощрение?

Вспоминая о приеме, с которым он встречал меня в моей юности, о знаках живой дружбы, которую он мне столь часто расточал, о сообщении своих мыслей, которые проясняли мой разум относительно многих различных тем, я в избытке чувствую бессилие выразить в этом последнем прощании всю любовь, которую я испытываю к нему, и всю благодарность, которой я ему обязан.

Примечание редакции. Лаплас умер в Париже 5 марта 1827 г., в девять часов утра. Он родился 23 марта 1749 г. в Бомон-ан-Ож возле г. Кан, где и началось его образование. В понедельник, день его кончины, [парижская] Академия наук, собравшись как обычно, решила, что в этот день заседания не будет. Такой пример был дан Петербургской академией в день смерти Эйлера.

В 1783 г. Лаплас заменил Безу в качестве экзаменатора в Королевском корпусе артиллерии. Он женился в 1788 г. и оставил сына, наследника своего титула пэра Франции и полковника артиллерии, который занимается исчислением шансов, как можно видеть в четвертом дополнении к *Аналитической теории вероятностей*[4].

Примечания

1. Rene-Just Haüy, Аюи (1743 – 1822), кристаллограф и минералог.

2. Алексис Бувар, 1767 – 1843, неутомимый вычислитель. Выполнил все “подробные” вычисления в *Небесной механике*. Его неудачная таблица движения Урана подстегнула поиски (и обнаружение) Нептуна. См. Блажко (1947, с. 84) и Александер (1970).

Астрономические таблицы Деламбра были изданы в качестве дополнения к первому тому 3-го издания известной *Астрономии* Лаланда (1792 и 1808), и отдельно в 1817 г.

3. В 1827 г. вышел в свет седьмой том *Мемуаров* (шестой том – в 1823 г.).

4. Указанное *Дополнение* (1812/1886, с. 617 – 645), помеченное 1825 г., не содержит никаких ссылок ни на кого.

V. О вероятности средних результатов из наблюдений, часть 1-я

Poisson S. D. (1824), Sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Connaissance des tem[p]s* pour 1827, pp. 273 – 302

Вопрос, который я хочу рассмотреть в этом мемуаре, уже изучался многими геометрами и особенно месье Лапласом, чьи исследования этой интересной темы объединены в *Аналитической теории вероятностей* (гл. 4 книги 2-й) и в трех *Дополнениях* к ней. Общность его анализа, многообразие и важность приложений, на которых он остановился, не оставляют пожелать ничего иного. Но мне кажется, что некоторые вопросы этой теории могут еще быть развиты, и я полагаю, что замечания, которые я имел случай произнести при ее изучении, подходящи, чтобы прояснить затруднения и могут быть не без пользы в практике.

1. Пусть рассматриваются s наблюдений. Обозначим целое положительное число через l и предположим, что каждое из этих наблюдений может быть ошибочно на числа

$$-l,\ -l + 1,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 1 - 1,\ l.$$

Положим далее, что вероятность одной и той же ошибки постоянна для всей серии наблюдений. Если n – одно из этих чисел, – положительное, отрицательное или нуль, – и N – вероятность ошибки n, то сумма вероятностей всех возможных ошибок будет достоверностью, так что $\sum N = 1$.
Пусть M – вероятность, что сумма ошибок s наблюдений равна m. Она совпадает с вероятностью выбросить m очков при броске s совершенно одинаковых костей с $(2l + 1)$ граней каждая, обозначенных $-l, \ldots, l$ и имеющих различные степени вероятности N выпадения грани n. В этом случае значение M равно коэффициенту при t^m в разложении многочлена $\sum(Nt^n)$ из $(2l + 1)$ членов, возведенного в степень s, или, что то же самое, равно члену, не зависящему от t в разложении $t^{-m}[\sum(Nt^n)]^s$ по степеням этой переменной. Это то, что следует из основных правил исчисления вероятностей и теории соединений.

Чтобы установить этот член, обозначим, как обычно, буквой e […] и буквой π […] и заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(n_1\theta i)d\,\theta = 0 \text{ или } 2\pi.$$

Первое значение имеет место, если n_1 – целое положительное или отрицательное число, второе – если $n_1 = 0$. Легко поэтому заключить, что, если в предыдущую величину подставить $e^{\theta i}$ вместо t, искомый член, т. е. значение M, будет равен

$$M = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} [\sum(Ne^{n\theta i})]^s e^{-m\theta i} d\,\theta.$$

Пусть теперь p будет вероятностью, что сумма s ошибок заключена между границами μ и μ_1. Ясно, что p – сумма значений M, взятых от $m = \mu$ до $m = \mu_1$. Но внутри этих границ сумма значений $e^{-m\theta i}$ равна

$$(\exp\{-[\mu - (1/2)]\theta i\} - \exp\{-[\mu_1 + (1/2)]\theta i\}) \div 2i\sin(\theta/2)$$

и поэтому ... [полученное частное подставляется в предыдущий интеграл].

Поскольку средняя ошибка равна сумме ошибок, деленной на их число, полученная вероятность p будет также вероятностью, что средняя ошибка заключена между μ/s и μ_1/s.

2. Чтобы придать последнему выражению несколько иную форму, которая затем позволит ошибкам возрастать неощутимыми шагами, обозначим через $2a$ интервал, в котором они все заключены, т. е. от наибольшего избытка до наименьшего, и разобьем его на $(2l + 1)$ равных частей. Пусть ω будет одной такой частью, так что $2a = (2l + 1)\omega$. И пусть также

$$n\omega = x,\ \mu\omega = b - c,\ \mu_1\omega = b + c,\ (2l + 1)\theta/2a = \alpha.$$

N – функция от x, которую мы можем представить как ωfx и значение p окажется равным

$$p = (a/\pi)\int \ (\sum \ wfx\, e^{x\alpha i})^s\, e^{-bi\alpha}\frac{\sin\{c+[a/(2l+1)]\alpha\}}{\sin[a\alpha/(2l+1)]}\, d\alpha/(2l + 1).$$

Значения x, от которых зависит сумма $\sum$, возрастают шагами, равными α, от $-\ a$ до a. Интеграл по α берется от $-\ (2l + 1)\pi/2a$ до $(2l + 1)\pi/2a$. Ошибки наблюдения более не выражаются целыми числами и p – вероятность, что сумма s ошибок, равных x, будет находиться в данных границах $b - c$ и $b + c$. Вообразим себе, что l становится бесконечным без того, чтобы a, b и c перестали быть заданными и конечными величинами, тогда $(2l + 1)\sin[a\alpha/(2l + 1)] = a\alpha$, пределы α становятся равными $\pm\infty$, а разность w – бесконечно малой. Принимая ее за дифференциал x и переходя от суммы $\sum$ к определенному интегралу, получим значение p в виде

$$p = (1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \ (\int_{-a}^{a} \ fx\, e^{x\alpha i}dx)^s e^{-b\alpha i}\ \sin c\alpha\ d\alpha/\alpha. \qquad (1)$$

Эта вероятность теперь относится к случаю, в котором ошибки наблюдения могут принимать все значения между $-\ a$ и a; их число бесконечно, а вероятность $fxdx$ некоторой ошибки x бесконечно мала. Функция fx может принимать любой вид, быть непрерывной или разрывной, лишь бы ее значения от $x = -\ a$ до a были положительны и не превышали 1, а их сумма, т. е. интеграл

$$\int_{-a}^{a} fxdx = 1. \qquad (2)$$

Это условие означает, что каждая ошибка наверняка попадает в интервал $[-\ a;\ a]$. Если функция fx задана, соответствующее значение p определятся двумя последовательными интегрированиями.

3. Пусть в уравнении (1) $s = 1$, тогда вероятность, что ошибка одного-единственного наблюдения заключена в границах $b - c$ и $b + c$ будет равна … [правой части (1), в которой принято $s = 1$]. Если интервал $[b - c;\ b + c]$ находится вне границ $\pm\ a$ возможных ошибок, т. е. когда $b - c$ или $b + c$ без учета знака или больше или меньше a, это значение p очевидно становится равным нулю.

Напротив, эта вероятность оказывается достоверностью или равной единице, когда указанный интервал включает в себя весь интервал от $-\ a$ до a. И вообще, если полагать $fx = 0$ для всех значений x, не находящихся внутри границ $\pm\ a$, мы будем иметь

$$p = \int_{b-c}^{b+c} fxdx. \qquad (3)$$

Чтобы подтвердить это положение нашего анализа, заметим, что при перемене порядка интегрирования по x и α значение p можно также записать в виде

$$(1/\pi) \int_{-a}^{a} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin[(b+c-x)\alpha] - \sin[(b-c-x)\alpha]}{\alpha} d\alpha\, fx\, dx.$$

Но

$$\int_{0}^{\infty} \sin(k\alpha/\alpha)\, d\alpha = \pi/2,\ k > 0, \text{ или } -\pi/2,\ k < 0.$$

Разность двух внутренних интегралов оказывается равной нулю или π в зависимости от того, будут ли величины $b + c - x$ и $b - c - x$ одного знака или нет. Следовательно, интеграл по x будет равен нулю для всех значений этого переменного, которые либо превышают $b + c$ и $b - c$, либо менее этих же величин и должен простираться лишь одновременно внутри интервалов $\pm a$ и $[b - c; b + c]$. Поэтому, полагая $fx = 0$ для значений x вне границ $\pm a$, мы имеем (3), что и требовалось подтвердить.

4. Прежде, чем идти дальше, полезно применить формулу (1) к нескольким частным примерам. Наиболее прост случай, когда все ошибки, заключенные внутри границ $\pm a$, равновозможны и функция fx поэтому является постоянной, равной $1/2a$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} fxe^{x\alpha i}dx = (\sin a\alpha)/a\alpha$$

и, следовательно,

$$p = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [(\sin a\alpha)/a\alpha]^s [(\sin c\alpha)/\alpha] \cos b\alpha\, d\alpha.$$

Этот интеграл может быть получен по известным формулам в конечном виде для всех целочисленных значений s.

Предположим во втором случае, что

$$fx = (1/\surd\pi) \exp(-x^2) \qquad (4)$$

и что границы $\pm a$ бесконечны. Условие (2) выполнено. Мы имеем

$$\int_{-a}^{a} fxe^{x\alpha i}dx = \exp(-\alpha^2/4)$$

и, стало быть,

$$p = (2/\pi) \int_{0}^{\infty} \exp(-\alpha^2 s/4)[(\sin c\alpha)/\alpha] \cos b\alpha\, d\alpha,$$

что может быть записано в другом виде:

$$p = (2/\pi)\int\ [\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 s/4)\cos c\alpha \cos b\alpha\, d\alpha]\, dc,$$

причем интеграл по c берется таким образом, что он равен нулю при $c = 0$. Интеграл по α вычисляется по известным формулам, после чего

$$p = (1/\sqrt{\pi s}\,)\int\ \{\exp[-(b-c)^2/s] + \exp[-(b+c)^2/s]\}dc.$$

Если принять $b = b_1\sqrt{s}$ и $c = c_1\sqrt{s}$, то

$$p = (1/\sqrt{\pi})\int_{-c_1}^{c_1} \exp[-(b_1+z)^2]\, dz,$$

так что если границы $b \pm c$, между которыми должна находиться сумма ошибок, пропорциональны корню квадратному из числа наблюдений s, то вероятность p, что это имеет место при нашем предположении о виде функции f, не зависит от этого числа. При той же предпосылке наибольшее значение p относительно b соответствует случаю $b = 0$, что было ясно с самого начала.

В качестве последнего примера примем, что

$$fx = 1/[\pi(1+x^2)],\ a = \infty. \qquad (5)$$

Условие (2) выполнено. Более того, мы имеем

$$\int_{-a}^{a} fx\, e^{x\alpha i}dx = e^{-\alpha},\ \alpha > 0, \text{ или } e^{\alpha},\ \alpha < 0,$$

откуда следует, что

$$p = (2/\pi)\int_0^\infty e^{-\alpha z}\cos b\alpha\,[(\sin c\alpha)/\alpha]\, d\alpha =$$

$$(2/\pi)\int\ (\int_0^\infty e^{-\alpha s}\cos b\alpha \cos c\alpha\, d\alpha)\, dc,$$

где интеграл относительно c исчезает при $c = 0$. Проинтегрировав по обычным правилам относительно α, мы получим

$$p = (1/\pi)\int\ \left[\frac{s}{s^2+(b-c)^2} + \frac{s}{s^2+(b+c)^2}\right]dc =$$

$$(1/\pi)\mathrm{arctg}\,\frac{2cs}{s^2+b^2-c^2}.$$

Если $b = b_1 s$, $c = c_1 s$, средняя ошибка будет заключена между границами $b_1 \pm c_1$ и соответствующая вероятность p станет независимой от числа наблюдений s. Следовательно, в этом особом случае средняя ошибка не стремится с возрастанием этого числа ни к нулю, ни к какому-либо иному определенному числу, и, будь наблюдений сколь угодно много, вероятность, что средняя ошибка, которой следует опасаться, заключена между заданными границами, останется одной и той же.

5. В правой части уравнения (1) мнимые величины входят лишь видимо и от них легко избавиться. Пусть вначале

$$\left(\int_{-a}^{a} fx \cos \alpha x\, dx\right)^2 + \left(\int_{-a}^{a} fx \sin \alpha x\, dx\right)^2 = \rho^2,$$

и, следовательно,

$$(1/\rho)\int_{-a}^{a} fx \cos \alpha x\, dx = \cos \varphi,\ (1/\rho)\int_{-a}^{a} fx \sin \alpha x\, dx = \sin \varphi.$$

Объединяя в формуле (1) элементы интеграла по α, соответствующие равным и противоположным по знаку значениям этой переменной, получим

$$p = (2/\pi)\int_{0}^{\infty} \rho^s \cos (s\varphi - b\alpha)\ [(\sin c\alpha)/\alpha]\ d\alpha. \qquad (6)$$

Величина ρ равна 1 при α = 0, а для всех иных значений α она меньше единицы. Запишем теперь выражение для ρ^2 в виде

$$\rho^2 = \int_{-a}^{a} fx \cos\alpha x dx \int_{-a}^{a} fx_1 \cos\alpha x_1 dx_1 + \int_{-a}^{a} fx \sin\alpha x dx \int_{-a}^{a} fx_1 \sin\alpha x_1 dx_1.$$

Преобразуем каждое из этих произведений простых интегралов в один двойной интеграл и сумму двух двойных интегралов в виде одного:

$$\rho^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} fx\, fx_1 \cos\,[(x - x_1)\,\alpha]dx\, dx_1 < \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} fx\, fx_1\, dx\, dx_1 \text{ или } < 1.$$

Это замечание существенно и послужит нам для сведения значения *p* к более простому виду в случае очень большого числа наблюдений.

6. Мы будем полагать *s* бесконечно большим, так что последующие формулы окажутся при этом строгими, если это выполнено и [во всяком случае] тем более точными, чем больше *s*. И, поскольку ρ < 1 при α ≠ 0, то при $s = \infty$ степень ρ^s оказывается конечной лишь при бесконечной малости этой переменной и становится бесконечно малой при конечном α. Поэтому, при разложении ρ по степеням α можно ограничиться двумя первыми членами ряда, и если

$$\int_{-a}^{a} fx\, xdx = k,\ \int_{-a}^{a} fx\, x^2 dx = k_1,$$

то $\rho = 1 - (1/2)(k_1 - k^2)\,\alpha^2$.

Значение ρ в этом виде тем не менее допускает одно исключение: в случае бесконечных границ ± *a* возможно, что правая часть разложения ρ по степеням α включает лишь первую степень этой переменной и притом эта степень не меняет знака вместе с α, будучи представлена, если угодно, в виде $\sqrt{\alpha^2}$. Это происходит, когда fx имеет вид (5), как мы видели в последнем примере § 4. Но мы не будем учитывать этот частный случай, который был достаточен для того, чтобы назвать причину его особенности, в практике же он без сомнения не встречается.

Можно также опасаться, что коэффициент $k_1 - k^2$ в правой части формулы для ρ равен нулю, так что придется сохранять следующий член разложения, который будет содержать α в степени выше второй. Однако, легко доказать, что величина $k_1 - k^2$ всегда положительна, что необходимо для того, чтобы ρ было меньше единицы и, более того, чтобы оно никогда не было равно нулю. Ввиду условия (2) для fx_1 мы имеем

$$k_1 - k^2 = \int_{-a}^{a} fx\, x^2 dx \int_{-a}^{a} fx_1\, dx_1 - \int_{-a}^{a} fx\, xdx \int_{-a}^{a} fx_1\, x_1 dx_1 =$$

$$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} (x^2 - xx_1)\, fx\, fx_1\, dx\, dx_1.$$

Можно также считать, что подынтегральная функция равна $(x_1{}^2 - xx_1)\, fx\, fx_1$, и, приняв за $k_1 - k^2$ полусумму двух интегралов, мы имеем положительную величину

$$k_1 - k^2 = (1/2) \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} (x - x_1)^2\, fx\, fx_1\, dx\, dx_1,$$

которая никогда не равна нулю, потому что все элементы этого двойного интеграла по необходимости положительны. Указав на это, положим для краткости, что

$$(1/2)\,(k_1 - k^2) = h^2$$

и заменим α на $y/\surd s$. Тогда

$$\rho^s = [1 - (h^2y^2/s)]^s.$$

Новая переменная y может принимать конечные значения; но, будь они какие угодно, при $s = \infty$

$$\rho^s = \exp\,(-\,h^2y^2).$$

В соответствии со значением sinφ мы также имеем $\varphi = k\alpha$ и уравнение (6) становится

$$p = (2/\pi) \int_0^{\infty} \exp\,(-\,h^2y^2) \cos\,[(ks - b)\, y/\surd s]\, \sin\,(cy/\surd s)\, dy/y,$$

или, что то же самое,

$$p = (1/\pi\surd s) \int \{\int_0^{\infty} \exp\,(-\,h^2y^2) \cos\,[(ks - b + z)\, y/\surd s]\, dy\} dz,$$

где интеграл по z берется от $-\,c$ до c. Переменной y можно придавать лишь конечные значения, однако без опасения заметной ошибки можно распространить соответствующий интеграл до бесконечности ввиду множителя $\exp\,(-\,h^2y^2)$, который становится неощутимым при очень больших y, и вычислить его по известным формулам. Окончательно

$$p = (1/2h\sqrt{\pi s}\,)\int_{-c}^{c} \exp\{-[(ks-b+z)^2/4h^2s]\}dz. \qquad (7)$$

Если fx постоянна и равна $1/2a$, то $k = 0$, $k_1 = a^2/3$, $h^2 = a^2/6$,

$$p = (\sqrt{3/2\pi s}\,/a)\int_{-c}^{c} \exp\{-3[(b-z)^2/2a^2s]\}dz.$$

Если же эта функция имеет вид (4), то пределы ± a бесконечны и

$$k = 0,\ h^2 = (1/2\sqrt{\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,x^2dx = 1/4,$$

$$p = (1/\sqrt{\pi s}\,)\int_{-c}^{c} \exp\{-[(b-z)^2/s]\}\,dz,$$

что совпадает со вторым значением p в § 3 [?], которое должно иметь место при любых s.

7. При постоянном c наибольшее значение p по отношению к b дается уравнением

$$\int_{-c}^{c} \exp\{-[(ks-b+z)^2/4h^2s]\}(ks-b+z)\,dz = 0,$$

или, после интегрирования, уравнением

$$\exp\{-[(ks-b+c)^2/4h^2s]\} - \exp\{-[(ks-b-c)^2/4h^2s]\} = 0,$$

которое сводится к

$$\exp\{-[c\,(ks-b)/2h^2s]\} = \exp\,[c\,(ks-b)/2h^2s]$$

и приводит к $b = ks$. Если в то же время $c = 2hr\sqrt{s}$, то формула (6) преобразуется в

$$p = (2/\sqrt{\pi})\int \exp(-r^2)\,dr, \qquad (8)$$

где интеграл берется таким образом, что он равен нулю при $r = 0$.

Такова вероятность, что сумма ошибок очень большого числа наблюдений s находится в границах $ks \pm 2hr\sqrt{s}$, или что средняя ошибка оказывается в границах $k - 2hr/\sqrt{s}$ и $k + 2hr/\sqrt{s}$. Таким образом, если величина r и зависящая от нее вероятность остаются неизменными, эти границы неограниченно сжимаются по мере возрастания s, а это число можно всегда принять столь большим, что средняя ошибка с заданной вероятностью станет отличаться от k сколь угодно мало.

Вне своего наибольшего значения величина p, заданная уравнением (6), очень быстро убывает, и если непременно полагать s весьма большим, b будет отличаться от ks на величину порядка менее $1/\sqrt{s}$, а значение p оказывается неощутимым.

Каждый раз, когда положительные и отрицательные ошибки равновозможны, т. е. когда функция fx принимает одни и те же значения для равных друг другу и противоположных по знаку значений x, величина k будет равна нулю, а средняя ошибка непрерывно стремиться к ней по мере возрастания числа наблюдений. Но если некоторая постоянная причина приведет к преобладанию либо положительных, либо отрицательных ошибок, величина k не будет больше равна нулю, и ее требуется определить, чтобы можно было установить, к какому числу неограниченно стремится средняя ошибка. Ясно, что k без учета знака не может превышать a, потому что средняя ошибка не может перейти за границу возможных ошибок. Поэтому требуется, чтобы $k^2 < a^2$ и, далее, чтобы

$$a^2 - k^2 = a^2 \int_{-a}^{a} fx\,dx \int_{-a}^{a} fx_1 dx_1 - \int_{-a}^{a} xfx\,dx \int_{-a}^{a} x_1 fx_1 dx_1 =$$

$$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} (a^2 - xx_1)\, fx_1 dx\, dx_1,$$

т. е. равняться положительной величине, потому что все элементы этого двойного интеграла положительны.

8. Предыдущий анализ можно без затруднения приложить к решению следующей задачи, которая включает только что рассмотренную как частный случай.

Пусть E будет суммой ошибок $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s-1}$ s наблюдений, умноженных на соответствующие заданные коэффициенты

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s-1}: \qquad (9)$$

$$E = \gamma\varepsilon + \gamma_1\varepsilon_1 + \gamma_2\varepsilon_2 + \ldots + \gamma_{s-1}\varepsilon_{s-1}.$$

Требуется определить вероятность, что сумма E находится внутри заданных границ.

Вначале предположим, как и в § 1, что все возможные ошибки выражены целыми числами или нулями и заключаются в границах между $-l$ и l. Но, чтобы задача обладала всей возможной общностью, вероятность одной и той же ошибки не предполагается одинаковой для всех наблюдений. Мы поэтому обозначим вероятность какой-либо ошибки n через $N, N_1, N_2, \ldots, N_{s-1}$. Пусть β – такой множитель, что все произведения $\beta\gamma, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2, \ldots, \beta_{s-1}\gamma_{s-1}$ оказываются целочисленными, что всегда возможно либо в точности, либо с какой угодно степенью приближения.

Примем, наконец, для сокращения письма, что

$$(\sum N t^{\beta\gamma n})(\sum N_1 t^{\beta\gamma_1 n})(\sum N_2 t^{\beta\gamma_2 n}) \ldots (\sum N_{s-1} t^{\beta\gamma_{s-1} n}) = T,$$

где суммы распространены на все значения n от $-l$ до l. Вероятность, что βE равно некоторому целому числу m, будет равна коэффициенту при t^m в разложении T по степеням t, или же члену, не зависящему от t в произведении Tt^{-m}. Обозначив эту вероятность через M и через P – величину T после подстановки в нее $e^{\theta i}$ вместо t, мы получим

$$M = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} Pe^{-m\theta i} d\theta.$$

Пусть, далее, p – вероятность, что βE заключено в границах μ и μ_1 или равно одному из этих чисел; вероятность будет равна сумме значений M от $m = \mu$ до μ_1:

$$p = (1/4\pi i) \int_{-\pi}^{\pi} P \frac{e^{-[\mu-(1/2)]\theta i} - e^{-[\mu_1+(1/2)]\theta i}}{\sin\theta/2} d\theta.$$

Чтобы возможные ошибки каждого наблюдения оказались непрерывными, разделим данный интервал, в котором они все находятся, на $(2l + 1)$ равных частей. Пусть этот интервал равен $2a$, и ω – одна из этих частей, и кроме того пусть

$$n\omega = x,\ \mu\omega = (b - c)\beta,\ \mu_1\omega = (b + c)\beta,\ (2l + 1)\beta\theta/2a = \alpha.$$

Осталось только предположить, что ω бесконечно мало, а l бесконечно и ошибки станут изменяться неощутимыми шагами. Интегралы по α будут иметь бесконечные пределы, а суммы преобразуются в определенные интегралы от $x = -a$ до $x = a$, ω станет дифференциалом x, и если $N = \omega fx$, то, к примеру,

$$\sum Ne^{\beta\gamma n\theta i} = \int_{-a}^{a} fx\, e^{\gamma x\alpha i}\, dx.$$

Остальные суммы преобразуются таким же образом, так что, если

$$N_1 = \omega f_1x,\ N_2 = \omega f_2x,\ \ldots,\ N_{s\text{-}1} = \omega f_{s-1}x,$$

то значение P станет равным

$$\int_{-a}^{a} fx \exp(\gamma x\alpha i)\, dx \int_{-a}^{a} f_1x \exp(\gamma_1 x\alpha i)\, dx \ldots \int_{-a}^{a} f_{s-1}x \exp(\gamma_{s-1} x\alpha i)\, dx$$

и после всех преобразований окажется, что

$$p = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} Pe^{-b\alpha i} \sin c\alpha\, d\alpha/\alpha.$$

Величины β в этой формуле уже нет, а p – вероятность, что βE заключено в границах $(b - c)\beta$ и $(b + c)\beta$, или, что то же самое, что E находится между $(b - c)$ и $(b + c)$, что не зависит от β. Можно избавиться от мнимых величин, положив

$$\left[\int_{-a}^{a} fx \cos(\gamma x\alpha)\, dx\right]^2 + \left[\int_{-a}^{a} fx \sin(\gamma x\alpha)\, dx\right]^2 = \rho^2,$$

$$(1/\rho) \int_{-a}^{a} fx \cos(\gamma x\alpha)\, dx = \cos\varphi,\ (1/\rho) \int_{-a}^{a} fx \sin(\gamma x\alpha)\, dx = \sin\varphi$$

и соответственно для ρ_1 и φ_1, ρ_2 и φ_2, …, если заменить γ и fx на γ_1 и f_1x, γ_2 и f_2x, …

Пусть, далее,

$$\rho \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \dots \rho_{s-1} = R,\ \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{s-1} = \psi, \qquad (10)$$

тогда выражение для p преобразуется в

$$p = (2/\pi)\int_0^\infty R \cos(\psi - b\alpha) \sin c\alpha\, d\alpha/\alpha =$$

$$(1/\pi)\int_{-c}^{c} [\int_0^\infty R \cos(\psi - b + z\alpha)\, d\alpha]\, dz. \qquad (11)$$

При $\alpha = 0$ все сомножители в R оказываются равными единице и можно доказать, как в § 5, что они все меньше единицы для всех остальных значений α.

9. Чтобы вывести из этой формулы полезные для практики результаты, рассмотрим специально случаи, при которых число s очень велико и может считаться бесконечным. Если теперь обозначить через r те из величин

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1}, \qquad (12)$$

которые для одного и того же значения α менее всего отличны от единицы, мы получим $R < r^s$ и, следовательно, R примет конечные значения лишь для бесконечно малых значений α. Это заключение может, однако, оказаться ошибочным, если коэффициенты (9) образуют непрерывно убывающий ряд. Может оказаться, что множители (12) неограниченно стремятся к единице, так что нельзя будет назначить множитель r, который приближается более всех к единице и возможно, что произведение множителей (12), число которых бесконечно, окажется конечным числом для всех значений α. В следующем параграфе мы приведем пример этого особого случая, здесь же мы рассмотрим общий случай, при котором произведение R в пределе при бесконечном s становится бесконечно малым коль скоро α принимает конечные значения.

Пусть для какого-то индекса l

$$\int_{-a}^{a} xf_l x\, dx = k_l,\ \int_{-a}^{a} x^2 f_l x\, dx = k_{1l},\ \int_{-a}^{a} f_l x\, dx = 1,$$

притом $(1/2)\,(k_{1l} - k_l^2) = h_l^2$; разложим каждый сомножитель произведения R в ряд по степеням α, оставляя в каждом случае лишь первые два члена:

$$R = (1 - \gamma^2 h^2 \alpha^2) \cdot (1 - \gamma_1^2 h_1^2 \alpha^2) \dots (1 - \gamma^2_{s-1} h_{s-1} \alpha^2).$$

Пусть $\alpha = y/\surd s$, так что новая переменная y может принимать конечные значения. Если разложить логарифм R по степеням этой переменной, то

$$\ln R = - y^2[(\sum\gamma_l^2 h_l^2)/s] - (1/2)y^4[(\sum\gamma_l^4 h_l^4)/s^2] - (1/3)y^6[(\sum\gamma_l^6 h_l^6)/s^3] - \dots$$

Здесь суммы распространены от $l = 0$ до $l = s - 1$. Предположим, что величины γ^2h^2, $\gamma_1^2h_1^2$, $\gamma_2^2h_2^2$, … не возрастают неограниченно и назовем наибольшую из них H^2, тогда эти суммы будут соответственно меньше, чем sH^2, sH^4, sH^6, … и при $s = \infty$ все члены разложения $\ln R$ за исключением первого исчезнут, так что мы получим просто

$$\ln R = -y^2[(\sum\gamma_l^2h_l^2)/s],\ R = \exp\{-y^2[(\sum\gamma_l^2h_l^2)/s]\}.$$

В то же время величины

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots \tag{13}$$

сведутся к $\alpha\gamma k$, $\alpha\gamma_1k_1$, $\alpha\gamma_2k_2$, … и поэтому $\psi = \alpha\sum\gamma_lk_l$, и формула (11) преобразуется в

$$(1/\pi\sqrt{s})\int_{-c}^{c}\ [\int\ \exp\{-y^2[(\sum\gamma_l^2h_l^2)/s]\}\cos(\sum\gamma_lk_l - b + z)\,(y/\sqrt{s})\,dy]\,dz.$$

Ввиду быстрого убывания ее элементов можно не опасаться ошибки при распространении интеграла по y от 0 до бесконечности, что позволит получить его в конечной форме, так что

$$p = (1/2\sqrt{\pi\sum\gamma_l^2h_l^2}\,)\int_{-c}^{c}\ \exp\,[-\frac{(\sum\gamma_lk_l - b + z)^2}{4\sqrt{\sum\gamma_l^2h_l^2}}]\,dz. \tag{14}$$

При одном и том же c наибольшее значение p относительно b соответствует $b = \sum\gamma_lk_l$ и оно очень быстро убывает по каждую сторону от своего максимума, становясь совершенно неощутимым как только b отходит от $\sum\gamma_lk_l$ на величину, сравнимую с $1/\sqrt{\sum\gamma_l^2h_l^2}$, которая имеет тот же порядок, что и $1/\sqrt{s}$. Если $b = \sum\gamma_lk_l$ и $c = 2r\sqrt{\sum\gamma_l^2h_l^2}$, то эта вероятность принимает вид (8) с интегралом, который начинается с r. Такова вероятность, что сумма E заключена между границами $\sum\ \gamma_lk_l \pm 2r\sqrt{\sum\gamma_l^2h_l^2}$ или что $(1/s)E$ находится между

$$(1/s)\sum\ \gamma_lk_l - (2r/s)\sqrt{\sum\gamma_l^2h_l^2}\ \text{и}\ (1/s)\sum\ \gamma_lk_l + (2r/s)\sqrt{\sum\gamma_l^2h_l^2}\ .$$

Поскольку $\sum\gamma_l^2h_l^2 < H^2s$, s всегда можно принять настолько большим, что $(1/s)E$ будет с заданной вероятностью сколь угодно мало отличаться от $(1/s)\sum\gamma_lk_l$ и при бесконечном числе наблюдений последняя величина станет значением первой.

10. Чтобы привести пример исключения, [лишь] упомянутый в начале предыдущего параграфа, примем, что $a = \infty$ и предположим, что закон вероятностей один и тот же для всех наблюдений и совпадает [вероятности совпадают] для равных и противоположных по знаку ошибок, так что углы (13) станут равными нулю. Примем $\gamma = 1$, $\gamma_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 1/3$, … и вообще $\gamma_l = 1/(l + 1)$, что приведет к

$$\rho_l = 2\int_0^\infty fx\cos[\alpha x/(l+1)]\,dx.$$

Пусть также

$fx = e^{\pm 2x}$; верхний (нижний) знаки имеют место при $x < 0$ и $x > 0$.

Тогда

$$\int_0^\infty fxdx = \int_0^{-\infty} fxdx = 1/2,$$

что удовлетворяет условию (2). Соответствующее значение ρ_l будет равно

$$\rho_l = 2\int_0^\infty e^{-2x}\cos[\alpha x/(l+1)]\,dx = 1 \div \{1 + [\alpha^2/4(l+1)^2]\}$$

и

$$1/R = [1 + (\alpha^2/4)]\,[1 + (\alpha^2/4\cdot 4)]\ \ [1 + (\alpha^2/4\cdot 9)]\ \dots\ \ [1 + (\alpha^2/4\cdot s^2)].$$

Поскольку число членов бесконечно, произведение равно $[e^{\pi\alpha/2} - e^{-\pi\alpha/2}]/\pi\alpha$, что соответствует известному разложению показательных функций в произведения этого вида. Мы получаем в конечной форме

$$R = \pi\alpha/[e^{\pi\alpha/2} - e^{-\pi\alpha/2}].$$

Подставляя это значение в формулу (11), учитывая, что $\psi = 0$ [см. (10)] и интегрируя по z, мы имеем

$$p = \int_0^\infty \{\sin[(b+c)\alpha]/[e^{\pi\alpha/2} - e^{-\pi\alpha/2}]\}\,d\alpha -$$

$$\int_0^\infty \{\sin[(b-c)\alpha]/[e^{\pi\alpha/2} - e^{-\pi\alpha/2}]\}\,d\alpha.$$

Точные значения этих интегралов вычисляются по известной формуле (Пуассон 1820, с. 297) и окончательно значение p равно

$$p = \frac{e^{2(b+c)} - 1}{2[e^{2(b+c)} + 1]} - \frac{e^{2(b-c)} - 1}{2[e^{2(b-c)} + 1]}.$$

Такова вероятность, что значение E, или ряд

$$\varepsilon + (1/2)\,\varepsilon_1 + (1/3)\,\varepsilon_2 + (1/4)\,\varepsilon_3 + \dots,$$

продолженный до бесконечности, заключен в границы $b - c$ и $b + c$. Если $b = 0$, то

$$p = (1 - e^{-2c})/(1 + e^{-2c}),$$

откуда следует, что не обязательно принимать очень большое c и взяв, например, $c > 5$, мы получаем весьма близкую к достоверности вероятность, что сумма E заключена между границами ± c. При $b = c$ вероятность этой сумме находиться между c и $2c$ вдвое меньше предыдущей.

Если закон вероятностей останется тем же, как и в только что рассмотренном примере, и если принять для коэффициентов (9) ряд 1, 1/3, 1/5, ..., то по формуле (11)

$$p = (2/\pi)\int\limits_{-c}^{c} \{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos[(b-z)\alpha]}{e^{\pi\alpha/4} + e^{-\pi\alpha/4}} d\alpha\}dz.$$

Но (Пуассон 1820, с. 298) внутренний интеграл равен

$$2/[e^{2(b-z)} + e^{-2(b-z)}],$$

что позволяет проинтегрировать по z и получить

$$p = (2/\pi)[\text{arctg}\ e^{-2(b-z)} - \text{arctg}\ e^{-2(b+z)}]$$

для вероятности ряду

$$\varepsilon + (1/3)\ \varepsilon_1 + (1/5)\ \varepsilon_2 + (1/7)\ \varepsilon_3 + \ldots,$$

продолженному до бесконечности, быть заключенным между $b - c$ и $b + c$. При $b = 0$ мы получим

$$p = (2/\pi)[\text{arctg}\ e^{2c} - \text{arctg}\ e^{-2c}],$$

т. е. величину, которая очень немного отличается от единицы [даже] если c не очень велико и превышает 5 или 6 единиц. При $b = c$ значение p окажется вдвое ниже.

Сравнивая эти результаты с полученными в предыдущем параграфе, мы видим, что вероятности значений E весьма различны в зависимости от того, образуют ли коэффициенты (9) неограниченно убывающий ряд или же они все конечны. Второй случай мы предположим впоследствии.

11. Наиболее часто величина, которая непосредственно задается наблюдениями, является не искомой неизвестной, а ее функцией, изменяющей свое значение от одного наблюдения к другому. Чтобы вычисления не оказались бесполезными, особенно при большом числе наблюдений, эта функция должна быть линейна.

Иначе, неизвестное должно быть довольно хорошо определено и его поправка, которую необходимо ввести, должна быть очень малой, чтобы можно было пренебрегать ее степенями выше первой. При этом функция окажется линейной относительно искомой поправки, которая и является истинной неизвестной в [поставленной] задаче.

Мы обозначим ее через u; A_l, приближенное значение функции, которое соответствует наблюдению (l + 1); $A_l + uq_l$ пусть будет ее исправленным значением и B_l, значением той же функции, данным тем же наблюдением; и ε_l, как и выше, – неизвестной ошибкой, которой оно подвержено. Тогда

$$B_l + \varepsilon_l = A_l + uq_l.$$

Если $B_l - A_l = \delta_l$, так что δ_l – избыток наблюденного значения над приближенным, то это уравнение преобразуется в

$$\varepsilon_l = uq_l - \delta_l.$$

Подобные же уравнения имеют место для каждого из s рассматриваемых наблюдений. Коэффициенты

$$q, q_1, q_2, \ldots \qquad (15)$$

и величины δ, δ_1, δ_2, … в каждом отдельном случае заданы. Из этой системы уравнений требуется вывести значение, наиболее независимое от ошибок наблюдения. С этой целью составляем сумму всех уравнений, умноженных на коэффициенты (9):

$$E = u\sum\gamma_l q_l - \sum\gamma_l\delta_l.$$

Здесь, как и выше, суммы распространены от $l = 0$ до $s - 1$. По мере возрастания s значение $(1/s)E$ стремится к $(1/s)\sum\gamma_l k_l$ и в то же время значение u стремится к

$$u = [\sum\gamma_l\delta_l/\sum\gamma_l q_l] + [\sum\gamma_l k_l/\sum\gamma_l q_l]. \qquad (16)$$

Принимая это значение для u, мы получим вероятность (8), что ошибка, которой следует опасаться, или разность между u и его истинным значением, будет заключена между границами

$$\pm\, 2r\sqrt{\sum\gamma_l^2 h_l^2}\, /\sum \ \gamma_l q_l.$$

При одной и той же вероятности эта ошибка будет тем меньше, чем меньше в полученном выражении коэффициент r и мы сможем выбрать такую систему множителей (9), для которой этот коэффициент минимален. Полагая его дифференциал по отношению к одному из неизвестных коэффициентов равным нулю, получим

$$\gamma_l h_l^2 \sum\gamma_l q_l - q_l\sum\gamma_l^2 h_l^2 = 0,\ \gamma_l = \mu q_l/h_l^2,$$

где μ – постоянный коэффициент, общий для всех множителей и остающийся совершенно произвольным. Это усматривается при подстановке полученного выражения для γ_l в предыдущее уравнение. Значение u становится равным

$$u = [\sum(q_l\delta_l/h_l^2)/\sum(q_l^2/h_l^2)] + [\sum(k_lq_l/h_l^2)/\sum(q_l^2/h_l^2)], \qquad (17)$$

а границы ошибки, которой следует опасаться,

$$\pm 2r/\sqrt{\sum q_l^2/h_l^2}\ .$$

12. В частном случае, когда вероятность ошибок одна и та же для всех наблюдений и, следовательно, все величины h, h_1, h_2, …, равно как и k, k_1, k_2, …, совпадают, мы просто имеем

$$u = [\sum q_l\delta_l/\sum q_l^2] + k\,[\sum q_l/\sum q_l^2] \qquad (18)$$

и границы ошибки, которой следует опасаться, будут

$$\pm 2rh \div \sqrt{\sum q_l^2}\ .$$

Если коэффициенты (15) образуют безгранично убывающий ряд, как например, 1,1/2, 1/3, …,

$$\sum q_l^2 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/25 + \ldots = \pi^2/6,$$

то [только что полученные] границы окажутся конечными и равными $\pm\, 2rh\sqrt{6}/\pi$, а не непрестанно сжимающимися по мере возрастания числа наблюдений. Но следует заметить, что коэффициенты (9), пропорциональные коэффициентам (15), [в этом случае] также образуют безгранично убывающий ряд. Таким образом, этот случай подходит к исключительному примеру § 11 и найденные нами формулы неприменимы. По существу, принимая тот же закон вероятностей ошибок как в том параграфе, мы получим

$$k = 0,\ h^2 = (1/2)\int_0^\infty e^{-x}\, x^2 dx = 1$$

и поскольку границы ошибки u равны $\pm\, 2r\sqrt{6}/\pi$, значение E будет находиться между $\pm\, (2r\sqrt{6}/\pi)\sum\gamma_l^2$ или между $\pm\, 2r\pi/\sqrt{6}$, а соответствующая вероятность окажется равной

$$[1 - e^{-4r\pi/\sqrt{6}}] \div [1 + e^{-4r\pi/\sqrt{6}}],$$

тогда как раньше, в соответствии с предыдущими формулами, она была равна (8) с интегралом, который начинался с r.

Снова предполагая, что одна и та же ошибка равновероятна во всех наблюдениях, и принимая все коэффициенты (9) равными единице, значение u, выведенное из уравнения (16), мы получим в виде

$$u = [\sum\delta_l/\sum q_l] + ks/\sum q_l, \qquad (19)$$

а границы ошибки, которой следует опасаться с вероятностью (8), окажутся равными $\pm\, 2rh\sqrt{s}/\sum q_l$.

Эти границы должны быть менее узкими, чем те, которые определены по формуле (18), соответствующей их минимальному протяжению. И поэтому, как легко проверить, без учета знаков должно выполняться неравенство

$$\left\lfloor \sum q_l \,/\, \sqrt{s\sum q_l^2} \right\rfloor < 1.$$

Обозначив сумму квадратов разностей взятых попарно коэффициентов (15) через Δ^2 и через Q сумму произведений этих пар, мы получим

$$\Delta^2 = (s-1)\sum q_l^2 - 2\mathrm{Q},\ (\sum q_l)^2 = \sum q_l^2 + 2Q, \qquad (20)$$

и потому

$$\Delta^2 = s\sum q_l^2 - (\sum q_l)^2,$$

откуда

$$\left\lfloor \sum q_l \,/\, \sqrt{s\sum q_l^2} \right\rfloor = \sqrt{1 - [\Delta^2/s\sum q_l^2]},$$

что очевидно меньше единицы, кроме как в случае, при котором коэффициенты (15) совпадают и $\Delta = 0$.

13. В соответствии с выражением для ε_l в § 11 мы имеем

$$\sum(\varepsilon_l - k)^2 = \sum(q_l u - \delta_l - k)^2$$

и если определять u под условием минимума этой суммы, то оно совпадет с формулой (18). Отсюда следует, что наиболее целесообразное определение u состоит в приведении к минимуму суммы квадратов ошибок всех наблюдений после вычитания из каждой из них величины k. И если предполагать $k = 0$, это и будет *МНКв ошибок*, что первым доказал месье Лаплас. Но если положительные и отрицательные ошибки не равновероятны, этот метод, как и обычный, при котором сумма ошибок приравнивается нулю, приводит к неполному значению u.

Чтобы завершить определение этого неизвестного, нужно в каждом отдельном случае знать величину постоянной k. Можно, однако, заметить, что коэффициент при k в формуле (18) меньше, чем в формуле (19), которая относится ко второму методу. Следовательно, отбрасывая член, содержащий k, рискуешь при использовании обычного метода совершить более крупную ошибку, чем при применении МНКв, и это является еще одним преимуществом последнего.

14. Предположим, что s рассматриваемых наблюдений состоят из многих групп с одним и тем же законом вероятностей. Пусть в первой группе s_1 наблюдений h_l и k_l принимают значения h и k; во второй группе, соответственно, s_2, h_1 и k_1 и т. д. По формуле (17) мы имеем для *u* выражение

$$\frac{(1/h^2)\sum_1 q_l\delta_l + (1/h_1^2)\sum_2 q_l\delta_l + ... + (k/h^2)\sum_1 q_l + (k_1/h_1^2)\sum_2 q_l + ...}{(1/h^2)\sum_1 q_l^2 + (1/h_1^2)\sum_2 q_l^2 + ...}$$

и границы ошибки, которой следует опасаться с вероятностью (8), будут

$$\pm \frac{2r}{\sqrt{(1/h^2)\sum_1 q_l^2 + (1/h_1^2)\sum_2 q_l^2 + ...}}.$$

Суммы относятся к соответствующим группам.

Это значение *u* не предполагает, что все числа s_1, s_2, … очень велики, для его применения достаточно, чтобы их сумма, т. е. *s*, было очень большим. И хотя s_1, s_2, … не обязательно очень велики, если определить значение *u* для каждой группы наблюдений по отдельности по правилу предыдущего параграфа, и обозначить результаты 1-й, 2-й, ... группы через U, U_1, U_2, … то

$$U\sum_1 q_l^2 = \sum_1 q_l\delta_l + k\sum_1 q_l,\ U_1\sum_2 q_l^2 = \sum_2 q_l\delta_l + k_1\sum_2 q_l,\ \ldots$$

Если, далее, для сокращения письма обозначить

$$(1/h^2)\sum_l q_l^2 = g,\ (1/h_1^2)\sum_2 q_l^2 = g_1,\ \ldots,$$

то предыдущее значение *u* станет равным

$$u = (gU + g_1U_1 + g_2U_2 + \ldots) \div (g + g_1 + g_2 + \ldots).$$

Эта формула служит для вычисления значения *u* как результата многих групп наблюдений различных классов, если для каждой из них в соответствии с правилом предыдущего параграфа известны эти [частные] значения, а также и величины g, g_1, g_2, … В то же время границы ошибки, которой следует опасаться с указанной выше вероятностью, принимают вид

$$\pm \frac{2r}{\sqrt{g + g_1 + g_2 + ...}}.$$

15. Применение предыдущих формул требует знания величин *k* и *h* для каждого вида наблюдений; *k* – чтобы образовать значение неизвестной, а *h* – чтобы оценить границы ошибки, которой следует опасаться с заданной вероятностью. По отношению к первой из этих величин наиболее естественно предположить ее равенство нулю, т. е. считать положительные и отрицательные ошибки равновозможными.

Но если это равенство не имеет места, то k не равно нулю и в большом числе случаев истинное значение k можно определить следующим образом. Пусть последовательно используются две различные системы коэффициентов (9), – $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ и $\gamma', \gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ и образованы два уравнения

$$\sum\gamma_l\varepsilon_l = u\sum\gamma_lq_l - \sum\gamma_l\delta_l, \sum\gamma'_l\varepsilon_l = u\sum\gamma'_lq_l - \sum\gamma'_l\delta_l.$$

Умножим первое из них на $\sum\gamma'_lq_l$ а второе на $\sum\gamma_lq_l$ и вычтем второе из первого. Тогда

$$\sum\gamma''_l\varepsilon_l = \sum\gamma_lq_l \sum\gamma'_l\delta_l - \sum\gamma'_lq_l \sum\gamma_l\delta_l.$$

Примем для сокращения письма [нет, это следствие]

$$\gamma_l\sum\gamma'_lq_l - \gamma'_l\sum\gamma_lq_l = \gamma''_l.$$

В соответствии со сказанным выше в § 9 имеется вероятность (8), что $\sum\gamma''_l\varepsilon_l$ заключено в границы

$$k\sum\gamma''_l \pm 2rh\sqrt{\sum\gamma_l''^2},$$

если закон вероятностей один и тот же для всех наблюдений и число s очень велико. И если принять $k\sum\gamma''_l$ за значение этой суммы, то соответствующее значение k окажется равным

$$k = [\sum\gamma_lq_l \sum\gamma'_l\delta_l - \sum\gamma'_lq_l \sum\gamma_l\delta_l] \div \sum\gamma''_l$$

и границы ошибки, которой следует опасаться в этом значении с указанной выше вероятностью, окажутся равными

$$\pm 2rh\sqrt{\sum\gamma_l''^2} \div \sum\gamma''_l.$$

Чтобы они оказались наиболее узкими, γ''_l должно быть постоянно относительно l; но легко видеть, что коэффициенты γ_l и γ'_l не могут этому соответствовать. Если принять один из них постоянным, а другой – пропорциональным q_l, то

$$\gamma''_l = \mu(q_l\sum q_l - \sum q_l^2),$$

где μ не зависит от l. В результате

$$\sum\gamma''^2_l = \mu^2[s\,(\sum q_l^2)^2 - (\sum q_l)^2 \sum q_l^2] = \mu^2\Delta^2\sum q_l^2,$$
$$\sum\gamma''_l = \mu[(\sum q_l)^2 - s\sum q_l^2] = -\,\mu\Delta^2,$$

причем Δ^2 имеет тот же смысл, что и в § 12. Значение k и границы ошибки, которой следует опасаться, становятся теперь равными

$$k = [\sum q_l \sum q_l\delta_l - \sum q_l^2 \sum\delta_l] \div \Delta^2 \text{ и } \pm (2rh/\Delta)\sqrt{\sum q_l^2}\ ,$$

а вероятность последних, как всегда, равна (8). Если сумма, выражаемая через Δ^2, очень велика по сравнению с $\sum q_l^2$, это значение k определяется с той же точностью, как и неизвестное u; но если коэффициенты (15) совпадают, или хотя бы если их разности очень малы, величина Δ становится равной нулю или очень малой и границы ошибки, которой следует опасаться в значении k, оказываются призрачными и не могут быть установлены никакими методами.

Если рассматриваемые наблюдения имеют целью определить коэффициент некоторого периодического неравенства и они притом охватывают весь период, сумма коэффициентов q, q_1, q_2, … все более и более приближается к нулю по мере того, как этот период делится на всё большее число частей или когда наблюдения умножаются. Пренебрегая суммой $\sum q_l$, мы получим $\Delta^2 = s\sum q_l^2$, и тогда значение k и границы ошибки, которой следует опасаться, будут

$$k = -\sum\delta_l/s \text{ и } \pm 2rh/\sqrt{s}.$$

Разделив, стало быть, в этом случае сумму величин δ, δ_1, δ_2, … на их число, мы сразу же установим, обладает ли k ощутимым значением, а полученное частное, взятое с противоположным знаком, весьма точно определит его.

16. Вместо попытки определить эту величину, можно постараться исключить ее из значения u. Для этого рассмотрим вновь общее выражение для u, даваемое формулой (16). Предположим, что величины k_l и h_l одни и те же для всех наблюдений, тогда это выражение и соответствующие границы ошибки будут

$$u = [\sum\gamma_l\delta_l/\sum\gamma_l q_l] + k[\sum\gamma_l/\sum\gamma_l q_l] \text{ и } \pm (2rh/\sum\gamma_l q_l)\sqrt{\sum\gamma_l^2}\ .$$

Допустим, что $\sum\gamma_l = 0$; это позволит определить один из сомножителей (9). Определим теперь границы наименьшей ошибки относительно всех остальных. Мы имеем два дифференциальных уравнения

$$\sum d\gamma_l = 0,\ \sum\gamma_l q_l \sum\gamma_l\, d\gamma_l - \sum\gamma_l^2\sum q_l\, d\gamma_l = 0.$$

Умножим первое на неопределенный множитель θ и сложим его со вторым, затем приравняем нулю коэффициент каждого дифференциала:

$$\theta + \gamma_l \sum \gamma_l q_l - q_l \gamma_l^2 = 0.$$

Значение γ_l, которое выводится из этого уравнения, имеет вид

$$\gamma_l = \mu q_l + \theta_1,$$

где μ и θ_1 – постоянные, которые следует определить. Подставив полученное значение γ_l в предыдущее уравнение и приравняв нулю по отдельности коэффициент при q_l вне знака суммы и член, постоянный относительно l, мы получим

$$\mu\theta_1\sum q_l + \theta_1^2 s = 0,\ \theta + \theta_1\mu\sum q_l^2 + \theta_1^2\sum q_l = 0,$$

откуда

$$\theta = -(\mu/s)\sum q_l,\ \theta_1 = (\mu^2/s^2)\ [s\sum q_l^2 - (\sum q_l)^2]\sum q_l.$$

Значение γ_l теперь оказывается равным

$$\gamma_l = \mu\ [q_l - (1/s)\sum q_l],$$

причем сомножитель μ остается неопределенным. Значение u теперь равно

$$u = [s\sum q_l\delta_l - (\sum q_l)^2] \div \Delta^2$$

с прежним обозначением для Δ^2. После всех преобразований границы ошибки, которой следует опасаться, будут с прежней вероятностью (8) равны $\pm\ (2rh\sqrt{s})/\Delta$.

Если Δ^2 очень мало относительно s, то эти границы будут призрачными и полученное значение u останется бесполезным; если [же] $\sum q_l$ очень мало, это значение и границы ошибки окажутся весьма незначительно отличающимися от значения, даваемого формулой (8), и соответствующих границ ошибки.

17. Займемся теперь определением величины h, которую необходимо знать, чтобы вычислить границы ошибок различных предыдущих формул. Для этого я замечу, что вместо рассматриваемой в §§ 1 и 2 суммы ошибок s наблюдений можно изучать сумму значений некоторой функции этих ошибок.

Вероятность p, что эта сумма заключена между двух заданных границ, $b - c$ и $b + c$, определяется при помощи анализа в указанных параграфах без новых затруднений.

Если обозначить эту функцию через φ, формула (1) снова определит значение p при подстановке φx вместо x в показательную функцию внутреннего интеграла и сохранении всех прежних обозначений. Если еще предположить, что s очень велико, обозначить

$$\int_{-a}^{a} fx\,\varphi x\,dx = K,\ \int_{-a}^{a} fx\,(\varphi x)^2 dx = K_1,\ (1/2)\,(K_1 - K^2) = H^2$$

и ошибки наблюдения принять, как всегда, равными $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, то, как и в § 7, мы получим вероятность (8) сумме

$$\varphi\varepsilon + \varphi\varepsilon_1 + \varphi\varepsilon_2 + \ldots + \varphi\varepsilon_{s-1} = \sum\varphi\varepsilon_l$$

быть заключенной в границах $Ks \pm 2rH\sqrt{s}$.

Следовательно, мы всегда можем выбрать число s достаточно большим, чтобы обеспечить заданную вероятность сколь угодно малого уклонения $(1/s)\sum\varphi\varepsilon_l$ от K. И, положив

$$(1/s)\sum\varphi\varepsilon_l = K,$$

мы получим границы ошибки, которой следует опасаться с вероятностью p, в виде $\pm\, 2rH/\sqrt{s}$. Пусть теперь $\varphi x = x^2$, так что K и величина k_1 из § 6 оказываются равными друг другу

$$K = k_1 = 2h^2 + k^2.$$

Предыдущее уравнение примет вид

$$h^2 + (1/2)\,k^2 = (1/2s)\sum\varepsilon_l^2.$$

Но (см. § 11)

$$\sum\varepsilon_l^2 = \sum(uq_l - \delta_l)^2.$$

Подставляя вместо u его значение по формуле (18), которая наименее подвержена ошибке, получим

$$2s[h^2 + (1/2)k^2]\sum q_l^2 = [\sum q_l\delta_l + k\sum q_l]^2 -$$
$$2[\sum q_l\delta_l + k\sum q_l]\sum q_l\delta_l + \sum q_l^2\sum\delta_l^2,$$

или, после преобразований,

$$2sh^2\sum q_l^2 + \Delta^2k^2 + (\sum q_l\delta_l)^2 - \sum q_l^2\sum\delta_l^2 = 0.$$

Это уравнение определит u, если известно k. Если положить $k = 0$ и приравнять все коэффициенты (15) друг другу, полученная формула совпадет с той, которую дал месье Лаплас в *Аналитической теории вероятностей*, с. 321 [с. 327 в издании 1886 г.]. В этом последнем случае $\Delta = 0$ и предыдущая формула приводит к

$$h^2 = \Delta_1^2/2s^2 \text{ или } h = \Delta_1/s\sqrt{2},$$

где Δ_1^2 обозначает по отношению к $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ то, что Δ^2 обозначает по отношению к величинам (15), т. е. сумму квадратов разностей взятых попарно величин $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$

Вообще ошибка, допускаемая, если принять за h только что найденное значение, зависит от ошибки, которой подвержено использованное значение u, и ошибки уравнения

$(1/s)\sum\varepsilon_l^2 = K.$

Поскольку границы последней зависят от нового неизвестного H, их нельзя точно оценить. Нельзя также точно оценить границы ошибки, которой следует опасаться в значении h; но это нисколько не мешает использовать его в формулах предыдущих параграфов, в которых оно умножается на весьма малые величины порядка $1/\sqrt{s}$.

VI. О вероятности среднего результата из наблюдений, часть 2-я

Poisson S. D. (1829), Suite du Mémoire sur la probabilité du résultat moyen des observations. *Connaissance des tem[p]s* pour 1832, pp. 3 – 22 второй пагинации

Я имею в виду добавить некоторые новые соображения в ту часть мемуара, которая относится к вероятности среднего арифметического из результатов очень большого числа наблюдений[1].

1. Допустим, что некоторая вещь[2], которую мы назовем для сокращения письма A, подвержена по своей природе всем значениям, заключенным между заданными границами a и b. Допустим, что x – одно из этих значений. Если произвести ряд наблюдений для определения A, вероятность, что значения некоторых из них не превзойдут A, будет, вообще говоря, изменяться от одного наблюдения к другому. Для n-го наблюдения мы представим ее как F_nx. Вероятность, что это значение в точности равно x, может быть лишь бесконечно малой, потому что число возможных значений бесконечно. Положим, что $dF_nx/dx = b_nx$, тогда она оказывается равной b_nxdx.

Обозначим через X заданную функцию x, непрестанно возрастающую от $x = a$ до b, и пусть ее крайние значения равны a_1 и b_1. Для большей общности будем отыскивать вероятность, что сумма значений X, составленная по некоторому числу s последовательных наблюдений, заключена между заданных границ.

Прежде всего допустим, что X подвержен лишь некоторому числу v значений, отстоящих друг от друга на равные расстояния w; впоследствии мы предположим, что v бесконечно, а w бесконечно мало. Предположим поэтому, что a_1 и b_1 кратны одной и той же величине w, так что $a_1 = p_1w$, $b_1 = q_1w$, где p_1 и q_1 – целые числа, положительные или отрицательные. Обозначим одно из промежуточных значений X через jw, где j – целое число или нуль, и пусть также $q_1 - p_1 = v - 1$, Q_n – вероятность, что значение x соответствует $X = jw$ для n-го наблюдения.

Наконец, обозначим через M вероятность, что при некотором числе наблюдений s сумма значений X будет равна mw, где m – целое число, лежащее между sp_1 и sq_1. Легко усмотреть, что M есть коэффициент при t^m в разложении

$$\sum t^jQ_1 \cdot \sum t^jQ_2 \cdot \sum t^jQ_3 \ldots \sum t^jQ_s$$

по степеням t. Каждая сумма распространена на все значения j от p_1 до q_1 и поэтому состоит из v членов. Можно также сказать, что M –

член, не зависящий от t в произведении этой функции t, умноженной на t^{-m}. И если заменить t на $e^{\theta i}$ и для сокращения письма обозначить через P получающееся при этом значение предыдущего произведения, то

$$M = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} Pe^{-m\theta i}\, d\theta,$$

где e это […], а π […].

Обозначим через p вероятность, что та же сумма v значений X заключена между границ μw и $\mu_1 w$, где μ и μ_1 – целые числа или нуль, и не выходит за границы sp_1 и sq_1. Ясно, что p это сумма значений M, которая получится, если придавать m все значения от μ до μ_1 включительно. И, учитывая сумму соответствующих значений множителя $e^{-m\theta i}$, мы имеем

$$p = (1/4\pi i)\int_{-\pi}^{\pi} P\,\{\exp[-\,\mu - (1/2)\theta i] - \exp[-\,\mu_1 - (1/2)\theta i]\}\; d\theta/\sin(\theta/2).$$

Наконец, пусть

$$\mu w = c - \varepsilon,\ \mu_1 w = c + \varepsilon,\ \theta/w = \alpha,$$

тогда

$$p = (w/2\pi)\int P\frac{\sin\{[\varepsilon + (1/2)w]\alpha\}}{\sin[(1/2)w\alpha\,]}\, e^{-c\alpha i} d\alpha$$

с пределами ± π/w по α. Если v бесконечно, или w бесконечно мало, они становятся бесконечными. Можно заменить $\varepsilon + (1/2)w$ на ε и $(2/w\alpha)\sin[(1/2)w\alpha]$ на единицу и при этом выражение для p преобразуется в

$$p = (1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} Pe^{-c\alpha i}\sin \varepsilon\alpha\; d\alpha/\alpha. \qquad (1)$$

В то же время величины jw и Q_n совпадают с X и $f_n x dx$; суммы, содержащиеся в P, преобразуются в определенные интегралы относительно x с пределами a и b, так что

$$P = \int_a^b f_1 x e^{X\alpha i} dx \int_a^b f_2 x e^{X\alpha i} dx \ldots \int_a^b f_s x e^{X\alpha i} dx. \qquad (2)$$

2. Формула (1) в наиболее общей форме представляет вероятность, что сумма s значений функции X, происходящих от того же числа последовательных наблюдений, находится между границ $c - \varepsilon$ и $c + \varepsilon$, которые заданы и лежат внутри sa_1 и sb_1. Если $X = x$, то p будет вероятностью, что значение A, выраженное средним из этих s наблюдений, окажется в границах $(1/s)$ $(c \pm \varepsilon)$. Поскольку результат каждого наблюдения должен быть по предположению заключен между a и b, то будут иметь место равенства

$$\int_a^b f_1x\,dx = 1,\ \int_a^b f_2x\,dx = 1,\ \ldots,\ \int_a^b f_sx\,dx = 1. \qquad (3)$$

Величины $f_1x, f_2x, \ldots$ являются произвольными функциями x, лишь бы все их значения были положительны и не превышали единицу. Если они заданы, можно точно вычислить p. Однако, наиболее часто закон вероятностей значений A неизвестен и изменяется от одного наблюдения к другому, так что s функций $f_1x, f_2x, \ldots$ являются столькими же неизвестными. Тем не менее, это не мешает в случае значительного числа наблюдений вывести из предыдущих формул тем более близкое [к действительности] значение p, чем больше число s.

Если $c - \varepsilon = s\mathrm{a}_1$ и $c + \varepsilon = sb_1$, то границы, соответствующие вероятности p совпадают с границами a_1 и b_1, которые по предположению содержат неизвестное значение X. Поэтому p должно быть достоверностью, т. е. равняться единице, что можно проверить.

Для этого заменим X и x на X_1 и x_1, X_2 и x_2, ..., X_s и x_s, в первом, во втором, ..., в последнем из s интегралов, произведение которых равно p. Подставим эти значения в p и, если

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_s = \sigma,$$

то уравнение (1) преобразуется в

$$p = (1/\pi)\int_a^b \int_a^b \ldots\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(\sigma-c)\alpha i}\sin\varepsilon\alpha(d\alpha/\alpha)]\, f_1xf_2x \ldots f_sxdx_1dx_2 \ldots dx_s. \qquad (4)$$

Но внутренний интеграл равен

$$(1/2)\int_{-\infty}^{\infty} \sin\,[(\varepsilon + \sigma - c)\alpha]\,(d\alpha/\alpha) + (1/2)\int_{-\infty}^{\infty} \sin\,[(\varepsilon - \sigma + c)\alpha]\,(d\alpha/\alpha).$$

В пределах интегрирования по x_1, x_2, ..., x_s сумма σ не может быть ни меньше, чем sa_1, ни больше, чем sb_1. В рассматриваемом нами случае оба коэффициента [величины α] $(\varepsilon + \sigma - c)$ и $(\varepsilon - \sigma + c)$ поэтому положительны и, следовательно, каждый из последних интегралов, как известно, равен π. Поэтому внутренний интеграл в (4) равен π, так что

$$p = \int_a^b \int_a^b \ldots\int_a^b f_1xf_2x \ldots f_sxdx_1dx_2 \ldots dx_s$$

и, ввиду уравнений (3), эта величина сводится к единице.

3. Снова из (3), а также потому, что f_nx принимает лишь положительные значения, оказывается, что

$$\int_a^b f_nx\cos\alpha X\,dx \text{ и } \int_a^b f_nx\sin\alpha X\,dx$$

менее единицы, так что можно полагать, что

$$\int_a^b f_n x \cos \alpha X \, dx = \rho_n \cos\varphi_n, \int_a^b f_n x \sin \alpha X \, dx = \rho_n \sin\varphi_n, \quad (5)$$

причем ρ_n и φ_n действительны и первое из них, можно считать, положительно. Примем далее

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \ldots \rho_s = R, \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_s = \psi$$

и тогда формула (2) становится

$$P = Re^{\psi i}.$$

Для двух равных и противоположных по знаку значений α соответствующие значения угла ψ окажутся также равными и противоположными по знаку, а значения R – равными и по величине, и по знаку. Имея это в виду, преобразуем формулу (1), используя значение P:

$$p = (2/\pi) \int_0^\infty R \cos (\psi - c\alpha) \sin \varepsilon\alpha \, d\alpha/\alpha. \quad (6)$$

Для $\alpha = 0$ каждый из сомножителей произведения R равен единице и менее единицы для всех иных значений α. Далее, ρ_n^2 может быть записано также в виде

$$\rho_n^2 = \int_a^b f_n x \cos \alpha X \, dx \int_a^b f_n x' \cos \alpha X' \, dx' +$$

$$\int_a^b f_n x \sin \alpha X \, dx \int_a^b f_n x' \sin \alpha X' \, dx',$$

где X' это значение X, в которое вместо x подставлено x'. Или иначе

$$\rho_n^2 = \int_a^b \int_a^b f_n x f_n x' \cos [\alpha(X - X')] dx dx'$$

и ясно, что значение ρ_n менее корня квадратного из полученного интеграла, взятого без косинуса, или менее однократного интеграла от $f_n x$ и потому меньше единицы. Отсюда следует, что когда число s этих сомножителей очень велико, произведение R принимает ощутимое значение лишь при очень малых значениях α. По этой причине можно получить приближенное значение интеграла по α в формуле (6).

4. Если для краткости принять

$$\int_a^b X f_n x \, dx = k_n, \int_a^b X^2 f_n x \, dx = k'_n \ldots$$

и разложить левые части уравнений (5) по степеням α, то

$$\rho_n\cos\varphi_n = 1 - (\alpha^2/2)k'_n + (\alpha^4/2 \cdot 3 \cdot 4)k'''_n - \ldots,$$
$$\rho_n\sin\varphi_n = \alpha k_n - (\alpha^3/2 \cdot 3)k''_n + \ldots$$

Величины k_n, k'_n, k''_n, … возрастают менее быстро, чем степени $(b_1 - a_1)$, $(b_1 - a_1)^2$, $(b_1 - a_1)^3$, … и этого достаточно, чтобы эти ряды всегда в конце-концов сходились, и, следовательно, чтобы можно было применить их вместо $\rho_n\cos\varphi_n$ и $\rho_n\sin\varphi_n$. Для ρ_n и φ_n можно вывести ряды, один из которых содержит только четные степени α, а другой – только нечетные:

$$\rho_n = 1 - \alpha^2 h_n + \alpha^4 l_n - \ldots,\ \varphi_n = \alpha k_n + \alpha^3 g_n - \ldots,$$

где принято для краткости

$$(1/2)(k'_n - k_n^2) = h_n,\ (1/6)(k''_n - 3k_n\, k'_n + 2k_n^3) = g_n \ldots,$$

и тогда

$$\ln \rho_n = -\alpha^2 h_n + \alpha^4[l_n - (1/2)h_n^2] + \ldots,\ \rho_n = \exp(-\alpha^2 h_n)\,\{1 + \alpha^4[l_n - (1/2)h_n^2] + \ldots\}.$$

Пусть, еще раз для сокращения письма,

$$\sum k_n = ks,\ \sum h_n = hs,\ \sum [l_n - (1/2)h_n^2] = ls,\ \ldots,$$

где суммы распространены от $n = 1$ до s. Тогда

$$K = \exp(-\alpha^2 hs)\,(1 + \alpha^4 ls + \ldots),\ \psi = \alpha ks - \alpha^3 gs + \ldots,$$
$$\cos(\psi - c\alpha) = \cos[(ks - c)\alpha] + \alpha^3 gs \sin[(ks - c)\alpha] + \ldots$$

Величины k, h, g, … могут изменяться вместе с s, но они не возрастают независимо от этого числа, а всегда, также как и интегралы k_n, k'_n, k''_n, …, которые их определяют, образуют ряд, который возрастает менее быстро, чем степенной ряд $(b_1 - a_1)$.

Я подставляю эти значения в формулу (6). Кроме того, я ввожу

$$\alpha = \beta/\sqrt{s},\ d\alpha = d\,\beta/\sqrt{s}$$

и пренебрегаю членами этой формулы порядка малости менее (1/*s*), т. е. членами, которые вне функций синуса и косинуса делятся на *s*. Таким образом,

$$p = (2/\pi)\int_0^\infty \exp(-\beta^2 h)\cos\{[(ks-c)\beta]/\sqrt{s}\}\sin(\varepsilon\beta/\sqrt{s})\,d\beta/\beta +$$

$$(2g/\pi\sqrt{s})\int_0^\infty \exp(-\beta^2 h)\sin\{[(ks-c)\beta]/\sqrt{s}\}\sin(\varepsilon\beta/\sqrt{s})\,\beta^2 d\beta. \quad (7)$$

Для определенности этих интегралов требуется, чтобы *h* было положительным, и это действительно имеет место. И, в соответствии со смыслом k_n и k'_n,

$$2h_n = \int_a^b X^2 f_n x\,dx \int_a^b f_n x'\,dx' - \int_a^b X f_n x\,dx \int_a^b X' f_n x'\,dx'.$$

Эти величины можно представить в виде одного двойного интеграла:

$$2h_n = \int_a^b \int_a^b (X^2 - XX') f_n x\, f_n x'\,dx\,dx',$$

или, что то же самое, в виде

$$2h_n = \int_a^b \int_a^b (X'^2 - XX') f_n x\, f_n x'\,dx\,dx'.$$

Объединяя эти два уравнения, мы получаем

$$4h_n = \int_a^b \int_a^b (X - X')^2 f_n x\, f_n x'\,dx\,dx'$$

и это значение очевидно положительно и не может равняться нулю, потому что все элементы двойного интеграла положительны. То же самое верно и для $\sum h_n$ и *h*. Отсюда по известным формулам можно вывести точное значение второго интеграла в формуле (7), а первый из них, если угодно, можно представить в более простом виде.

5. Если принять $c = \varepsilon$, то *p* станет вероятностью, что сумма значений *X*, данных *s* наблюдениями, не выйдет за границы 0 и 2ε. Дифференцируя *p* по ε, получим

$$(dp/d\varepsilon) = (2/\pi\sqrt{s})\int_0^\infty \exp(-\beta^2 h)\cos\{[(2\varepsilon - ks)\beta]/\sqrt{s}\}\,d\beta -$$

$$(2g/\pi\sqrt{s})\int_0^\infty \exp(-\beta^2 h)\sin\{[(2\varepsilon - ks)\beta]/\sqrt{s}\}\,\beta^3 d\beta$$

и $(dp/d\varepsilon)\,d\varepsilon$ будет бесконечно малой вероятностью, что сумма значений *X* в точности равна 2ε.

Пусть теперь

$$2\varepsilon = ks + 2u\sqrt{hs}\ ,$$

тогда

$$\int_0^\infty \exp(-\beta^2 h)\cos(2u\beta\sqrt{h})\,d\beta = (\sqrt{\pi/h}\,/2)\exp(-u^2),$$

откуда, дифференцируя по u, мы получим

$$\int_0^\infty \exp(-\beta^2 h)\sin(2u\beta\sqrt{h})\,\beta^3 d\beta = (\sqrt{\pi}/4h^2)(3u - 2u^3)\exp(-u^2).$$

Поскольку $(dp/du) = (dp/d\varepsilon)\sqrt{hs}$, то имеет место

$$(dp/du)\,(1/\sqrt{\pi})\exp(-u^2) - (g/4h\sqrt{hs}\,)(3u - 2u^3)\exp(-u^2) \qquad (8)$$

и если обозначить через X_n значение X, данное n-м наблюдением, то $(dp/du)du$ будет вероятностью, что

$$\sum X_n = ks + 2u\sqrt{hs}\,. \qquad (9)$$

Здесь сумма распространяется на все наблюдения. Я интегрирую $(dp/du)du$ между заданными пределами, которые обозначу через $\pm\,\gamma$, и тогда

$$p = (2/\sqrt{u})\int_0^\gamma \exp(-u^2)du \qquad (10)$$

окажется вероятностью, что $\sum X_n$ содержится внутри границ $ks \pm 2\gamma\sqrt{hs}$, а среднее значение X, или $(1/s)\sum X_n$ – внутри $k \pm 2\gamma\sqrt{h/s}$. Это можно также вывести из уравнения (7), приняв $c = ks$, $\varepsilon = 2\gamma\sqrt{hs}$ и произведя интегрирования.

Можно всегда принять γ достаточно большим, чтобы значение p отличалось от единицы сколь угодно мало. При $\gamma = 3$ мы получим, к примеру,

$$\int_\gamma^\infty \exp(-u^2)du = 0.000\ 019\ 577,$$

что вычислено по таблице Крампа (1799), которую можно найти для этого интеграла в конце его книги. И поскольку

$$\int_0^\gamma \exp(-u^2)du = (\sqrt{\pi}/2) - \int_\gamma^\infty \exp(-u^2)du,$$

оказывается, что $p = 1 - 0.000\ 022\ 091$, что очень мало отличается от достоверности. Позволительно поэтому считать крайне вероятным, что значение $(1/s)\sum X_n$, выведенное из наблюдений, неограниченно стремится стать равным k, и если принять это среднее за значение k, то ошибка, которой можно опасаться, будет меньше чем $2\gamma\sqrt{h/s}$ с избытком и недостатком, где γ незначительная величина.

Уместно заметить, что члены, которые делятся на s, пренебреженные при переходе от уравнения (6) к формуле (7), после интегрирования по u умножаются на exp $(-\gamma^2)$ и становятся еще меньше вне зависимости от величины s. К примеру, при $\gamma = 3/2$ этот множитель меньше 0.002 и очень быстро убывает [еще больше] при бóльших значениях γ.

6. Кривая, уравнение которой

$$y = f_n x,$$

представляет закон вероятностей значений A для n-го наблюдения в том смысле, что элемент ydx ее площади является вероятностью значения A, выраженного соответствующей абсциссой x, а сама площадь, – вероятностью, что это значение не превышает x.

Кривая, уравнение которой

$$y = (1/\mathrm{s})\sum f_n x,$$

является кривой средней вероятности относительно ряда s наблюдений. В соответствии с уравнением (3) ее полная площадь от $x = a$ до b равна единице. И если x_1 – абсцисса ее центра тяжести, то

$$(1/s)\sum \int_a^b x f_n x dx = x_1,$$

или, если в выражении для k_n из § 4 принять $X = x$, то

$$k_n = \int_a^b x f_n x dx,\ k = (1/\mathrm{s})\sum \int_a^b x f_n x dx = x_1,$$

притом эта абсцисса x_1 во всех случаях является пределом, к которому неограниченно стремится средний результат ряда наблюдений. Обозначив частное значение A, данное n-м наблюдением, через λ_n, мы получим средний результат, о котором идет речь, равным $(1/s)\sum\lambda_n$. И формула (10) указывает вероятность p того, что этот результат заключен в границах

$$x_1 \pm 2\gamma\sqrt{h/s}\ .$$

Если в выражении для h из § 4 принять также $X = x$, то

$$h = (1/2s)\sum\ \{\int_a^b x^2 f_n x dx - [\int_a^b x f_n x dx]^2\}. \qquad (11)$$

Этот результат можно представить в иной форме, если принять в соответствии с уравнением (10)

$$u\sqrt{h} = v,\ \gamma\sqrt{h} = \delta.$$

Именно,

$$p = (2/\sqrt{\pi h})\int_0^\delta \exp(-v^2/h)dv \qquad (12)$$

будет вероятностью, что значение $(1/s)\sum\lambda_n$ находится внутри границ

$$x_1 \pm 2\delta/\surd s.$$

Бесконечно малая вероятность промежуточного значения $x_1 + 2v/\surd s$ определяется по формуле (8) при подстановке $v/\surd h$ вместо v и умножении на $dv/\surd h$. При заданном значении δ эта вероятность зависит от двух неизвестных величин, h и g, тогда как для вероятности предыдущих границ, знание которых достаточно, требуется одно-единственное неизвестное h, и нам осталось установить его значение по результатам s наблюдений.

7. Пусть

$$x = x_1 + z, f_nx = f'_nz, a = x_1 + + a', b = x_1 + b',$$

тогда

$$\int_{a'}^{b'} f'_nzdz = 1, \int_{a'}^{b'} zf'_nzdz = 0.$$

Уравнение (11) переходит в

$$h = (1/2s)\sum\int_{a'}^{b'} z^2f'_nzdz$$

и если принять

$$X = (x - x_1)^2 = z^2,$$

то величина k из § 4 окажется вдвое больше этого значения h. По формуле (8) бесконечно малая вероятность уравнения (9) имеет вид

$$(du/\surd\pi)\exp(-u^2) + uUdu.$$

Здесь U – функция u, принимающая равные значения одного и того же знака при равных и противоположных по знаку значениях u порядка $(1/\surd s)$. Применяя это уравнение (9) к предыдущему значению X и соответственно заменяя k на $2h$, мы получаем

$$h = (1/2s)\sum(\lambda_n - x_1)^2 + u\sigma,$$

где σ – величина того же порядка $(1/\sqrt{s})$, не зависящая от u. Те же формулы (8) и (9), приложенные к случаю $X = x$, дают

$$x_1 = (1/s)\sum\lambda_n + u'\sigma'$$

с вероятностью этого уравнения, равной

$$(du'/\sqrt{\pi}) \exp(-u'^2) + u'U'du'.$$

Величины σ′ и U' имеют порядок $(1/\sqrt{s})$; первая из них независима от u', вторая же является функцией этого аргумента, которая не меняет ни знака, ни величины для его равных и противоположных по знаку значений. Вероятность, что эти два последних уравнения имеют место одновременно, равна произведению их соответствующих вероятностей, как если бы они были двумя не зависимыми друг от друга событиями. Поскольку вероятность каждого бесконечно мала, существование одного может изменить вероятность другого лишь на бесконечно малую величину второго порядка. И поэтому, если из обоих уравнений исключить x_1 и для сокращения письма положить

$$(1/s)\sum\lambda_n = m,\ (1/s)\sum(\lambda_n - m)\sigma' = \lambda,\ (1/2s)\sum(\lambda_n - m)^2 = \mu,$$

то, пренебрегая квадратом σ′, мы получим

$$h = \mu + u\sigma - u'\lambda,$$

а вероятность этого значения h есть бесконечно малая второго порядка

$$[(1/\pi)\exp(-u^2)\exp(-u'^2) + uu'U' + u'uU]\,dudu'$$

Произведением UU', которое по предположению является величиной порядка $(1/s)$, мы тоже пренебрегаем. Я подставляю это значение h в формулу (12) и раскладываю [подынтегральную функцию] по степеням $u\sigma - u'\lambda$, но пренебрегаю квадратом этой величины порядка $(1/s)$:

$$p = (2/\sqrt{\pi\mu})\int_0^\delta \exp(-v^2/\mu)\,dv + p'(u\sigma - u'\lambda),$$

где p' есть значение (dp/du) при $h = \mu$.

Это значение p является вероятностью границ $x_1 \pm 2\delta/\sqrt{s}$ среднего результата $(1/s)\sum\lambda_n$, если подставленное значение h считать достоверным. Но различные значения этой величины лишь вероятны и вероятность указанных границ, соответствующая каждому, равна произведению соответствующего значения p, умноженного на вероятность значения h.

Следовательно, полная вероятность этих границ или их вероятность относительно всех значений h будет интегралом этого произведения, распространенным на все значения u и u', при которых коэффициент при $dudu'$ не сделает их неощутимыми. После этого, каждый раз пренебрегая величинами порядка $(1/s)$ и замечая, что члены, умноженные на нечетные степени u или u', исчезают при интегрировании, мы получим для искомой вероятности

$$(2/\pi\sqrt{\pi\mu})\int_0^\delta \exp(-v^2/\mu)dv\int\int \exp(-u^2)\exp(-u'^2)\,dudu'.$$

Поскольку допустимо без ощутимой ошибки распространить двойной интеграл по u и u' от $-\infty$ до ∞, выведенное выражение преобразуется в формулу (12), если только заменить в ней h на μ. Итак, при принятой степени приближения, т. е. пренебрегая величинами порядка $(1/s)$, μ есть значение h, которое следует подставить в формулу (12), или, лучше сказать, в границы для среднего результата $(1/s)\sum\lambda_n$, которым соответствует формула (10). Это значение h можно записать в двух видах,

$$h = (1/2s)\sum(\lambda_n - m)^2,\ h = (1/2s^2)\sum[s\lambda_n^2 - (\sum\lambda_n)^2], \qquad (13)$$

равносильных, поскольку принято, что $(1/s)\sum\lambda_n = m$. Численное вычисление по первому из них всегда нетрудно по уклонениям наблюдений по обе стороны от среднего, т. е. по значениям $(\lambda_n - m)$. Второй же вид обычно намного менее удобен для этого и вычисление часто оказывается невозможным.

Формула (12) и значение h в функции данных наблюдения были получены Лапласом, который нашел для своих результатов большое число интересных применений. Лагранж (1776) первым подверг анализу вероятность среднего арифметического из результатов наблюдения, но он предположил, что закон вероятностей значений неизвестного задан, Лаплас же доказал, что при большом числе наблюдений вероятность среднего результата не зависит от этого закона.

Предыдущий анализ, как мне кажется, подходящ, чтобы развеять сомнения, которые могли еще оставаться по поводу применения значения h и относительно степени точности формулы (12), см. Лаплас (1816, с. 7 [видимо с. 503 в издании 1886 г.]).

8. Величина x_1, к которой сходится средний результат наблюдений при возрастании их числа, не обязательно является тем значением A, которое обладает наивысшей вероятностью и получается наиболее часто из отдельных наблюдений. Возможно даже, что его вероятность равна нулю, т. е. что это значение A не может быть получено никаким наблюдением.

Так происходит, например, если все функции $f_n x$ равны нулю для одного и того же значения x и симметричны относительно этого значения. В общем случае, который мы рассматриваем, т. е. когда кривая вероятностей с уравнением $y = f_n x$ изменяется от одного наблюдения к другому, может также оказаться, что ординаты центров тяжести площадей этих кривых не совпадают и абсцисса x_1 изменяется с числом s наблюдений. Если разделить s на две части, s_1 и s_2, и полагать притом оба этих числа очень большими, то средние результаты двух соответствующих рядов наблюдений не будут совпадать, хоть для каждого из них ошибка, которой следует опасаться, очень мала, а вероятность очень высока.

Вычисление *среднего срока жизни* было одним из более остроумных приложений предыдущих формул. Предположим, что рассматривается очень большое число s, например миллион, детей, рожденных в одно и то же время. Если обозначить какой-то момент времени через x и через $f_n x dx$ бесконечно малую вероятность, что один из этих детей переживет x; и если относиться к продолжительности жизни как к возможному *выигрышу*, то сумма всех возможных значений x, умноженных на их соответствующие вероятности, или $\int x f_n x dx$, окажется *выгодой* этого ребенка или ожиданием его жизни.

Следовательно, средняя жизнь будет суммой таких интегралов для всех детей, деленной на их число, или $(1/s)\sum\int x f_n x dx$. Каждый интеграл распространен от $x = 0$ до такого значения, при котором $f_n x$ станет равным нулю или неощутимым и которое можно считать пределом человеческой жизни. Иначе, это величина, которую мы обозначили через x_1; ее приближенное значение равно $(1/s)\sum\lambda_n$, если принять $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ за те возрасты, в которых умирает s других лиц, рожденных в том же государстве, что и дети, о которых идет речь, и насколько возможно в то же время, что и те.

Эти же значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ служат для вычисления вероятности того, что разность $x_1 - (1/s)\sum\lambda_n$ или ошибка значения $x_1 = (1/s)\sum\lambda_n$ заключена в заданные границы. Неизвестные функции $f_n x$ весьма различны [даже] для детей, рожденных в то же время в одном и том же государстве, но средняя функция $(1/s)\sum f_n x$, а потому и средняя жизнь $(1/s)\sum\int x f_n x dx$ без сомнения изменяется лишь медленно с исчезновением болезней и совершенствованием общества. Один только опыт может установить, постоянен ли этот срок жизни или существенно изменяется после большого промежутка времени.

Те же принципы служат для подсчета средней выгоды и ее вероятности, которых можно достичь очень большим числом спекуляций, по известным потерям и выгодам другого очень большого числа подобных действий, т. е. предполагая у последних ту же самую среднюю вероятность.

9. Если предложено определить по ряду наблюдений величину какого-нибудь явления [например, показание барометра, см. ниже] или меру некоторой вещи A, то молчаливо предполагают, что среди всех априорно возможных значений A существует одно такое, уклонения в обе стороны от которого равновероятны для каждого наблюдения. Допускают также, что это неизвестное значение постоянно для всех предстоящих наблюдений и это то самое значение A, которое желательно определить.

Иначе говоря, все кривые, определяемые уравнениями $y = f_n x$, предположены симметричными относительно одной из своих точек, которая соответствует одной и той же абсциссе для различных кривых $f_n x$, т. е. абсциссе, представляющей неизвестное значение A. В соответствии с этим предположением, центры тяжести площадей этих кривых, равно как и центр тяжести средней кривой, уравнение которой $y = (1/s)\sum f_n x$, лежат на общей ординате, соответствующей указанной абсциссе.

При умножении наблюдений величина x_1, к которой они неограниченно приближаются, постоянна, независима от их числа s. И существует вероятность p, определяемая уравнением (10), что средний результат наблюдений $(1/s)\sum\lambda_n$ не уклоняется от x_1 или от истинного значения A, ни больше, ни меньше, чем на $2\gamma\sqrt{h/s}$.

Значение h, как было сказано выше, также дается наблюдениями и зависит от своей степени точности. Если, например, речь идет об измерении угла, значения h, выведенные из двух рядов наблюдений, могут весьма отличаться друг от друга либо ввиду различия примененных приборов, либо ввиду перемены наблюдателей. Если же исследуемая величина является, например, разностью показаний барометра в двух определенных временах суток, то h будет зависеть еще от случайных и переменных причин, которые могут быть приписаны состоянию атмосферы, и неодинаково влияющих на эти показания[3].

Однако, как ни узки границы $2\gamma\sqrt{h/s}$ ошибки, которой следует опасаться при допущении $(1/s)\sum\lambda_n$ за значение A, и сколь ни были бы они вероятны, нельзя терять из виду, что это значение получено в предположении, что все функции $f_n x$ симметричны относительно одного и того же значения x.

Если какая-либо неизвестная причина, как погрешности прибора или переменные обстоятельства, которые влияют на события, приведут к преобладанию ошибок того или другого знака, или, еще проще, если величина A изменяется в течение наблюдений, это предположение не будет выполнено. Величина $(1/s)\sum\lambda_n$ по-прежнему будет иметь значение, приближающееся к абсциссе x_1, которая уже не представляет искомую вещь, и наблюдения следует отбросить.

Важно поэтому определять по самим наблюдениям, соответствуют ли они предположению о симметрии $f_n x$, или, иначе, существуют ли условия, которым они должны были удовлетворять, чтобы указанная предпосылка могла была быть применена к закону вероятностей значений A.

10. Мы установим подобное условие, если примем за X некоторую нечетную функцию $x - x_1$, т. е., если обозначим через j положительное и нечетное число и допустим, что

$$X = (x - x_1)^j.$$

В соответствии с обозначениями § 7, величины k_n и k'_n из § 4 будут

$$k_n = \int_{a'}^{b'} z'f'_n\, z dz,\ k'_n = \int_{a'}^{b'} z^{2j} f'_n\, z dz.$$

В предположении, что все функции $f_n\, x$ симметричны относительно одного и того же значения x, это значение должно совпадать с x_1 и потому

$$f'_n\, z = f'_n\, (-z),\ a' = b'$$

и $k_n = 0$. Величины k и h из § 4 теперь равны

$$k = 0,\ h = (1/s) \sum \int_{0}^{b'} z^{2j} f'_n\, z dz.$$

По § 5 существует вероятность p, определяемая формулой (10), что без учета знака $\sum(\lambda_n - x_1)^j$ меньше, чем $2\gamma\sqrt{hs}$. Эта вероятность, к примеру, равна 1/2, если принять $\gamma = 0.47614$. Но число s наблюдений очень велико, и весьма вероятно, что их средний результат $(1/s)\sum\lambda_n$ очень мало отличается от x_1 и что в то же время сумма $\sum(\lambda_n - x_1)^{2j}$ почти равна

$$\sum \int_{-b'}^{b'} z^{2j} f'_n\, z dz$$

или $2hs$. Поэтому, если для краткости обозначить

$$(1/2)\sum\lambda_n = m,\ \frac{\sum(\lambda_n - m)^j}{\sqrt{\sum(\lambda_n - m)^{2j}}} = r,$$

то с вероятностью, очень мало отличающейся от p, это отношение r окажется меньше, чем $\gamma\sqrt{2}$. И если принять γ за то значение, которое приводит к вероятности ½, то можно почти на равных держать пари, что

$$r < 0.47614\sqrt{2} \text{ или } r < 0.67336,$$

если предположение $f'z = f'(-z)$ действительно имеет место.

Следовательно, если r, вычисленное для какого-то определенного показателя степени, превысит 0.67336, или даже будет немного меньше этой дроби, то предположение $f'z = f'(-z)$ не представится вероятным, а наблюдения придется, следовательно, отбросить как не подходящие для установления искомого истинного значения A.

11. В большем числе случаев и особенно в вопросах астрономии величина, которую предполагается определить по наблюдениям, является заданной функцией многих также уже приближенно известных элементов. Они требуют лишь очень малых поправок, так что их произведениями и степенями выше первой можно пренебречь. Заданная функция поэтому становится линейной относительно этих неизвестных поправок и ее последовательно приравнивают всем значениям, выводимым из наблюдений. Это приводит к стольким же исходным уравнениям, сколько было этих наблюдений.

Применение этих линейных уравнений для определения поправок элементов по большому числу наблюдений смогло серьезно усовершенствовать астрономические таблицы. Представляется, что Эйлер и Майер первыми применили их, один [Майер] – в своем мемуаре о либрации Луны, второй [Эйлер] – в своем труде о возмущениях Юпитера и Сатурна, награжденном нашей Академией в 1750 г.

Число исходных уравнений, однако, всегда больше числа неизвестных, что затрудняет их решение. В зависимости от применяемых ими методов, вычислители могут вывести из одной и той же системы уравнений различные результаты, и это приводит к серьезным затруднениям. Они сохранялись до тех пор, пока месье Лежандр не предложил прямой и единообразный метод, всеобще принятый под названием *метод наименьших квадратов ошибок*, данным ему его автором. Известно, что этот метод состоит в том, чтобы извлечь из каждого наблюдения линейную функцию, для которой оно представляет приближенное значение. Разность является ошибкой наблюдения. Вычисляют сумму квадратов всех этих разностей и приравнивают нулю ее дифференциалы, взятые последовательно по поправкам всех элементов. Это даст столько же уравнений, сколько неизвестных требуется определить. Обладай этот метод лишь преимуществом единообразия и исключения всякой неопределенности из вычислений, он уже оказал бы серьезную услугу нашему прославленному собрату в экспериментальных науках.

Но этот метод еще тем целесообразен, что оставляет опасаться минимума ошибки в значении каждого неизвестного, как Лаплас доказал при помощи исчисления вероятностей. Добавим в заключение этого мемуара, что, если, после вычисления поправок в элементы по МНКв и подстановки их значений в линейные выражения ошибок наблюдения, найти сумму нечетных степеней всех ошибок и разделить ее на корень квадратный из суммы их удвоенных степеней, то частное окажется критерием, в соответствии с которым следует либо отбросить, либо принять результаты наблюдений, – принять, если к тому же они обладают достаточной вероятностью.

По существу оказывается весьма вероятным, что это частное должно быть незначительной дробью, а достаточно сложным вычислением можно установить, каково бы ни было число исправляемых элементов, точное значение этой дроби для определенной степени вероятности.

Примечания

1. Автор чуть изменил название 2-й части мемуара.

2. Эта *вещь A*, как оказывается, случайна, однако через несколько строк выясняется противное.

3. Чувствуется, что Пуассон не был знаком с полевыми геодезическими работами, результаты которых также весьма чувствительны к состояниям атмосферы.

VII. Заметка о среднем результате наблюдений

Poisson S. D. (1830), Note sur la probabilité du résultat moyen des observations. *Bull. Universel des Sciences et des Industrie*. Section 1. *Bull. des Sciences Math., Astron., Phys. et Chim.*, t. 13, pp. 266 – 271

Примечание переводчика

В этой заметке Пуассон подошел к доказательству устойчивости нормального распределения, о которой было известно Лапласу и Гауссу и которую Бессель доказал в 1838 г. Заметим, однако, что он не доказал и не смог бы доказать ошибочную формулу (3), но и не использовал ее.

Вот задача, которую решал здесь Пуассон. Две случайные величины распределены по одному и тому же нормальному закону, третья же является их линейной функцией с численными коэффициентами k_1 и k_2. Каково, спрашивается, распределение ($k_1\bar{x}+k_2\bar{y}$), где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – средние из результатов наблюдений первых двух случайных величин?

Лапласу мы обязаны формулой, по которой определяется эта вероятность в случае очень большого числа наблюдений и которая не зависит ни от какого закона возможностей ошибок, лишь бы равные ошибки противоположных знаков были равно возможны. Эта формула, как я уже показал в своем последнем мемуаре (1829), посвященном данной теме [см. в этом сборнике], не предполагает, что неизвестный закон возможностей остается тем же самым для всего ряда наблюдений. Мы, стало быть, можем применять указанную формулу к наблюдениям, произведенным различными наблюдателями при помощи различных приборов.

Вот в чем состоит эта формула. Ее прославленный автор привел ее и нашел для нее в своей *Аналитической теории вероятностей* интереснейшие приложения. Назовем A некоторую измеряемую вещь , а x – ее неизвестную величину. Пусть число произведенных измерений равно n, а полученные при этом равные или неравные значения обозначим $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Если их сумма s, а m – их среднее, то

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \quad m = s/n.$$

Вычтем m последовательно из значений $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, что даст уклонения в обе стороны от среднего. Они, как правило, очень невелики и по ним обычно судят о достоинстве наблюдений. Полусумму их квадратов назовем h:

$$2h = (a_1 - m)^2 + (a_2 - m)^2 + \dots + (a_n - m)^2. \qquad (1)$$

Существует некоторая вероятность p, что ошибка, которой следует опасаться, если принять m за значение A, заключена между границ

$$\pm 2\alpha\sqrt{h/n}.$$

Иначе говоря, – вероятность разности $x - m$ не превзойти без учета знака $2\alpha\sqrt{h/n}$. Здесь α – произвольно принимаемый числовой коэффициент, от которого зависит p. И, если n – большое число и пренебречь величинами порядка $(1/n)$, то значение p выразится формулой

$$p = (2/\sqrt{\pi})\int_0^{\alpha} \exp(-t^2)dt, \tag{2}$$

в которой e […], а π […]

В конце книги Крамп (1799) находится таблица численных значений этого интеграла, из которой следует, что вероятность p быстро сходится к достоверности по мере возрастания α. К примеру, отличие от достоверности не более 0.0005 [уже] при малозначащем 2α, таким как $2\alpha = 5$.

Если желательно иметь $p = 1/2$, следует принять α почти равным 0.4764. Итак, можно держать пари на равных, что ошибка, которой следует опасаться в среднем результате большого числа n наблюдений, будет заключена в границах

$$\pm (0.9528/n)\sqrt{h}.$$

Значение h определяется по уклонениям при помощи уравнения (1), которое можно записать и в виде

$$2h = (1/n)s - (1/n^2)\sigma, \tag{3}$$

где σ – сумма квадратов n величин $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ и s как всегда сумма этих же величин. Доказательство уравнения (2) основано на методе, который Лаплас использовал для сведения в сходящиеся ряды интегралов от показательных функций очень больших чисел. Его доказательство для случая одного непосредственно измеренного неизвестного можно сразу распространить на линейную функцию двух или более неизвестных, каждое из которых измерено очень большое число раз.

Действительно, если выражение закона возможностей ошибок каждого неизвестного задано, можно немедленно вывести закон ошибок для этой функции. Чтобы показать это, примем, что A, A_1 и C – три какие-то вещи, чьи неизвестные значения обозначим x, x_1 и z пусть, далее, они связаны уравнением

$$z = kx + k_1x_1,$$

в котором k и k_1 – данные коэффициенты. A и A_1 измерены непосредственно очень большое число раз n и n_1; средние результаты наблюдений пусть будут m и m_1, а h и h_1, – полусуммы квадратов уклонений. Для сокращения письма положим, что

$$\beta = 2\alpha\sqrt{h/n},\ \beta_1 = 2\alpha\sqrt{h/n_1}.$$

Тогда будет иметь место вероятность p, данная формулой (1), что разности $x - m$ и $x_1 - m_1$ окажутся в границах $\pm \beta$ и $\pm \beta_1$. Или, если

$$\gamma = \sqrt{k^2\beta^2 + k_1^2\beta_1^2}\ ,$$

то та же вероятность будет иметь место, что ошибка, которой следует опасаться в значении $km + k_1m_1$ величины C, окажется в границах ± γ, или что разность без учета знака $z - km - k_1m_1$ не превзойдет γ.

Если

$$x = m + v,\ x_1 = m_1 + v_1,$$

то бесконечно малые вероятности ошибок v и v_1 окажутся, как известно, равными

$$(n/2\sqrt{\pi h})\ \exp\ (-\ n^2v^2/4h)\ dv \text{ и } (n_1/2\sqrt{\pi h_1})\ \exp\ (-\ n_1^2v_1^2/4h_1)dv_1,$$

где члены порядка $(1/n)$ и $(1/n_1)$ не учтены. Кроме того, заранее отброшены члены порядка $(1/\surd n)$ и $(1/\surd n_1)$, которые включают лишь нечетные степени v или v_1, и по этой причине исчезают из окончательного результата, точного до величин порядка их квадратов и произведений.

Вероятность, что эти две ошибки, v и v_1, имеют место одновременно, является произведением двух предшествующих вероятностей, т. е. равна

$$(\alpha^2/\pi\beta\beta_1)\ \exp\ \{-\ \alpha^2\ [(v^2/\beta^2) + (v_1^2/\beta_1^2)]\}dvdv_1.$$

Если

$$kv + k_1v_1 = u, \qquad (4)$$

то при интегрировании предыдущей формулы и распространении интегралов на все значения v и v_1, которые удовлетворяют этому уравнению, будет получена бесконечно малая вероятность, что ошибка значения C, равного $km + k_1m_1$, оказывается в точности равной u. Или, если

$$v = [u/(k + k_1) + k_1\theta,\ v_1 = [u/(k + k_1) - k\theta,$$

то при любом θ будет иметь место (4). Следует поэтому распространить интеграл по θ от $-\ \infty$ до ∞, а при подстановке переменных u и θ вместо v и v_1 по известному правилу преобразования двойных интегралов будет

$$dvdv_1 = dud\theta,$$

$$(\alpha^2/\pi\beta\beta_1)du\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{\alpha^2\gamma^2\theta^2}{\beta^2{\beta_1}^2}-\frac{2\alpha^2(k_1{\beta_1}^2-k\beta^2)u\theta}{\beta^2{\beta_1}^2(k+k_1)}]\,d\theta\right]\cdot$$

$$\exp\ [-\ \frac{\alpha^2(\beta^2+{\beta_1}^2)u^2}{\beta^2{\beta_1}^2(k+k_1)^2}].$$

Таковой окажется вероятность ошибки u, если γ имеет то же значение, что и выше. Но в соответствии с известной формулой интеграл по θ равен

$$(\beta\beta_1\sqrt{\pi}/\alpha\gamma)\ \exp\left[\frac{\alpha^2(k_1\beta_1{}^2 - k\beta^2)^2u^2}{\beta^2\beta_1{}^2\gamma^2(k+k_1)^2}\right]$$

и эта вероятность оказывается равной

$$(\alpha du/\gamma\sqrt{\pi})\ \exp\,(-\,\alpha^2u^2/\gamma^2).$$

И поэтому, если q – вероятность ошибки, которой следует опасаться в значении $km + k_1m_1$ неизвестного C, быть заключенной в границах ± γ, то

$$q = (\alpha/\gamma\sqrt{\pi})\int_{-\gamma}^{\gamma}\exp\,(-\,\alpha^2u^2/\gamma^2)du.$$

Пусть $(\alpha u/\gamma) = t$, $(\alpha du/\gamma) = dt$. Тогда окончательно

$$q = (1/\sqrt{\pi})\int_{-\alpha}^{\alpha}\exp\,(-\,t^2)dt,$$

т. е. $q = p$ и это то, что надо было доказать.

Этот результат распространяется на линейную функцию трех и более неизвестных и соответствует правилу, объявленному без вывода для произвольной функции (Фурье 1829).

Хотя формула (2) обычно не зависит от закона возможностей ошибок, я (1824) [см. в этом сборнике] всё же заметил, что существует особый случай, при котором это не имеет места и границы ошибки, которой следует опасаться при заданной вероятности в среднем результате, не стремятся по мере возрастания числа наблюдений всё ближе к истинному значению неизвестного. В этом исключительном случае, который можно не рассматривать в практике, правило о функции многих неизвестных равным образом отпадает.

Библиография

ИМИ = Историко-математич. исследования

Бернулли Д. (Bernoulli D.), (1738, латинск.), Опыт новой теории измерения жребия. В книге *Теория потребительского поведения и спроса*. СПб, 1999, с. 11 – 27. Перевод с немецкого перевода.

--- (1766), Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l’inoculer pour la prévenir. *Werke*, Bd. 2. Basel, 1982, pp. 235 – 267.

Блажко С. Н. (1947), *Курс общей астрономии.* М. – Л.

Лаплас П. С., Laplace P. S. (1781), Sur les probabilités. OC, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.

--- (1785 – 1786), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres, suite. OC, t. 10. Paris, 1894, pp. 295 – 338.

--- (1796, франц.), *Изложение системы мира.* СПб, 1861. Франц. изд. 1835 г. перепечатано в OC, t. 6. Paris, 1884.

--- (1809), Sur divers points d'analyse. OC, t. 14. Paris, 1912, pp. 178 – 214.
--- (1810), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et leur application aux probabilités. OC, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345.
--- (1811), Sur les intégrales définies et leur application aux probabilités etc. OC, t. 12, pp. 357 – 412.
--- (1812), *Théorie analytique des probabilités.* OC, t. 7, NNo. 1 – 2. Paris, 1886.
--- (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. Русск. перевод 1908 г. перепечатан в книге Прохоров Ю. В., ред. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия.* М., с. 834 – 863.
--- (1816), *Théor. Anal. Prob., Supplément 1.* OC, t. 7, No. 2, pp. 497 – 530.
Чебышев П. Л. (1846 франц.), Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей. *Полн. собр. соч.*, т. 2. М. – Л., 1947, с. 14 – 22.
Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1976), Laplace's work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 16, pp. 137 – 187. Частичн. перевод (1977): ИМИ, вып. 22, с. 212 – 224.
--- (1977a), Laplace's theory of errors. Там же, т. 17, с. 1 – 61.
--- (1981), Poisson and statistics. В книге Métivier M., Costabel P., Dugac P., редакторы, *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps*. Palaiseau, pp. 177 – 182.
--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк.* Берлин.
Alexander A. F. O'D. (1970), Bouvard. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 2, pp. 359 – 360.
Bertollet C. L. (1803), *Essai de statique chimique*, tt. 1 – 2. Paris.
Bottazzini U. (1981, итал.), *The Higher Calculus*. New York, 1986.
Bru B. (2001), S. D. Poisson. В книге Heyde C. C., Seneta E., редакторы, *Statisticians of the Centuries*. New York, pp. 123 – 126.
Euler L. (1771), Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités. *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 162 – 179.
Fourier J. B. J. (1829), Second mémoire sur les résultats moyens etc. *Œuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 551 – 590.
Gridgeman N. T. (1960), Geometric probability and the number π. *Scripta Math.*, vol. 25, pp. 183 – 195.
Hald A. (1998), History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. New York.
Kramp C. (1799), Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strassbourg – Leipzig.
Mayer T. (1750), Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe. *Kosmogr. Nachr. u. Samml.* für 1748, pp. 52 – 183.
Poisson S.- D. (1820), Sur les intégrales définies. *J. l'Ecole Polyt.*, No. 18, pp. 295 – 341.
Todhunter I. (1865), History of the Mathematical Theory of Probability. New York, 1949, 1965.

Приложение:

Б. Брю, Пуассон, исчисление вероятностей и народное просвещение

Bru B. (1981), Poisson, le calcul des probabilités et l'instruction publique. В книге Métivier M., Costabel P., Dugac P., редакторы, *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps*. Palaiseau, pp. 51 – 94.

1. Исчисление вероятностей. На первый взгляд представляется, что Пуассон лишь довольно поздно пришел к исчислению вероятностей. Именно, 38-и лет от роду он прочел в Академии наук свой первый мемуар об одной задаче о вероятностях, притом, как казалось, о задаче, насколько можно незначительной, – о преимуществе банкомёта при игре в *30 и 40* [70].

Декрет 24 июня 1806 г. допустил при определенных условиях игры в общественных местах курортных городов и Парижа. Предписание 5 августа 1812 г. даже предоставило Парижу право устройства игорных домов, которые смогли своими прибылями обеспечить специальные фонды полиции на весь период Реставрации. Наиболее распространенной в то время была игра *30 и 40*, называемая также *Красное и черное*. В 1820 г. игроки затратили на нее более 230*млн* франков и можно понять, что была поставлена задача заранее вычислить преимущество банкомёта.

Поскольку мы должны с чего-то начать и говорить об исчислении вероятностей и Пуассоне, мы прежде всего бегло обозрим вычисление этого преимущества, произведенного Пуассоном. Он [70, с. 176 – 177] представил следующий упрощенный вариант задачи:

> *Урна содержит x_1 шаров, помеченных номером 1, x_2 шаров –номером 2, ..., и, наконец, x_i шаров, помеченных номером i, наибольшим из всех. Последовательно извлекают без возвращения первый, второй, третий, ... шар и тиражи продолжаются, пока сумма извлеченных номеров не достигнет или не превысит заданного числа x. Спрашивается, какова вероятность, что эта сумма будет равна x?*

Положим, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_i = s$. При возврате шаров в урну после извлечения решение этой задачи упростилось бы. По существу, с начала XVIII в. стало известно, что в таком случае вероятность сумме номеров стать равной x после m тиражей будет коэффициентом при t^x в разложении многочлена

$$[(x_1/s)t + (x_2/s)t^2 + \ldots + (x_i/s)t^i]^m = T^m/s^m.$$

Следовательно [70, с. 197], для любого числа тиражей эта вероятность $Z(x; x_1; x_2; \ldots; x_i)$ равна коэффициенту при t^x в ряде

$$1 + (T/s) + (T^2/s^2) + \ldots + (T^m/s^m) + \ldots,$$

т. е. в разложении $(1 - T/s)^{-1}$.

Этот метод, названный методом производящих функций, при помощи “перехода от конечного к бесконечно малым”[1] весьма естественно привел Лапласа к понятию лапласовых преобразований. И поскольку $Z\,(x;\, x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_i)$ очевидно является решением разностного уравнения

$$Z\,(x;\, x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_i) = (x_1/s)\, Z\,(x - 1;\, x_1 - 1;\, x_2;\, \dots;\, x_i) +$$

$$(x_2/s)\, Z\,(x - 2;\, x_1;\, x_2 - 1;\, \dots;\, x_i) + \dots + (x_i/s)\, Z\,(x - i;\, x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_i - i),$$

которое описывает переход от предпоследнего тиража к последнему, можно заключить, что указанный выше метод дает решение этого типа уравнений. Кроме того, он позволяет при помощи перехода от конечного к бесконечно малому получить решение некоторых уравнений в частных производных в виде “определенных интегралов”, т. е. в виде преобразований Лапласа. Такова теория, которую Лаплас представил в мемуаре 1782 г. [46].

Пуассон решил приспособить этот довод к извлечениям без возвращения так, чтобы больше не иметь дела с формулами сверток, которые могут быть преобразованы в произведения при помощи производящих функций. Было бы нудно приводить подробности соответствующих вычислений, но мы удостоверяем, что они были изобретательны. В конце-концов Пуассон обнаружил, что при извлечениях без возвращения $Z\,(x;\, x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_i)$ есть коэффициент при $t^{\,x}$ в разложении интеграла

$$(s + 1)\int_0^1 \;(1 - y + yt)^{\,x_1}\,(1 - y + yt)^{\,x_2} \dots (1 - y + yt)^{\,x_i}\, dy.$$

Если показатели степени $x_1, x_2, \dots, x_i$ достаточно велики, можно применить к этому интегралу метод Лапласа, который он [47] усовершенствовал примерно 40 лет раннее, и этим путем Пуассон показал, что интеграл примерно равен ряду $(1 - T/s)^{-1}$, полученному классическим образом. Мы в некоторой степени так и полагали заранее.

Можно удивляться, что подобная аналитическая тонкость была приложена к столь обыденной задаче. Но было весьма в духе Пуассона, который он унаследовал от Лапласа, подчинять методы приложениям, так что даже их общность и изящество исчезают, чтобы только добиться выгоды для частных случаев и дурного вкуса последних.

Этот сульпицианский стиль[2] без сомнения явился одной из причин, почему математические труды Пуассона хоть и значительны, так часто ставятся ниже, чем, скажем, труды Фурье, который, как представляется, всегда рассматривал существенное, или Пуансо, неизменно заботившийся об изящности и общности, или Коши, стремительный поток научной продукции которого не задерживался столь невежественными соображениями.

Ясно, что не по случаю этого мемуара Пуассон открыл для себя исчисление вероятностей. За десять лет до этого, будучи редактором по математике в *Bulletin* [*des Sciences*] *de la Société*

Philomatique [*de Paris*], он опубликовал там сводки двух крупных мемуаров Лапласа 1810 и 1811 гг., – тех, которые, как известно, подвели их автора к составлению его величественной *Аналитической теории вероятностей*[3] и на которых, ввиду их первостепенной роли в развитии исчисления вероятностей и влияния на труды Пуассона, подходяще сейчас остановиться.

Для упрощения мы начнем с 1776 г., когда вышли в свет два мемуара, – Лагранжа [41] и Лапласа [43]. В обоих по весьма различным причинам [33, § 6] предлагалось определить закон вероятности сумме (или среднему арифметическому) большого числа n случайных величин с одной и той же заданной плотностью φ, или, иначе, оценить n-ю свертку φ^{*n} функции φ.

Лагранж, вдохновленный мемуаром Симпсона [83], вышедшего за 20 лет до того[4], применил для этой цели своеобразную формулу обращения “преобразования Лапласа”, пригодную для некоторых функций φ. Лаплас, снова обратившись к этой теме в 1777 г. [34], привел ставшую классической интегральную формулу для свертки произвольной функции φ, равной нулю вне некоторого интервала. Он установил, что численный анализ становится неосуществимым при слишком больших n и признал свое бессилие применить асимптотическую оценку, необходимую для его цели, а именно оценить функцию $1_{[0;\,100]}^{*100}$; так обозначена функция, равная единице на интервале [0; 100] и 0 вне его.

В течение следующих 30 лет Лаплас сумел вычислить очень большое число асимптотических разложений определенных интегралов, содержащих степенные функции с большими показателями, см. например, [46; 47; 48]. Но метод, который он применил, не годился для формул сверток, поскольку они “должны были быть остановлены, когда переменные становились отрицательными” и не возвращали непосредственно к произведениям.

С другой стороны, как было известно и Лапласу, и Лагранжу, преобразование Лапласа, переводящее свертку в произведение, плохо обращается в поле действительных чисел, а “переход от действительного к мнимому”, уже отважно примененный Лапласом для вычисления интегралов от функций действительного переменного методами изменения комплексной переменной[5], еще не обладал гибкостью и многообразием, которые им придал впоследствии Коши.

И всё же 9 апреля 1810 г., т. е. 34 года после четкой постановки вопроса, Лаплас объявил в Академии наук решение, известное нам теперь: если φ – (четная) функция с компактным носителем, а x имеет порядок $\sqrt{n}$, то

$$\varphi^{*n} \approx (1/\sqrt{2\pi c_n}\,)\exp(-x^2/2c_n),\ c_n = n\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx.$$

Вот интересный случай математического упрямства! Как написал Фурье [29], “Невозмутимое постоянство точки зрения Лапласа всегда оставалось основной чертой его гения”. Но позволительно спросить о причинах позднего успеха Лапласа, достигнутого после того, как он 20 лет назад [34, с. 265] забросил эту задачу, тем более, что он не остановился на этом, а применил результаты своего первого мемуара для того, чтобы через год придти к первому удовлетворительному теоретико-вероятностному МНКв [53]. Можно сказать, что с этого момента Лаплас больше не расставался с областью исчисления вероятностей.

Частичным ответом на этот вопрос может послужить следующий довод. В 1807 г., отвечая на вопрос в Академии наук, Фурье, бывший тогда префектом департамента Изер и вообще-то считавшийся потерянным для науки, вывел уравнение теплоты и решил его в частном случае тора с заданным начальным распределением температуры. Он заметил, что решение элементарно, если это распределение синусоидально, а затем успешно рассмотрел случай произвольного распределения путем разложения его в "ряд Фурье".

Рукопись Фурье 1807 г., сводку которой Пуассон опубликовал в 1808 г. в *Bulletin … de la Société Philomatique …*, была, видимо, плохо встречена парижским научным сообществом, особенно Лагранжем [35]. Что же касается Лапласа, то в своем мемуаре 1808 г. [49] он критически отнесся к принятым Фурье физическим предположениям и привел там то, что счел "истинными основаниями уравнения теплоты". О теории рядов Фурье он не сказал ничего. Отыскание решения дифференциального уравнения в виде ряда, пусть тригонометрического, не было для него особо примечательным, притом он уже применил в своем мемуаре 1785 г. [47, § XXIII] искусственный прием, аналогичный использованному Фурье для вычисления коэффициентов (Фурье) некоторой функции. Возможно также, что, более просто, Лаплас не читал рукописи Фурье, которая была сдана в Академию в 1807 г., но опубликована лишь в 1821 г.

Летом 1809 г. [35, с. 443 след.] Фурье оставил Гренобль [главный город департамента Изер], чтобы пожить в Париже почти год, в течение которого он закончил работу над *Description de l'Egypte* [Лондон, 1838]. Император присвоил ему титул барона, и он оказался на вершине гражданских почестей. Лаплас, который, как известно, не был равнодушен к тщеславию титулов, принял его в своем имении в Аркуэле, в то время бесспорном центре мировой науки.

Ни Лаплас, ни Фурье не сообщили о своих встречах там в конце 1809 г. Мы знаем лишь о позднейшем свидетельстве Фурье [29], который, упоминая о посетителях Лапласа, написал:

> *Одни начинали свою карьеру,другим пришлось вскоре закончить ее.* [Лаплас] *принимал их всех исключительно вежливо. Он даже пошел так далеко, что тем, кто еще не представлял себе всю глубину его гениальности, давал повод поверить, что он сам может что-то почерпнуть из разговоров с ними.*

Эта фраза удачна. Как лучше дать понять человеку, что и он вдохновлял того, кому полагалось воздать научную хвалу?

Каково бы ни было истинное влияние этих встреч, нельзя отрицать, что с тех пор их стили, оставшись неподражаемыми, стали более схожи друг с другом.

В своем мемуаре 1811 г.[6] Фурье применил любимый Лапласом переход от конечного к бесконечно малым для исследования распределения тепла при заданных начальных температурах в бесконечном стержне, что, видимо, не удалось ему в 1807 г. Оказалось достаточным указать функцию, задающую начальные температуры в каждой точке стержня, в виде изображения Фурье, а не ряда Фурье.

Что касается Лапласа, то мы не будем говорить о его мемуаре 1809 г., см. [35], в котором влияние Фурье очевидно. В 1810 г. он опубликовал, как мы уже сказали, мемуар [51], в котором решил задачу 1776 г., см. выше. Понять "новую точку зрения", которая лежит в основании решения, нелегко, поскольку он свободно использовал нестандартный анализ[7], обращаясь с определенными интегралами, если видел в этом нужду, как с суммами, и даже Пуассон, видимо, не сразу представил себе это в своей сводке [66]. Действительно, он обратил больше внимания на конец мемуара Лапласа, где рассматривалась частная задача оценки функции $1_{[0;100]}^{*100}$ при помощи двух более обычных методов автора, а именно "приближенного интегрирования уравнений с частными разностями и бесконечно малыми"[8] и "обратный переход от мнимых результатов к действительным".

Тем не менее в 1824 г. Пуассон [73, см. в этом сборнике] первым опубликовал полный и строгий вариант общего доказательства Лапласа. На "современном" языке его можно записать так: если φ – положительная и четная функция с компактным носителем, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx = \sigma^2$$

и ее преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(x)dx,$$

то

$$\varphi^{*n}(\sqrt{}nx) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\sqrt{}nx}[\hat{\varphi}(t)]^n dt = \tag{1}$$

$$(1\sqrt{}n\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}[\hat{\varphi}(u/\sqrt{}n)]^n du \approx (1/\sqrt{2\pi n\sigma^2}\ ) \exp(-x^2/2\sigma^2).$$

Заметим, что уравнение (1), т. е. наша современная запись уравнения (o′) в мемуаре Лапласа, является формулой обращения Фурье, которая появилась в его рукописи 1811 г. и была опубликована в 1821 г. Это, впрочем, не столь важно, потому что Лаплас считал это уравнение элементарным следствием формулы для коэффициентов Фурье, которая была включена в рукопись 1807 г. Первое известное доказательство формулы Фурье опубликовал в 1817 г. Коши [14], приписавший ее Пуассону, который действительно применил ее в 1816 г. в своих трудах по теории волн. Фурье, однако, предъявил свои права на эту формулу, и Коши охотно согласился с ним в своем следующем мемуаре [15].

Известно, что Лаплас никогда не признавал никакого малейшего прямого влияния на себя, и потому мы вряд ли слишком удивимся тому, что он не сослался на Фурье ни в своих мемуарах 1810 и 1811 гг., ни в своей *Аналитической теории*. Но тем не менее примечательно, что, начиная с этого времени, он поддерживал Фурье своим громадным авторитетом, ср. [35].

Укажем, наконец, что мемуар 1810 г. содержит в своем § VIII первое приложение преобразования Фурье для решения дифференциального уравнения. Пуассон и Коши сразу же подхватили этот метод; преобразования Фурье, как и Лапласа, давали решение уравнений в виде определенных интегралов, которые достаточно было либо затем вычислить, либо, если это не удавалось в точности, оценить быстро сходящимися рядами. Уже в 1809 г. Лаплас [50] представил первое примечательное преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi} \exp(-t^2/2).$$

В 1811 г. Лаплас [52] и Пуассон [69] показали, что, если $t \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dx/(1 + x^2) = \pi e^{-t}.$$

Этот интеграл, который вскоре еще встретится нам, часто приписывают Коши.

Как мы видели выше, Пуассон всерьез занялся исчислением вероятностей с 1810 г., как раз тогда, когда оно после 20-тилетнего перерыва вернулось в первые ряды научной сцены[9].

В своей сводке 1810 г. Пуассон объявил о желании [точнее, о желательности вообще] отыскать “прямое” доказательство теоремы Лапласа. Известно, что он не преуспел в этом, однако до конца жизни он разъяснял и развивал асимптотическую теорию Лапласа. Его *Исследования* [77], опубликованные в 1837 г., предоставляют лишь беглый взгляд на этот громадный труд, который мы частично намерены описать в последующем.

1.1. Теорема Лапласа и теория ошибок. Упомянутые нами результаты Пуассона, относящиеся к теореме Лапласа, были опубликованы в издании Бюро долгот в 1824 и 1829 гг. [73; 74, см. в этом сборнике]. С 1808 г. Пуассон был там адъюнктом [заместителем, младшим] геометром, а после смерти Лапласа в 1827 г. – титулярным (штатным) геометром[10]. Цель этой публикации, как Пуассон [73] указал, была в том, чтобы дать простые замечания и тем самым облегчить чтение 4-й главы 2-й книги *Аналитической теории*. По существу же он рассмотрел и пояснил все результаты Лапласа. Условия их применимости указаны так ясно, как это было возможно и добавлены примеры, в которых они не выполнялись, что не часто встречалось в трудах того времени.

В мемуаре 1824 г. Пуассон впервые представил ясную и краткую теорию точного определения законов вероятностей суммы заданного числа “ошибок наблюдения” при помощи формулы обращения Фурье. Он полностью обсудил случай равномерного распределения на отрезке и так называемых законов Гаусса $\exp(-x^2)$ и Коши $1/(1+x^2)$, для которого он сам 13 лет раннее вычислил преобразования Фурье. Пуассон в частности заметил, что при законе Коши распределение средней ошибки не зависит от числа наблюдений,

> *Откуда следует, что в этом частном случае средняя ошибка при его возрастании не стремится ни к нулю, ни к любому иному определенному числу. Как бы ни велико было число наблюдений, вероятность, что средняя ошибка, которой следует опасаться, заключена внутри заданных границ, всегда остается одной и той же.*

Этот результат обычно приписывают Коши, который на самом деле получил его примерно на 30 лет позже [16]. Поль Леви [58, с. 78], который первым предложил назвать функцию $1/[\pi(1+x^2)]$ законом Коши, посчитал Полиа ответственным за эту ошибку. Пуассон далее обобщил теорему Лапласа на плотности вероятности φ, удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx < \infty.$$

Его доказательство, по существу строгое, иногда приписывают Коши, который вообще никогда не притязал на него.

Во второй части своего мемуара Пуассон вслед за Лапласом взялся оценить закон вероятностей линейной формы $\sum\gamma_i\varepsilon_i$ ошибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$. Лаплас предположил, что законы распределения величин ε_i совпадают и симметричны и естественно заключил, что их линейная форма асимптотически нормальна и центрирована с дисперсией $\sum\gamma_i^2 \mathrm{D}\varepsilon_i$.

На нескольких примерах Пуассон показал, что этот результат может быть ошибочным. Таков случай, когда показательное и симметричное распределение ε_i имеет вид $e^{-2|x|}$ и $\gamma_i = 1/i$, $i \geq 1$. Здесь [73, с. 290]

$$P(|\sum\ \gamma_i\varepsilon_i| \leq c) \approx (1/2)\ \frac{1-e^{-2c}}{1+e^{-2c}}\,.$$

Фурье [27] заявил, что примеры Пуассона искусственны, однако Бьенеме [6] позже заметил, что влияние сложных процентов на прибыли страховых обществ обусловлено этим типом “необычного” поведения. С другой стороны, Пуассон показал, что при весьма общих, но не вполне определенных условиях, а именно, если при отдалении от начала координат произведение преобразований Фурье быстро стремится к нулю, результат

Лапласа распространяется на случай несовпадающих распределений ошибок.

Впоследствии он [77, гл. 4] вернулся к этому утверждению и “строго” доказал, что если $\gamma_i = 1$, а ε_i принимают значения 0 и 1 с вероятностями $1 - p_i$ и p_i, то “необходимым и достаточным условием” асимптотически нормальной суммы $\sum\varepsilon_i$ является расходимость ряда $\sum p_i (1 - p_i)$. Пуассону иногда действительно приписывают этот результат, но он был неявно указан в гл. 9-й книги 2-й *Аналитической теории*. После Чебышева петербургская [математическая] школа уточнила работы Пуассона и установила современные варианты ЦПТ (хотя и не ЗБЧ, который в своей слабой форме намного слабее теоремы Пуассона, а в своей усиленной форме по существу намного сильнее)**[12]**.

В последней части [73] Пуассон рассмотрел лапласову теорию МНКв; более подробный анализ этого см. [82]. Именно, он усовершенствовал технику, предложенную Лапласом в *Дополнении 1* (1816) к *Аналитической теории* для определения неизвестных параметров, которые входят в асимптотические формулы. Последняя тема послужила отправным пунктом второго мемуара Пуассона [74], который примечателен не столько оригинальностью полученных результатов, сколько их представлением. Этот вопрос играет определенную роль для дальнейшего и мы опишем его в упрощенном виде.

Теорема Лапласа дает асимптотическую оценку закона вероятности среднего арифметического большого числа ошибок наблюдений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ с общим центрированным распределением φ, а именно

$$(\sqrt{n/2\pi}/\sigma)\exp(-nx^2/2\sigma^2),\ \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx.$$

Однако, поскольку φ заранее неизвестно, неизвестен и параметр σ и поэтому Лаплас предложил в этом *Дополнении* заменить σ^2 средней суммой квадратов наблюденных ошибок ε_i. Что же касается Пуассона, то он решил обосновать этот метод и вычислил преобразование Фурье для

$$[X(\varepsilon_1) + X(\varepsilon_2) + \ldots + X(\varepsilon_n)]/n,$$

где X – произвольная “возрастающая” функция. Он таким образом прямо указал, что это среднее асимптотически нормально со средним

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(u)\varphi(u)du,$$

т. е. что

$$[X(\varepsilon_1) + X(\varepsilon_2) + \ldots + X(\varepsilon_n)]/n = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)\varphi(u)du + \alpha g/\sqrt{n},$$

где g – константа, а α – случайная величина со стандартным нормальным распределением

$$P(|\alpha| \le a) = \sqrt{2/\pi}\int_0^a \exp(-x^2/2)\,dx. \qquad (2)$$

С точностью до $1/\sqrt{n}$ можно поэтому со сколь угодно высокой вероятностью заменить σ^2 на $(1/n)\sum\varepsilon_i^2$. Следует заметить, что этот результат обманчив, поскольку он уже содержится в теореме Лапласа в применении к последовательности случайных величин $X(\varepsilon_1), X(\varepsilon_2), \ldots, X(\varepsilon_n)$.

Но как мог Пуассон заранее узнать об этом при отсутствии ясной теории, или хотя бы примерного определения того, что называется “случайной величиной”? Представляется, что Лаплас никогда не заботился об этом затруднении более, чем о термине *функция*, который он и не думал пояснить.

Теорема Лапласа просто относилась к последовательности “ошибок с одним и тем же законом легкости”. Можно согласиться с тем, что сумма ошибок является снова ошибкой, но будет ли возрастающая функция ошибок снова ошибкой и как при этом преобразуется закон легкости? Вот тип трудностей, который Пуассон осветил в своем втором мемуаре. Он также был первым, кто [77, с. 140], как совершенно верно указал Шейнин [82], предложил “определение” понятия случайной величины. Вне зависимости от той “теории ошибок”, которую разработали Лаплас и Гаусс [54], Пуассон уже подыскивал “теорию случайных величин”. После него Курно [19, гл. 6] предложил примечательную практическую теорию [как бы] в ожидании аксиоматической теории Колмогорова[13].

1.2. Статистика рождений и пуассонова теория [статистических] выводов

Первая статистическая работа Пуассона [71], посвященная “соотношению мужских и женских рождений”, была опубликована в 1824 г. в ежегоднике Бюро долгот и перепечатана в длинном мемуаре [72], который он прочел 8 февраля 1829 г. в Академии наук и и затем снова в *Исследованиях* [77].

Бюро долгот было учреждено Конвентом (Закон 7 мессидора года III, 25 июня 1795 г.) для “усовершенствования различных отраслей астрономической науки и их приложения к географии, навигации и физике Земли”. Помимо астрономических таблиц для “определения времени” Бюро должно было публиковать ежегодники, “подходящие для того, чтобы всё улаживать (à régle ceux de toute) по всей республике”. Франсуа Невшато, известный своей первостепенной ролью в развитии национальной статистики, определил план ежегодников в качестве министра внутренних дел, включив в него статистику населения и таблицы смертности. Лапласу, который вместе с Лагранжем был штатным геометром Бюро долгот, пришлось поэтому наблюдать за публикацией статистики Франции, что также случилось с его помощником, а затем преемником, Пуассоном.

Изучая труды политических арифметиков XVII и XVIII вв., Лаплас уже применил свои аналитические методы к определению по многочисленным наблюдениям “возможности события”, – например, рождения мальчика. Можно без сомнения сказать, что вся лапласова теория статистических выводов имела своим началом один-единственный пример [установления] соотношения между мужскими и женскими рождениями.

Напомним вкратце эту задачу. Со времени первого составления списков гражданского состояния и знаменитого мемуара Арбутнота [2] стало известно, что это соотношение сравнительно устойчиво от года к году, притом число рождающихся мальчиков неизменно превышало число девочек. После исследования Николая Бернулли, см. [61], было также известно, что эта сравнительная устойчивость весьма напоминает наблюдаемую устойчивость количества *решеток* и *орлов* при игре в орлянку[14]. Появилась поэтому математическая задача точно изучить колебания в этих соотношениях, которые столь странным образом оказывались устойчивыми, притом помимо прочего подобные исследования должны были установить, остаются ли наблюдаемые временные уклонения, – от года к году, – или пространственные, – от одного государства к другому, – внутри теоретических границ или нет. Как Лаплас [45] указал в 1780 г., “эта тема является одной из самых интересных из тех, к которым можно приложить исчисление вероятностей”.

Если вероятность рождения мальчика задана заранее, только что поставленная задача может быть решена при помощи теоремы Бернулли, уточненной Муавром (и Лапласом [54]): обозначим эту вероятность через p и пусть N_n будет количеством мальчиков в n рождениях, тогда, почти в обозначениях Пуассона,

$$(N_n/n) - p \approx \alpha\sqrt{p\,(1-p)/n}\ , \qquad (3)$$

где α распределено по закону (2). Трудность, конечно же, здесь состоит в том, что параметр p включен в обе части этого уравнения и если он, как обычно, не задан, то уравнение предоставляет лишь незначительные сведения о колебаниях (N_n/n).

Первый метод, примененный Лапласом [42] для преодоления этого затруднения, был, как известно, методом Бейеса, который, как просто невозможно указывать слишком часто, обязан Лапласу всем, кроме своего имени. Мы здесь предполагаем, что все значения p “априорно равновероятны” и показываем, что если в n рождениях оказалось m мальчиков, то колебания количества мальчиков N_k в k новых рождениях устанавливаются тем же уравнением (3), в котором p заменяется на m/n, т. е., при большом числе наблюдений,

$$(N_k/k) \approx (m/n) + \alpha\sqrt{m(n-m)/n^2k}\ , \qquad (4)$$

где α имеет прежнее значение.

После первой неудачной попытки 1780 г. [45] Лаплас [48] в 1786 г. вывел формулу (4), применив свой метод (не по странной случайности названный его именем!) для оценки интегралов, содержащих множители в больших степенях [47].

В 1829 г. Пуассон [72] представил первый четкий вариант метода Лапласа и его приложения к равенству (4).

Применив свою формулу, Лаплас заключил, что

1. Возможность рождения мальчика в Лондоне была выше, чем в Париже.

2. То же, хотя и в меньшей степени, имело место для Неаполитанского королевства.

3. “Можно держать пари, ставя почти 2 против одного, что ежегодно в течение [предстоящего] столетия будет рождаться больше мальчиков, чем девочек”.

Формула (4) естественным образом подсказывает второй метод, который Тодхантер [87] назвал “обратным методом Бернулли” и который Лаплас систематически применял начиная с 1816 г. Он предположил лишь заменить в погрешности $\alpha\sqrt{p\,(1-p)/n}$ в формуле (3) неизвестное p на наблюденное значение N_n/n. Мы видели, что Пуассон [74] асимптотически обосновал этот небейесовский метод.

Пуассон [72] вновь взялся за исследование Лапласа и в соответствии со своей привычкой уточнил содержащееся в нем доказательство, но он пошел и дальше. Он показал, чего Лаплас не сделал явно, что если в двух различных случаях в n и k рождениях было m и s мальчиков, и если соответствующие априорно равновероятные возможности рождения мальчика были p_1 и p_2, то апостериорно разность $(p_1 - p_2)$ асимптотически нормальна. Формула

$$(p_1 - p_2) \approx (m/n) - (s/k) + \alpha\{[m(n-m)/n^3] + [s(k-s)/k^3]\}^{1/2} \quad (5)$$

весьма точна и позволяет решить, существенно ли различие между p_1 и p_2. Вот, слово в слово, выводы Пуассона.

1. Соотношение мужских и женских рождений составляет 16/15, а не 22/21, как полагали раннее.

2. Существует почти одно и то же соотношение этих рождений и для юга Франции, и для всей страны, так что представляется, что оно не зависит от изменений климата, по крайней мере на протяжении Франции.

3. Его значение для рожденных вне брака существенно ниже, чем для законорожденных и примерно равно 21/20.

Пуассон поостерегся высказывать какое бы то ни было суждение, основанное на этих результатах, но вряд ли последующие авторы поступали так же, см. по этому поводу Кетле [78]. В свою очередь, Араго [1], комментируя последний вывод Пуассона, заметил:

> *Видно, как важно было бы произвести те же вычисления для стран, в которых существует многоженство; данных об этом, к сожалению, нет.*

Статистический мемуар Пуассона 1829 г., как мы только что видели, чисто бейесовский. Но, как и Лаплас в конце своей жизни, Пуассон полагал, что асимптотические методы, основанные на больших числах, должны позволить нам освободиться от всяких априорных предположений, как например от равной вероятности [равномерного распределения] параметра. Вот почему, возвращаясь к этой задаче в своих *Исследованиях* [77], он предложил третий метод. Вспомним об уравнении (4) в варианте обращения Бернулли, т. е. об уравнении

$$N_n/n \approx p + \alpha\sqrt{N_n(n-N_n)/n^3}\,. \qquad (6)$$

Оно указывает “доверительный интервал” для p:

$$P_p(|(N_n/n) - p| \le a\sqrt{N_n(n-N_n)/n^3}\,) \approx \sqrt{2/\pi}\int_0^a \exp(-x^2/2)\,dx.$$

Заметим мимоходом, что при использовании новых k [наблюдений] рождений мы аналогично получим в очевидных обозначениях

$$N_k/k \approx p + \alpha_1\sqrt{N_k(k-N_k)/k^3}\,. \qquad (7)$$

Переходя к разностям и ортогонально преобразуя переменные, Пуассон [77, с. 223] получил из (6) и (7)

$$(N_n/n) - (N_k/k) \approx \alpha\,\{[N_n(n-N_n)/n^3] + [N_k(k-N_k)/k^3]\}^{1/2}, \qquad (8)$$

что также позволило решить, значима ли разность между наблюденными частостями. Если вероятность p одна и та же в обоих случаях, мы должны получить

$$|(N_n/n) - (N_k/k)| \le \mathrm{a}\{[N_n(n-N_n)/n^3] + [N_k(k-N_k)/k^3]\}^{1/2},$$

где a следует выбрать так, чтобы правая часть (2) оказалась настолько близкой к единице, насколько это желательно. Возвращаясь к (6), заметим, что это равенство можно записать в виде

$$p \approx (N_n/n) + \alpha\sqrt{N_n(n-N_n)/n^3}\,, \qquad (9)$$

откуда без всяких априорных предположений следует “закон вероятностей” величины p после наблюдения действительных рождений N_n мальчиков среди n рождений. Именно, если $N_n = r$, “апостериорный закон вероятностей” величины p окажется нормальным со средним r/n и дисперсией $r(n - r)/n^3$.

Для точной, а не асимптотической как выше формулы (9) Фишер [26] лукаво назвал это рассуждение фидуциальным.

Пуассон далее легко заново выводит бейесовские формулы своего мемуара о рождениях и в частности формулу (5). Достаточно было установить закон распределения разности двух независимых величин p_1 и p_2 [77, с. 227, формула (26)], чего он добился классическим ортогональным преобразованием переменных, которое уже встречалось раннее у Лапласа [54, § 27 книги 2]. Был ли Пуассон таким образом первым фидуциальным и антибейесовским статистиком?[15]

По существу этот вопрос не имеет смысла. Как и Лаплас, Пуассон, умножая методы и точки зрения, не искал научных поединков, а скорее пытался подтвердить всю теорию в целом. Он, как и Кондорсе, должен был полагать, что достичь истины никак нельзя, но можно при сборе частичных истин наилучшим образом приблизиться к ней насколько угодно и со сколь угодно высокой вероятностью. Возможно, что он, подобно Курно, начал думать, что получение стольких примечательных результатов такими независимыми методами вряд ли было следствием слепого случая и усиливало “философскую вероятность” всей теории шансов и ее соответствия природе [77, с. 103].

Прежде, чем оставлять задачу о рождениях, надо упомянуть о “законе Пуассона” 1829 г. [72, с. 261 – 262], с которым, как известно, в основном связана его теоретико-вероятностная слава. Впрочем, можно сразу же спокойно сказать, что следы этого закона усматриваются намного раньше, например в первом издании 1718 г. *Учения о шансах* Муавра [60, с. 45; 38]. Рассматривая лапласово доказательство формулы (3), Пуассон справедливо заметил, что она верна только если оба произведения np и $n(1 - p)$ очень велики. Он поэтому исследовал по-отдельности случаи, когда одно из них, например np, длительное время остается небольшим. Положив $np = \omega$, мы получим

$$P(N_n \le x) =$$

$$\sum_{k=0}^{x} C_n^p\, p^{\,k}(1-p)^{n-k} = e^{\,-\omega}[1 + (\omega^2/2) + \ldots + (\omega^x/x)] + O(1/n).$$

Такова формула Пуассона. Она воспроизведена в его *Исследованиях* [77, с. 205] и ее судьба примечательна. Уже Курно [19, § 182] рекомендовал применять ее в теории страхового дела, но по существу она стала общеизвестна благодаря Борткевичу, который обнаружил ее в 1898 г. [9] во всех подсчетах, связанных с редкими событиями. В полном смысле слова она и является законом малых чисел, которому, как известно, подчинялась даже прусская кавалерия. Но закон Пуассона относился бы разве лишь к статистическому фольклору, не появись независимых исследований Эрланга [25] и Бейтмана [3], первое в связи с телефонной связью, второе – с атомным разложением. Эти авторы вновь вывели его таким образом, что Поль Леви, как известно, естественно внес его на теоретическую вершину, на которой он находится и сейчас[16].

По иронии судьбы сам Пуассон явно никогда не придавал никакого значения выражению $e^{\,-\omega}\omega^k/k!$. И заметим еще, что эта назойливая дробь равным образом приписывалась Фурье. В рукописных заметках лекции по вероятностям свидетельских показаний, которую он прочел в 1818 г. в Athénée[17] (Нац. Библ. [Франции] MFF 22515, с. 36 – 41), он оценил первые члены разложения бинома $(\alpha + \beta)^{p}$ при β/α порядка $1/p$. Странным образом он немного растерялся при вычислении, но можно полагать, что сама лекция прошла лучше, чем она была записана. Во всяком случае, он заключил, что при $\beta/\alpha = 1/p$ “соответствующие вероятности потерять меньше, чем 1 или 2 или 3 или 4 или 5 хорошо выражаются числами[18]

$$1,\ 1 + 1/2,\ 1 + 1/2 + 1/(2 \cdot 3),\ 1 + 1/2 + 1/(2 \cdot 3) + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4),\ \ldots”$$

И далее (там же, с. 62) он вернулся к этой задаче на примере уплаты денег в рассрочку и оценил начальные члены разложения бинома $\{[(n - 1)/n] + (1/n)\}^{m}$.

Известно, что Фурье хотел написать трактат по исчислению вероятностей и даже в качестве редактора опубликовал некоторые его главы как Введения к первым томам *Исследований* [27]. Его случайная смерть в 1830 г. помешала ему осуществить этот план и тем самым, по причинам, рассматриваемым в следующем параграфе, без сомнения затмить сочинение Пуассона[19].

Итак, лишь ввиду дуновения ветра закон, а потому и процесс Пуассона не называется по имени Фурье. Ведь Муавр явно не имел на это никаких шансов; в XIX в. никто не читал его кроме Тодхантера [87], который к тому же не разглядел у него формулы Пуассона. Но исчез бы Пуассон с теоретико-вероятностной сцены? Разумеется нет, потому что он – автор одной из самых известных формул теории, а именно “закона больших чисел”, о котором мы будем сейчас говорить.

1.3. Закон больших чисел и вероятность приговоров

В предыдущем параграфе мы коснулись приложения исчисления вероятностей к явлениям природы посредством статистической техники, которая во всех случаях предоставляет числовые результаты при любом применяемом методе. Как следовало бы ожидать, действительные трудности начинаются лишь впоследствии[20]. Какое, спрашивается, значение, если оно вообще есть, может иметь полученный результат?

Подобный вопрос появился вместе с теорией вероятностей. Его можно усмотреть уже в переписке Якоба Бернулли с Лейбницем зимой 1703 – 1794 гг. [57, с. 72 – 89]. В своем письме 3 октября 1703 г. Бернулли утверждал, что обладает методом, который позволяет апостериорно определить абсолютную вероятность события с той же достоверностью, как если бы она была известна заранее. Лейбниц, однако, ответил 3 декабря 1903 г.:

> *Природа обладает своимисобственными привычками, происходящими от повторения причин, но лишь в общем. И поэтому, кто может сказать, что новый опыт не отклонится от правила предыдущих опытов ввиду громадной изменчивости вещей? Новые болезни непрестанно захлестывают род людской, и проведи Вы сколь угодно опытов о причинах смертности, Вы не дойдете до края света, до того, чтобы эти причины не*

изменялись в будущем.

На это возражение Бернулли в свою очередь ответил 20 апреля 1704 г., что в этом случае необходимы новые наблюдения, потому что “старые, разумеется, не могут быть приложены к новым”. См. также [4, с. 44 – 45].

Мы вновь находим эту задачу “изменчивости шансов” [19, гл. 7], ставшей модной в том же виде в начале XIX в. Ее изучали Фурье, Пуассон, Бьенеме и Курно, а в конце века, – “континентальное” направление статистики [40], а затем она была включена в теорию [случайных] пространственных и временных процессов[21].

Примерно до 1820 г., и особенно в течение лапласова периода, имевшиеся статистические данные были настолько далеки от истины, что соответствующие выводы, которые можно было сделать при помощи исчисления вероятностей, не могли существенно испортить дело, будь даже принятые при этом предположения, обычно и не указываемые, почти не оправданы. И напротив, изобретательность и мощь применяемых методов могли восстановить истину в исходных данных или по крайней мере приблизиться к ней сколь угодно близко с вероятностью, также сколь угодно близкой к достоверности. В идеале данные более не являлись незаменимыми, имелось бы достаточно просвещенности для указания наилучших путей обойтись без них[22]. Самым интересным примером подобного объединения философии просвещения и аналитических методов, очевидно, был *Опыт* Кондорсе [17; 77, с. 2].

Указанное частично объясняет, как могло случиться, что Лаплас, который как-никак создал из отдельных кусков или улучшил бóльшую часть нынешних статистических методов, см., например, [85], так и не получил никаких действительно существенных статистических результатов несмотря на впечатляющее количество цифр, которыми он обычно украшал их; примером может служить, кроме соотношения мужских и женских рождений, см. выше, эпизод с массой Юпитера, см. Курно [19, § 137][23].

В начале XIX в., как мы уже говорили, статистика развивалась как независимая наука со своими надлежащими методами подсчетов[24] и сравнений под влиянием великих администраторов, состоящих на государственной службе, и филантропов, служащих человеку и промышленности. Зять Пуассона, латинист Альфред Де Wailly [88] восхвалил их в лице Montyon’a[25].

Первые статистические данные, достойные этого названия и вышедшие во Франции, это *Исследования*, т. 1, 1821, см. [27], а затем [France, Ministère de la justice] *Compte général de l’administration de la justice criminelle en France* [1827 – 1900 pour 1825 – 1897], которые представили надежные данные с 1836 г.; предыдущие тома были слишком элементарны. Математическое просвещение оказалось недостаточным, потребовалось исходить из статистических данных, и возражения Лейбница Якобу Бернулли вновь стали вполне значимыми. Некоторые чистые статистики даже начали утверждать, что данные достаточны сами по себе, а вмешательство геометров может лишь затемнить их; большое число ссылок по этому поводу см. в [36].

Следовало поэтому вновь подчинить [математике] развитие статистики. Конечно же, как признавал Бернулли, возможны изменения причин, а потому и шансов, во времени и в пространстве, но только исчисление вероятностей позволяет обнаружить их [77, с. 8]. Для этого достаточно, как рекомендовал Фурье [27, т. 3], разбить совокупность наблюдений на части надлежащего объема и сравнить друг с другом частости, с которыми в них происходят события. Формулы Пуассона (5) или (8) позволяют, как мы сказали, установить, значимо ли различаются эти частости.

Если они остаются в пределах, допускаемых этими формулами, можно с высокой вероятностью заключить, что причины не изменялись. Подобная устойчивость частостей, названная Пуассоном [77, с. 143] законом больших чисел, относится к “вещам любой природы”.

Но здесь появляется новая трудность, источник многих недоразумений. Вернемся, чтобы упростить дело, к задаче о рождениях, см. предыдущий параграф. Пуассон [72, § 17] заметил, что вероятность p рождения мальчика несомненно изменяется от семьи к семье, так что же тогда означает устойчивость частостей? После первой попытки прояснить это в том же мемуаре, Пуассон вернулся к этой теме в своих *Исследованиях* [77] и предположил, что каждая наблюдаемая семья относится к какому-нибудь из v хорошо определенных типов и что каждому из этих типов соответствует некоторая вероятность c_i, $i = 1, 2, \ldots, v$ рождения мальчика.

Пусть, в упрощенном варианте, данная семья имеет равные шансы принадлежать к любому из этих типов; Пуассон [77, с. 220] фактически рассмотрел несколько более общий случай. Обозначим последовательность (случайных) шансов $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ наблюдаемым семьям родить мальчика. Тогда по теореме Лапласа (§ 1)

$$(1/n)\ (p_1 + p_2 + p_n) \approx (1/v)\ (c_1 + c_2 + \ldots + c_v) + \alpha\sqrt{}\mathrm{g}/n,\ g =$$

$$(1/v)\ \sum c_\mathrm{i}^2 - [(1/v)\sum c_\mathrm{i})]^2,\ P(|\alpha| \le a) = \sqrt{2/\pi}\int_0^a \exp\,(-x^2/2)dx.$$

Полученная Пуассоном обобщенная теорема Лапласа показывает, что число N_n рождений в первых n семьях удовлетворяет равенству

$$N_n/n \approx (1/n)\sum p_i + \alpha_1\sqrt{\gamma_n/n}\,,\ \gamma_n = \sum p_i\,(1 - p_i),\ P(|\alpha_1| \le a) = P(|\alpha| \le a)$$

и наконец $N_n/n \approx (1/n)\sum c_i$ с почти точно установленной погрешностью.

Итак, частости устойчивы. Таково доказательство “закона больших чисел”, которое Пуассон объявил в Академии наук в начале 1836 г. и которому он придавал “большое значение” [76, с. 396]. Впрочем, внимательный читатель, конечно же, заметит, что это доказательство, как бы оно ни было примечательно, бесполезно, ибо предложенная Пуассоном двухступенчатая схема элементарно сводится к случаю Якоба Бернулли относительно постоянных вероятностей $p = (1/v)\sum c_i$. Бьенеме [8] немедленно обнаружил это, но из уважения к памяти Пуассона и его выдающимся заслугам опубликовал свое разъяснение лишь в 1855 г.

Но важно не это. Цель Пуассона [77, с. 12] была в том, чтобы показать, что “всеобъемлющий закон больших чисел является основой всех приложений исчисления вероятностей”. Притом же он не приравнивал своего закона к закономерностям “громадных чисел”, при которых устойчивость средних устанавливается простым накапливанием данных [19, 1843, с. 208]. Само его доказательство показывает, что он придавал наибольшее значение предварительному исследованию причин, которые определяют изучаемые данные. Предложенная им схема, – переменные причины, извлеченные из неизменных совокупностей возможностей, – наверняка элементарна по своей природе, но обладает основополагающим преимуществом существования.

Примерно в ту же эпоху Бьенеме [5] предложил более сложную схему причин, которая в определенной мере позволила прояснить более значительные расхождения между частостями, нежели указываемые формулой Пуассона (8) и уже отмеченные Фурье в 1821 г. [27, т. 1, с. 40].

Таковой была схема причин длительного действия, весьма четко усовершенствованная Курно [19, гл. 9], который заключил, в § 120, что

> *Важнейшая цель статистики состоит в исследовании причин, управляющих явлениями физического мира или общественной жизни; для того, чтобы достичь ее, нужно впредь ... разъединять случайные влияния, наслаивающиеся одно на другое, очищать в известной мере условия отбора, так чтобы соединение отдельных случаев в совокупности не преследовало бы иных целей, кроме взаимного погашения следствий ...*

И Бьенеме [7] предложил в 1845 г. первое “разъединение случаев”, не исходившее непосредственно из схемы Бернулли, а именно ветвящихся процессов, которая, как ясно показали Хейде и Сенета [40, с. 117], примерно на 30 лет предвосхитила работу Гальтона и Уотсона.

Пуассон, стало быть, находился в исходном пункте движения мысли, которое полностью созрело лишь сравнительно недавно (Нейман [62]) и которое строит модель (случайный механизм, по выражению Неймана) для каждого явления, учитывающую различные наблюдаемые частости, а ЗБЧ позволяет удостоверить соответствие модели.

Предлагая в качестве основы приложений исчисления вероятностей уже не теорию “решений” Кондорсе (и Паскаля), а асимптотическую теорию Лапласа (и Пуассона), он также оказался в исходном пункте одной из наиболее важных школ математической статистики. И мы считаем, что именно такой смысл следует придавать утверждению, о котором мы напомнили выше: “Закон больших чисел является основой всех приложений исчисления вероятностей”.

Известно, что Пуассон главным образом применил его к исследованиям о вероятностях приговоров. Новое обстоятельство по существу появилось в конце 1820-х годов. Герри и Кетле заметили, быть может независимо, что число таких преступлений и проступков, которые ежегодно регистрировались в *Общих отчетах* (*Comptes généraux*), были устойчивы из года в год. Еще более любопытным была та же устойчивость в доле подсудимых, признанных виновными [из их общего числа] во всех юрисдикциях [судебных округах?]. И таким образом ЗБЧ расширил свое владычество и включил в свое царство факты из области морали. Вот где неожиданно появился случай основательно пересмотреть исследования Кондорсе и Лапласа о вероятностях приговоров и заменить теорию решений на асимптотическую, сохранив, однако, некоторые “модели” Кондорсе.

Судьба этого важного труда Пуассона [77], признанного современными статистиками [31], была трагична и слишком сложна, чтобы рассматривать ее здесь подробно. Все течения мысли, которые в то время раздирали Францию, объединились, чтобы высмеивать его, – разумеется, без того, чтобы прочесть хотя бы одну его строчку, см. [36]. Бесчисленные попытки, которые Пуассон предпринимал в течение 20 лет на всех занимаемых им должностях для защиты своего видения вероятности, подвергались сомнению именно из-за его чрезмерного усердия. Позднейшее торжество французского позитивизма, чья отъявленная враждебность по отношению к исчислению вероятностей общеизвестна, дополнительно усилило этот процесс [18]. Кто в 1881 г. мог бы подумать о праздновании столетия со дня рождения Пуассона? Известно также, что ввиду различных причин подобное состояние умов сохранилось в некоторых кругах до наших дней. Тем не менее, мы не можем упрекать Пуассона в непостоянстве или недостатке мастерства. И сейчас мы попытаемся вкратце показать это, надеясь, что наша последняя тема поможет восстановить Пуассона в его правах.

2. Народное просвещение

Речь, которую Пуассон [75] произнес 7 марта 1827 г. на похоронах Лапласа, он закончил словами “Пылкая любовь к наукам ... ” [см. в этом сборнике]. Не столь уж часто слышатся на официальных похоронах признания в любви, но искренность Пуассона вне сомнений. Все свидетельства [1; 22; 23; 59] сходятся в том, что Пуассон относился к математике с самой пылкой страстью, – по крайней мере к той, которая стремилась в духе Галилея, Ньютона и Даламбера подчинить природу, сама подчиняясь ей, и которую Лаплас столь точно воплощал в начале XIX в.

Чувствовалось, что Пуассон обратился здесь к самому себе. Сумеет ли он развить наследие Лапласа, одну из наиболее трудных частей которого он уже взял на себя?

Фактически на французское научное сообщество была возложена новая обязанность, на которую она раньше обращала мало внимания, – народное просвещение. До 1789 г. бремя обучения нации и создания цвета ее общества в основном несло духовенство, которое и парламент, и сам король могли контролировать лишь в малой степени. Совет в Тренто[26] предоставил исключительное право выдачи дипломов по богословию и философии, подтверждаемых государством (Эдикт г. Блуа, май 1579 г.). французским университетам. Иезуиты, которые сумели в XVIII в. подчинить себе образование во Франции, а также в Испании, Италии и католических областях Германии, постепенно размыли эти права [21]. Их обучение было классическим, и латинские стихи считались в то время менее подрывными, чем математика.

Парижский университет стал, однако, янсенистским, т. е. принял в области образования большинство утверждений, часто новейших, Пор-Рояля. Но иезуиты были изгнаны в 1762 г., в канун Революции, слишком поздно для обновления Университета и восстановления его мощи и влияния, чего в тот же период сумели [всё-таки] добиться немецкие университеты.

Французская революция подавила сообщества преподавателей, университеты были распущены и закрыты все колледжи. Конвент постановил учредить в каждом департаменте “Центральную школу”, чтобы воспитывать у молодежи новый республиканский философский и научный дух. Очевидная трудность этого первого великого преобразования обучения состояла в том, что для его исполнения никого не было. 3-го брюмера III года Лаканалю пришлось сообщить с трибуны Конвента, что

> *В течение пяти лет ничего не было сделано для* [системы] *образования. Да найдутся ли во Франции, в Европе или во всем мире две или три сотни человек, которые смогли бы преподавать полезные искусства и необходимые знания?*

И в том же III году [1795] была учреждена Нормальная школа. Она была обязана за 4 месяца подготовить новыми методами 1500 учителей, но с треском провалилась несмотря на, или ввиду исключительности своей профессуры. В области наук в нее входили Лагранж, Лаплас, Монж, Вандермонд, Добантон, Аюи (Гаюи), Бертолле, Thouin, а в области изящных искусств, – Mentelle, Volney, Bernardin de Saint Pierre, Sicard, Garat и Laharpe. Восхитительные подробности этого см. [36] или *Moniteur Universel* за 1795 г.

Пришлось вновь обратиться либо к членам прежних сообществ преподавателей, которые в достаточной степени выказали свой революционный дух женитьбой, либо к местным самоучкам типа Ампера, который преподавал в Центральной школе г. Бурк-ан-Брес. Впервые частное преподавание заполнило бреши в государственном, и этот обычай быстро укоренился.

Бонапарт заменил Центральные школы лицеями, меньшими по числу, но надежнее обеспечиваемых государственными денежными средствами и лучше укомплектованных, поскольку первые генеральные инспекторы отобрали для них лучших учителей прежних школ. В какой-то момент Наполеон, видимо, захотел восстановить некоторые сообщества преподавателей, но в конце-концов решил создать корпус светских учителей, – Университет, на который возложил обязанность распространять и развивать знание на всех уровнях начиная с детских садов[27].

С этой же целью в 1808 г. он учредил Факультеты в том виде, в котором они просуществовали вплоть до недавнего времени. Они получили исключительное право присуждать степени (за исключением богословских, что потребовало бы проведения трудных переговоров с Папой). Создана была и новая Нормальная школа, задуманная по образцу семинарий: студенты были обязаны слушать курсы на Факультетах, и дополнительно обучались в самой Школе, чья среда развивала в них сословный дух, чувство дисциплины и преданность высшим интересам народного просвещения. Сходство с семинариями было немалым. Так, циркуляр 16 ноября 1812 г. запретил женщинам посещать лекции на Факультете наук в Париже, чтобы не волновать студентов Нормальной школы (Archives Nationales AJ. 16.5216). Это косвенно доказывает, что в 1809 – 1812 гг. в Париже среди изучавших науки были женщины.

Заметим мимоходом, что на наполеоновские Факультеты, которые существовали наряду со школами прикладного характера прежнего режима и сохраненные Конвентом, с учреждением Политехнической школы [1794] и Коллеж де Франс (Collège de France), традиционного центра высшего образования, в конце-концов была возложена полная ответственность за создание корпуса преподавателей. Провинциальные Факультеты, учрежденные в то же время, никакой роли в этом не играли, потому что все будущие учителя должны были пройти через парижскую Нормальную школу. Но, конечно же, неплохо создавать институты, не имеющие своих собственных целей; это позволяет понять, что именно они смогут сделать.

Уже в 1802 г. Бонапарт сжато описал программу обучения в лицеях в следующей формуле, которая примиряла прежний режим с новым: “Лицеи будут в основном обучать латинскому языку и математике” (постановление 10 декабря 1802 г., см. [21]). Итак, Нормальная школа состояла из двух отделений, изящных искусств и наук.

Весь Имперский Университет был подчинен главному мэтру, поэту Fontanes при содействии Совета, научные дисциплины в котором представляли Деламбр, Лежандр, Кювье и Жюссьё. Но ясно, что Лаплас и Монж, которые были по очереди президентами Сената, непосредственно участвовали в принятии важных решений, например, при определении обязанностей кафедр Факультета наук или назначениях на основные должности. Своим назначением на кафедру механики в 1809 г. Пуассон был обязан Лапласу.

Как засвидетельствовал Курно [21],

> *После реставрации Бурбонов ни один другой институт не критиковали, не атаковали сильнее, ни на один не возводили*

> *клеветы больше, чем на Имперский Университет, но трудность состояла в том, чтобы придумать другую систему, и ни духовенство, ни вернувшиеся иезуиты не чувствовали себя готовыми просто взяться за управление им.*

Бурбоны оказались в том же положении, в каком 20 лет до этого находилась республика. Как признал сам епископ Frayssinous [39], в начале Реставрации не хватало 15 тысяч приходских священников и крупные сообщества преподавателей были в расстройстве и опустошены. Тем временем Университет был поставлен под управление Комиссии из пяти членов, – Кювье, Royer-Collard, Silvestre de Sacy, Gueneau de Mussy и аббат Frayssinous [епископ с 1822 г.]. Silvestre de Sacy, Royer-Collard и Gueneau de Mussy представляли дух янсенистов прежнего Парижского университета, образцом для которых был [девиз] *Трактата об учении* Роллина [80]: “Университет преследует три великие цели: науку, нравы и религию”.

Ввиду их “умеренного монархизма” и традиционного недоверия к епископам и церковному духу, они невольно стали сторонниками светского и “либерального” университета, который начал определяться под влиянием младотурок[28] отделения изящных искусств Нормальной школы. Кювье, как справедливо указал Курно [21], представлял “научную славу в сочетании с политической гибкостью”. И, наконец, аббат Frayssinous представлял сульпицианский дух, который Ренан [79] так хорошо определил и который в то время был мистической составляющей духовно-монархического движения. Созданное в начале XIX в. под названием *Конгрегация* [32], оно мало-помалу осадило двор Луи XVIII и захватило все ключевые должности. По этой причине его обвиняли в скрытом янсенизме и в том, что оно было непримиримо враждебно “безбожному образованию, которое предоставляет Университет”.

Лицеи были переименованы в Королевские колледжи, аббат Eliçagaray, член Конгрегации, заменил в Комиссии аббата Frayssinous, но до 1820 г. под председательством Royer-Collard и Кювье никаких других изменений в Университете не произошло. В 1820 г. “чистые монархисты” пришли, наконец, к власти. Одной из объективных целей, которую прямо назвал новый министр Виллель, состояла в очистке администрации от “революционных и цареубийственных элементов”. Комиссия народного просвещения, была переименована в “Королевский совет народного просвещения”, его председателем был назначен Corbière, министр внутренних дел, а число ее членов доведено до семи. 22 июля 1820 г. в нее включили Пуассона и Ambroise Rendu. Неверно, однако, заключать, что они были людьми Виллеля; их назначение было в основном обусловлено техническими причинами. Генеральный инспектор Rendu был специалистом в управлении Университетом с момента его создания и, более того, склонялся к янсенизму. Что же касается Пуассона, Комиссия регулярно обращалась к нему с 1815 г., чтобы решать вопросы, касающиеся точных наук, которые не были в ней непосредственно представлены.

В своей юности Пуассон был республиканцем, враждебным императору [1], а при Реставрации он естественно стал монархистом. Курно, всегда упоминавший Пуассона с высочайшим уважением, написал в своих *Воспоминаниях* [22]:

> *Месье Пуассон был весьма откровенен и остроумен и обладал изрядной долей здравого смысла и терпимостью, которая склоняла его к консервативным идеям. Партия монархистов приняла его консервативный дух за монархический, и он был доволен этим. Аббаты Frayssinous и Nicolle, а также и их янсенистские коллеги находились в светской дружбе с ним как с человеком, который слишком неподатлив для религиозного обращения, но по меньшей мере позволяет им сеять свое учение без того, чтобы самому воспользоваться этим.*

Тем не менее, “хорошо известные сомнения Пуассона в вере и догме” [1] могли бы воспрепятствовать его доступу в сферу образования, которое с 1821 г. должно было следовать “непосредственному христианскому и монархическому направлению”. Аббату Eliçagaray и математику Dinet, “горячему стороннику иезуитов и полновластия” [37] и “одному из старейших друзей Пуассона” [59] как раз в том году была поручена проверка всех Королевских колледжей. “Воцарилась атмосфера шпионажа и доносов” [37, 9 сент. 1830]. Во время своего посещения марсельского колледжа, который несколько позже прикрыли, аббат Eliçagaray [24] будто бы заявил, что

> *Золотые медали получат преподаватели, которые отличились при выполнении своих обязанностей. Нужны усердие и воодушевление; пусть даже обучите вы студентов всей образованности Rollin’a, – без благочестия медали вы всё равно не получите. Приведите себя в порядок. ... Религиозное чувство недостаточно, нужно еще выражать его тщательным исполнением религиозных обязанностей.*

Эти высказывания следует воспринимать с большим сомнением. Их так часто произносили в межшкольных войнах, чтобы они кого-то еще убеждали. Но можно заметить, что аббат Frayssinous, ставший епископом Гермополиса[29] и назначенный в [том же] 1822 г. министром народного просвещения и церковных дел (первым министром национального образования Франции), заявил, что руководствуется двумя мыслями, –

> *Первое, образование это скорее моральное и религиозное понятие, а не литературное и научное; второе, для расцвета благочестия и добрых нравов в учреждениях народного образования требуется, чтобы усердие и усилия работников Университета подкреплялись влиянием епископов. ... Попечением епископата и Университета народное образование выпестует большее число просвещенных и добродетельных* [молодых] *людей с громадной пользой и для религии, и для общества.*

Картина французского общества при Карле X, нарисованная Стендалем [84], безусловно слишком черна, но если она всё же верна, то трудно представить, как именно принципы епископа Frayssinous были воплощены в жизнь. Впрочем, его характер, правоверность и величие взглядов несомненны [39]. Во всяком случае Нормальная школа, "чей внешний порядок скрывал явно имевшее место казнокрадство", была закрыта в 1822 г., а наиболее воинственные янсенисты изгнаны из Совета. Как же тогда объяснить, что заведомый безбожник, член [физико-химического?] общества Аруэля[30], верный и преданный друг Лапласа, который только что заявил в своем *Опыте философии* [55], что вероятность веры ослабевает со временем[31], – как же случилось, что он заслужил доверие и партии янсенистов, и Конгрегации, а затем, после 1830 г., и либеральной партии? Почему ни Коши, ни Бине, конгрегационисты с 1804 и 1806 г. соответственно, не были назначены преемниками Пуассона в Королевском совете? А ведь Пуассон оставался в нем после 1822 г. и в том же году стал его казначеем, а в 1825 г. получил титул барона; по последнему поводу, впрочем, Араго и Либри сообщили, что Пуассон так и не забрал свой баронский диплом, быть может из чувства верности своему отцу, "убежденному республиканцу скромного происхождения".

Приходится заключить, что Пуассон смог быстро стать незаменимым в управлении Университетом и полагал широту своего маневра в Совете достаточной, чтобы продолжать исполнять свои обязанности не попускаясь своими принципами. По существу он в совершенстве владел тонким искусством косвенного управления. Постановления Королевского совета под председательством министра принимались единогласно и поэтому по каждому вопросу (назначения на должности, учреждение новых постов, программы обучения, наказания и пр.) приходилось отыскивать наименее плохое решение, которое могло бы быть принято с общего согласия. А это, естественно, зависело от изменяющегося состава Совета.

Пуассон никогда не ошибался. Лаплас вспоминал про него, что с 1812 г., времени его приема в Академию, он "устраивал" все выборы туда, – Лаплас же каждый раз ошибался [1; 59, с. 435]. Пуассон также был весьма работоспособен. Обязанности членов Королевского совета были огромными. Совет собирался "не менее" двух раз в неделю и принимал окончательные решения по всем вопросам народного просвещения вплоть до мельчайших деталей.

В качестве казначея Пуассон был обязан лично проверять бухгалтерские документы всех Королевских колледжей и обнаруживать все злоупотребления и утайки. Суд по бухгалтерским счетам (Cour des Comptes), учрежденный в 1807 г., не вмешивался в университетские дела по крайней мере до 1828 г.

Всё это позволяет лучше понять, почему Пуассон сохранял свои должности до самой смерти, притом даже после прихода к власти в 1830 г. либеральных представителей университета Гизо, Кузена, Villemain, с которыми епископ Frayssinous и его совет [раннее] обращались скверно. Но из-за своих ли убеждений он взвалил на себя такие тяжелые и неблагодарные обязанности? Некоторые злонамеренные авторы [37; 81] утверждают, что он в основном “заботился о сохранении своих званий” и применял свои личные качества и использовал свое властное положение к своей личной выгоде. Но один только взгляд на его административную деятельность показывает, что это вовсе не так и что единственной целью Пуассона, для которой он пожертвовал частью своей личной научной выработки и своим здоровьем, была защита и прославление математики, – целью, которая в конце-концов не хуже других.

Мы не можем полностью изучить примерно 1800 заседаний Королевского совета, в которых Пуассон участвовал с 1820 по 1840 гг. Их протоколы занимают 40 папок в Национальном Архиве в Париже и мы ограничимся несколькими примерами.

2.1. Назначения

Нормальная школа, закрытая в 1822 г., была заменена системой стипендий для различных парижских Королевских колледжей, – неполных (partielles) нормальных школ, – вскоре, как оказалось, недейственной. Поэтому в 1826 г. было решено создать “подготовительную школу” по образцу прежней Нормальной. Штат преподавателей и священников следовало очень тщательно отобрать, чтобы избежать возврата к прошлым наказуемым заблуждениям. 18 ноября 1829 г. газета *Globe* упомянула галликанство епископа Frayssinous как одну из причин создания этой школы, орудия возможной войны с ультрамонтанами[32]. Она действительно оказалась подобным орудием, однако не пощадила и сторонников галликанской церкви.

В октябре 1826 г. Пуассон предложил в качестве лекторов по математике и физике Леруа и аббата Pinault (Национальный Архив, фонд Leroy). “Религиозные и монархические чувства” Леруа были, видимо, известны. Будучи лектором прежней Нормальной школы, он помогал Пуассону вести курс по механике, и тот смог оценить его заслуги.

В 1813 г. Alexis-Marin Pinault (род. 1794) был учеником Пуассона в Политехнической школе и, после некоторого времени в Нормальной школе в 1814 г., он начал преподавать математику в Ниме (1816), По (1817) и Лиможе (1819). Отозванный обратно в Париж в 1821 г. в качестве “помощника в комиссии, экзаменующей соискателей степени бакалавра по изящным искусствам”, он вступил в семинарию Saint Sulpice. Рекомендация сульпицианца лектором в Нормальную школу в то время, когда министром был епископ Frayssinous, могла показаться неуклюжим ходом, от которого точные науки ничего не выиграют. Но когда выяснишь, что аббат Pinault был также примечательным человеком науки, как многократно доказывают его книги [63; 64], начинаешь понимать принцип, которого придерживался Пуассон и в этом случае, и во время всей своей длительной карьеры администратора.

Будучи постоянным экзаменатором Политехнической школы, председателем конкурса на ученую степень агреже[33], членом Института Франции и несметного числа научных обществ, Пуассон фактически лично знал почти всех французских математиков от самых неопытных до наиболее заслуженных, имел свое мнение о каждом из них и к тому же знал, что могут подумать его коллеги по Совету. Ему было достаточно с учетом обстоятельств и автоматического большинства в Совете зачерпнуть из своего живорыбного садка лучшего кандидата для наибольшей пользы математике. Иногда он даже не оповещал того, кого это касалось. Курно [22], к примеру, был назначен генеральным инспектором вопреки своей воле.

Чтобы закончить с аббатом Pinault, укажем, что в 1828 г. он ушел из Нормальной школы, – в то время, когда епископ Frayssinous оставил свой пост, оказавшись жертвой либерально-янсенистского союза, который свергнул министра Виллеля. Pinault был назначен преподавателем “физики” в семинарии г. Исси и всё еще оставался в ней, когда в 1843 г. Ренан начал там изучать философию. Образ Pinault, который он [79, гл. 4] набросал, настолько поразителен, что нельзя отказать себе в удовольствии привести несколько выдержек:

> *Течение жизни месье Pinault было самым странным событием в мире. Он не скрывал своей неприязни к наукам, которым обучал и вообще к человеческому духу. Иногда он почти засыпал в аудитории. Он напрочь отговаривал своих студентов от учения. И тем не менее в нем еще теплился научный дух, который он не в силах был искоренить. Временами его неожиданно озаряло. Некоторые его лекции по естественной истории оказались одной из основ моей философской мысли. ... Научный дух был сутью моей природы, а месье Pinault был бы моим истинным учителем, не старайся он по самым странным превратностям в исступлении скрывать и извращать лучшие стороны своего таланта. Я понимал его вопреки ему самому и притом лучше, чем ему хотелось бы.*

Интересно заметить, что аббат Pinault, который в своих книгах презрительно высказывался по адресу Лапласа, обнаружил определенную доброжелательность по отношению к Пуассону. Пуассон, как мы сказали, был снисходителен, хоть и жил в веке нетерпимости и не в его характере было пытаться принуждать судьбу. Он всегда стремился загладить несправедливости, в которых ему приходилось быть замешанным помимо своей воли. И после 1830 г. он вернул бóльшую часть тех, которых вынужден был забыть во время Реставрации. Можно упомянуть Абеляра Леви; этот блестящий студент 1813 г. Нормальной школы был отчислен в 1816 г. ввиду его религии так же, как и его однокашник Maas (который стал директором конторы первой французской компании страхования жизни, учрежденной в 1819 г.)[34]. Пережив различные превратности, Леви стал лектором нового льежского университета, а в октябре 1830 г. Пуассон назначил его лектором математики в Нормальную школу, где он как бы случайно начал преподавать исчисление вероятностей.

В общем, после 1830 г. Пуассон сумел восстановить всех бывших преподавателей Нормальной школы (по крайней мере тех, кто не стал социалистом или революционером как Saigey). И Курно, которого в 1822 г. отстранили от преподавания за “недостаток мягкого благочестия”, был по его представлению последовательно назначен профессором факультета наук в Лионе, ректором гренобльского университета и генеральным инспектором. Понятны возражения: “принцип Пуассона” ограничен. Так, Королевский совет (членом которого был Пуассон) исключил Эвариста Галуа из Нормальной школы. Но мог ли он что-либо сделать? Разве Галуа не высмеял прилюдно ее директора, Guigniaut, в то самое время, когда школа возвращалась в свое прежнее состояние? Известно, что Пуассон знал о математическом таланте Галуа, даже если не сразу признал всю его гениальность, но совершенно ясно, что в дальнейшем он помог бы Галуа в его карьере, проживи тот достаточно долго, чтобы ее заиметь, и появись в этом нужда.

Можно еще немало говорить на эту тему, упомянуть о назначении Бине в Коллеж де Франс в 1823 г., Demonferrand – генеральным инспектором в 1839 г. и научную командировку (mission) Dinet в 1821 г., но лучше, очевидно, остановиться на этом.

2.2. Программы

2.2.1. Колледжи. Мы упоминали, что Наполеон намеревался создать цвет нации преподаванием латинского языка и математики. Предписание министра Corbière 17 февраля 1821 г., которое вернуло колледжам программы прежнего режима, подразумевало, однако, что вполне достаточен латинский язык сам по себе, математику же, необходимую вопреки всему для строительства мостов и ведения артиллерийского огня, следует оставить лишь для поступающих в Политехническую школу. Впрочем, Королевский совет так и не претворил это предписание в жизнь.

Мы не знаем подробностей происшедших по этому поводу обсуждений в стенах Совета, но ясно, что Пуассон должен был полностью использовать свое соглашательское искусство. Ведь он всю жизнь защищал наполеоновскую идею общей латинско-математической основы программы для всех лицеев. И это, впрочем, его некоторая заслуга, потому что сам он обучался в центральной школе г. Фонтенбло, из которой латинский язык был изгнан, и он освоил лишь азы этого прекрасного языка, необходимые для чтения Эйлера. И Пуассон согласился с латинским языком при условии, что получит математику. В конце-концов он преуспел. Постановление 16 сентября 1826 г. покончило с разделением изящных искусств и наук. Таким же способом ему удалось после 1830 г. сдержать попытки либеральных литературных кругов, которые пожелали восстановить этот раздел[35]. В конце лета 1830 г. они набросились на Пуассона в лоб. Можно прочесть, например, в либеральной газете *Lycée* (четверг 19 августа 1830), которая поддерживала Нормальную школу, обычно возражала газете *Gazette des Ecoles* и исчезла в 1832 г., что Пуассон

> *Видимо является автором этих непродуманных планов, которые навязывают молодым литераторам обучение математике и*

приводят наши колледжи в смятение.

Араго [1] сообщил, что Пуассона в то время чуть было не исключили из Совета и приписал себе честь предотвращения этого, но Пуассону приходилось переживать подобное. Он противостоял либералам так же, как иезуитам, и основы программы сохранил вплоть до класса риторики.

Пуассон несколько раз перекраивал математическую программу колледжей. Последний ее вариант, который он представил Королевскому совету 21 сентября 1838 г., можно свести к пяти пунктам:

1. В четвертом классе будет одна еженедельная двухчасовая лекция и не более двух лекций по одному часу.
2. В третьем классе будет двухчасовая лекция по арифметике (на основе книги Безу) и такая же по планиметрии (“основанная на методе бесконечно малых ..., что избавляет от рассмотрения несоизмеримых величин”).
3. Во втором классе будет одна двухчасовая лекция по логарифмам и стереометрии.
4. В классе риторики будет двухчасовая лекция, посвященная описанию системы мира.
5. “В тех случаях, когда лекция по арифметике или геометрии приходится на праздничный день, она переносится на другой день той же недели вместо лекции по грамматике или дисциплине классического отдела”.

Постановление 28 сентября 1838 г., которое повторило его выводы, подписали Villemain, Кузен и Salvandy (министр). Какое торжество для Пуассона! Но оно ненадолго пережило своего автора, ибо во время второй империи Fortoul ввел систему, названную “раздвоением”, которая, несмотря на усилия Курно [21], решительного защитника положений Пуассона, надолго разделила изящные искусства и науки.

2.2.2. Факультеты. Программа Факультета наук[37] была утверждена в 1808 г. вместе с распределением обязанностей между кафедрами. Математическими были кафедры Дифференциального и интегрального исчисления, Механики и Астрономии, к которым Монж сумел добавить Начертательную геометрию, назначив Hachette “помощником профессора”. Такое разделение хорошо соответствовало состоянию точных наук в 1808 г. Но впоследствии, как мы постарались показать, в результате трудов Фурье, Лапласа и Пуассона (не говоря о Коши), существенно развились исчисление вероятностей и математическая физика. Пуассону пришлось вписать эту реальность в новые программы и вот как он это сделал.

Hachette, которому был поручен курс начертательной геометрии (и математических приборов), умер в 1834 г. Пуассон, вопреки мнению некоторых своих коллег из Факультета наук, предложил Королевскому совету учредить кафедру исчисления вероятностей или математической физики. Министр народного просвещения, которым был тогда Гизо, склонился в пользу первого названия и Либри, его личный друг, был назначен на новую кафедру (в соответствии с принципом Пуассона), хотя его теоретиковероятностные труды и были едва заметны. В течение учебного 1836/1837 года Пуассон, который тогда работал над своими *Исследованиями* [77], поменялся с Либри и стал читать курс исчисления вероятностей вместо механики. Это поясняет, почему его книга с таким специальным названием содержит 4 главы (300 страниц) по “общим правилам исчисления вероятностей” и “исчислению вероятностей, которые зависят от очень больших чисел”. Такова была программа курса, который Пуассон оставил в наследство Факультету наук. Ясность изложения и выбор примеров и сегодня могут служить образцами. И тем более печально, что книга Пуассона стала недоступной библиографической редкостью[38].

Таким же образом предвидя учреждение кафедры математической физики, которую он имел в виду занять, Пуассон провел свои последние годы, работая над большим трактатом по этой дисциплине, из которого сохранились лишь несколько глав (например, теория капиллярных явлений, теория теплоты и начала теории света).

После отстранения Либри в 1848 г. (о чем было бы слишком долго говорить), и несомненно ввиду того, что исчисление вероятностей стало восприниматься как нечто несерьезное, ее подкрепили математической физикой и в 1850 г. кафедра “исчисления вероятностей и математической физики” (! – Б. Б.), типично пуассоновская, на которой прославились Ламе, Буссинеск и Пуанкаре, была учреждена.

Мог ли Пуассон мечтать о лучшем потомстве? Намного позже, после длительного застоя, исчисление вероятностей развилось из кафедры, которую он учредил и которую длительное время плодотворно возглавлял Борель. Напомним, что когда после мая 1968 г. Эдгар Фор решил (или во всяком случае сделал вид, что решил) перерезать линию, которая начиналась со времен Пуассона, Лаборатория вероятностей Университета Париж VI осталась единственным отростком кафедры 1834 г.

Можно заявить, что, посвятив себя почти исключительно защите наследия Лапласа, т. е. прикладной математике, которая в обрисовке Даламбера включала в себя “механику, геометрическую [сферическую] астрономию, оптику, акустику, пневматику (? – Б. Б.), искусство предположений и физико-математические науки”, Пуассон косвенно принес в жертву “экспериментальную физику” (он, в частности, до самой смерти придерживался необходимости единого конкурсного экзамена агреже [см. Прим. 35] по математике и физике) и “чистую математику”, которая начала так блестяще развиваться за пределами Франции и по существу проникла туда только после его смерти. Но разве эти обвинения, которые высказал Saigey [81] в 1830-е годы, справедливы, и могут ли они относиться только к Пуассону? Следует прежде всего заметить вслед за Либри [59, с. 431], что

> *Несмотря на свои предпочтения,* [Пуассон] *никогда не прекращал следить за развитием чистого анализа, доказав это представлением Институту своего прекрасного отчета,*

известного всем геометрам, о трудах месье Якоби об эллиптических трансцендентностях.

С другой стороны, не следует ли скорее винить излишнюю централизацию французских научных институтов? После середины XIX в. наука настолько расчленилась, что сосредоточение власти над ней в руках одного человека, будь он лучшим из возможных, могло послужить лишь причиной упадка. Париж, который в период революции и Империи обладал действительной монополией на всемирную науку, стал жертвой своей собственной централизации, а не одного лишь Пуассона, чья преданность делу математики была образцовой, а гений – несравнимым, как, надеемся, нам удалось показать.

Комментарии

Авторы комментариев, а именно сам Б. Брю, написавший их по нашей просьбе; Г. Шафер, переводчик статьи Брю на английский язык (см. Дополнения к Библиографии) и О. Б. Шейнин, определяются своими инициалами. Не всё удалось полностью прояснить и в особенности это относится к Библиографии.

1. Прием, который Лаплас часто применял для перехода от разностного уравнения к диференциальному. Б. Б.

2. Сульпицианцы (которые упоминаются и далее) – члены римско-католического ордена со строгой моралью. Во Франции орден был известен также религиозными безделушками, – как некоторые полагали, скверно изготовленными, – и продававшимися возле парижской церкви Saint Sulpice. Г. Ш.

3. Пуассон опубликовал их рефераты, равно как и реферат *Аналитической теории вероятностей*, см. переводы в этом сборнике. О. Ш.

4. Но во всяком случае Лагранж не сослался на Симпсона, быть может ввиду споров личного характера между последним и Муавром. О. Ш.

5. Этот переход Лаплас осуществлял различными способами и старался подтвердить получавшиеся результаты иными приемами. Б. Б. Всё-таки неясно как можно производить операции над комплексной переменной, коль скоро переход еще не осуществлен. О. Ш.

6. Чуть ниже формулы (1) автор упоминает рукопись Фурье 1811 г. Г. Ш.

7. Термин хронологически неудачен, но соответствует давней практике обращения с бесконечно малыми величинами как с конечными. Б. Б.

8. Первое выражение относится также к переходу от разностных уравнений к дифференциальным. Б. Б.

9. Автор несомненно имеет в виду перерыв, вызванный в теоретико-вероятностных трудах Лапласа составлением *Небесной механики*. Г. Ш.

10. Впоследствии Пуассон стал *Президентом* Бюро долгот. О. Ш.

11. Условие Пуассона: при отдалении от начала координат произведение преобразований Фурье быстро стремится к нулю. Г. Ш.

12. Оговорка, пожалуй, и не нужна. О. Ш.

13. Между Курно и Колмогоровым всё-таки были Давидов, Мейер, Чубер, Чебышев, Марков. О. Ш.

14. Орлянку упоминать не следовало. На самом деле Николай Бернулли косвенно ввел нормальное распределение в теорию вероятностей (Шейнин 1970, с. 201 – 203).

15. Нововведение Фишера в лучшем случае спорно, и считать сходные идеи Пуассона его особой заслугой не следовало бы. О. Ш.

16. Закон малых чисел вызывал ожесточенные споры, в первую очередь потому, что сам Борткевич так и не сформулировал его. В настоящее время, вопреки ему, этот закон приравнивают исключительно важному распределению Пуассона. Самый известный пример действия закона у самого Борткевича относился к несчастным случаям в прусской кавалерии (о чем автор и упоминает). См. наш краткий обзор в книге Борткевич и Чупров (2005, с. 288 – 291). О. Ш.

17. Это учреждение было создано в 1780-е годы под названием *Лицей*, в основном стараниями Кондорсе. Известно как место для проведения неофициальных лекций. Б. Б.

18. Трудно понять это описание. О каких потерях идет речь? И не превышают ли вероятности единицу? О. Ш.

19. Фурье умер в возрасте примерно 62 лет, притом вовсе не *случайно*. Непонятна поэтому фраза о дуновении ветра (см. чуть ниже). Причины, по которым Фурье затмил бы Пуассона, не указаны. О. Ш.

20. Теперь уже автор не согласен с этой фразой. О. Ш.

21. Возражения Лейбница, которые автор цитировал выше и упоминает ниже, по существу отражали ограниченность действия закона больших чисел в форме Бернулли. Однако, дальнейшая история теории вероятностей и статистики доказала его огромное значение. Разумеется, пришлось всё-таки расширять границы применимости этого закона, но мы бы не стали упоминать в данном контексте случайные процессы. О. Ш.

22. Такова была точка зрения Пуассона. Б. Б.

23. Оценка населения Франции, притом при помощи выборочного метода, – разве это не было заслугой Лапласа? Соотношение мужских и женских рождений он всё-таки не указывал с избыточным числом значащих цифр. Вообще же выписывание заведомо ненужных цифр можно видеть, например, у Гаусса. Оно оставалось в ходу еще в начале XX в. О. Ш.

24. Но вот утверждение Чупрова (1905/1960, с. 44): “В настоящее время в статистике почти нет общепринятых принципов”.

25. В приведенном стихе (8 строк) упомянуты “прекрасные таблицы”, описывающие “страну в целом и нравы каждой провинции”, “мастерство, жителей, нужды, печали, продукцию сельского хозяйства”, и всё доброе, которое надлежит поощрять, и все злоупотребления, которые должны быть “выправлены”. О. Ш.

26. В этом итальянском городе в 1545 – 1563 гг. состоялся Вселенский (Тридентский) собор католической церкви. О. Ш.

27. Имперский Университет – единый светский корпус преподавателей системы Министерства народного просвещения, созданный Наполеоном взамен их прежних религиозных *конгрегаций*. Он одновременно восстановил около 30 университетов (в обычном их смысле) со множеством факультетов в них. Их преподаватели до сих пор назначаются в соответствии с установленной процедурой из членов Университета. Б. Б.

28. В ХХ в. *младотурками* во французском языке начали называть группы молодых и честолюбивых людей, стремившихся изменять существующий порядок и придти к власти. Б. Б.

29. Гермополис – город в Египте. О. Ш. Епископ Гермополиса – почетный титул, который существует до сих пор. Б. Б.

30. По крайней мере большинство в Совете считало Аркуэль безбожным и потому аморальным центром. Б. Б. В Аркуэле находилось имение Лапласа, о чем автор упоминает в начале своей статьи. Там же было и Физико-химическое общество, учрежденное при активном участии Лапласа. О. Ш.

31. В *Опыте философии* имеются и более резкие антирелигиозные высказывания, см. в нем главу *О вероятности свидетельских показаний.* Об одном из них см. конец нашего Предисловия к разделу о Паскале. О. Ш.

32. Ультрамонтаны подчеркивали верховенство Папы, галликанцы же предпочитали более независимую французскую церковь. Г. Ш.

33. Конкурс агреже: конкурсный экзамен, необходимый для преподавания в крупных лицеях. См. БСЭ, 3-е изд., т. 1.

34. Обоих отчислили как иудеев. Иудеи были уравнены в правах на обучение с христианами в 1848 г. Б. Б.

35. Пуассон, как, впрочем, и Курно, полагал, что студенты, выбирающие научную карьеру, должны всё-таки изучать математику и дополнительно. Б. Б.

36. Газета, весьма критичная по отношению к Министерству. Неоднократно временно запрещалась, а в 1832 г. была окончательно закрыта. Б. Б.

37. Факультеты наук были в каждом университете, – и в Париже, и в провинциях, – и Пуассон ведал всеми назначениями в них. Б. Б.

38. Действительно, Пуассон всё же неоднократно и неоднозначно определял свой закон больших чисел, понимая под ним все асимптотические теоремы включая ЦПТ. Б. Б. Трактат Пуассона был переиздан в 2003 г. Г. Ш.

Библиография

1.Arago, F. Poisson (1850), pp. 593 – 671; Discours prononcé aux funérailles de Poisson (1840), pp. 690 – 698; Catalogue (pp. 672 – 689). Общий источник: ОС, t. 2. Paris, 1854. Каталог (трудов Пуассона) был составлен им самим.

2. Arbuthnot, J. An argument for divine providence etc. (1712). В книге Kendall M. G. & Plackett (1977, pp. 30 – 34).

3. Bateman, H. On the probability distribution of α-particles. *Phil. Mag. and J. Sci.*, ser. 6, vol. 20, 1910, pp. 704 – 707.

4. Bernoulli, J. *Ars conjectandi* (1713). В книге автора *Werke*, Bd. 3. Basel, 1975, pp. 107 – 259.

5. Bienaymé, I. J. Sur la probabilité des résultats moyens lorsque les causes sont variables durant les observations. *L'Institut*, sér. 5, No. 284, t. 7, 1839, pp. 187 – 189.

6. ---, Effets de l'intérêt composé. Там же, No. 286, pp. 208 – 209.

7. ---, De la loi de multiplication et de la durée des familles. Там же, No. 589, t. 13, 1845, pp. 131 – 132. Перепечатано в Kendall, D. G., The genealogy of genealogy: branching processes etc. *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 7, 1975, pp. 225 – 253.

8. ---, Sur une principe que M. Poisson avait cru découvrir et qu'il avait appelé Loi des grands nombres (1855). *J. Soc. Stat. Paris*, 1876, pp. 199 – 204.

9. Bortkiewicz, L. von *Das Gesetz der kleinen Zahlen.* Leipzig, 1898.

10. Bossuet, J. B. *Traité de Concupiscence*. Meaux, 1694.

11. Brockmeyer, E. и др., *The Life and Works of A. K. Erlang.* Copenhague, 1948.

12. Burnichou, J. *La Compagnie de Jésus en France*, t. 1, 1814 – 1830. Paris, 1914.

13. Callens S. Séminaire M. Foucault, Collège de France. Paris, 8 mars 1981.

14. Cauchy, A. L. Sur une loi de réciprocité qui existe entre certaines fonctions. Bull. Soc. Philomatique, 1817, pp. 121 – 124.

15. ---, Seconde note sur les fonctions réciproques. Там же, pp. 180 – 181.

16. ---, [Théorie des erreurs, 7 статей.] *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 36, 1853; OC, t. 12. Paris, 1900.

17. Condorcet M. J. A. de Caritat, Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la probabilité des voix (1785). В книге автора *Sur les élections et autres textes.* Без места, 1986, pp. 1 – 177.

18. Coumet, E. Частное сообщение, 1981.

19. Cournot, A. A. (1843), *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Paris, 1984, редактор Б. Брю.

20. ---,. Essai sur les fondements de nos connaissances etc. (1851). Paris, 1975.

21. ---, Des institutions d'instruction publique en France. Paris, 1864.

22. ---, *Souvenirs 1760 – 1860.* Paris, 1913.

23. Cousin V. Discours prononcé aux obsèques de Poisson. Paris, 1840.

24. Eliçagaray, D. Discours prononcé à sa première visite au Collège de Marseille. Carcassone, 1821.

25. Erlang, A. K. Calcul des probabilités et conversations téléphoniques (шведск.), *Nyt Tydsskrift for Mat.*, B20, 1909, pp. 33 – 39. Французский вариант: *Rev. gén. elect.*, t. 18, 1924, pp. 305 – 309; t. 20, 1926, pp. 270 – 278.

26. Fisher, R. A. Uncertian inference (1936). *Contributions to Mathematical Statistics*. New York, 1950.

27. Fourier, J. B. J., редактор, *Recherches statistiques sur la ville de Paris et le Département de la Seine*, tt. 1 – 4. Paris, 1821 – 1829. Введения в эти тома (Introductions).

28. ---, *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, 1822.

29. ---, *Eloge historique de M. le Marquis de La Place*. Paris, 1829.

30. Freudenthal, H. A. L. Cauchy. *Dict. Scient. Biogr*., vol. 3, 1971, pp. 131 – 148.

31. Gelfand, A. E., Solomon, H. A study of Poisson's models for jury verdicts in criminal and civil trials. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 68, 1973, pp. 271 – 278.

32. Geoffroy de Grandmaison, C. A. *La Congrégation, 1801 – 1830*. Paris, 1889.

33. Gillispie, C. C. P. S. Laplace. *Dict. Scient. Biogr*., 1978, pp. 273 – 403.

34. ---, Mémoires inédites ou anonymes de Laplace etc. *Rev. hist. sci.*, t. 32, 1979, pp. 223 – 280.

35. Grattan-Guinness, I. J. *Fourier, 1768 – 1830*. Cambridge, Mass., 1972.

36. Guerry, A. M. *Statistique morale de l'Angleterre comparée à la statistique morale de la France* etc. Paris, 1864.

37. Guillard, A. P. La Gazette des Ecoles, année 1830.

38. Haight, F. A. *Handbook of the Poisson Distribution*. New York, 1967.

39. Henrion, M. R. A. *Vie de M. Frayssinous, évêque d'Hermopolis*. Paris, 1844.

40. Heyde, C. C., Seneta, E. *I. J. Bienaymé*. New York, 1977.

41. Lagrange, J. L. Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations (1776). OC, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 234.

42. Laplace, P. S. Sur la probabilité des causes par les événements (1774). OC., t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.

43. ---, Sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes etc. (1776). Там же, pp. 279 – 321.

44. ---, Sur l'intégration des équations différentielles par approximation (1780). Там же, t. 9. Paris, 1893, pp. 357 – 379.

45. ---, Sur les probabilités (1781). Там же, pp. 383 – 485.

46. ---, Sur les suites (1782). Там же, t. 10. Paris, 1894, pp. 1 – 89.

47. ---, Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grand nombres (1785). Там же, pp. 209 – 291.

48. ---, Продолжение (1786). Pp. 295 – 338.

49. ---, Sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes (1810). Там же, t. 12. Paris, 1898, pp. 267 – 298.

50. ---, Sur divers points d'analyse (1809). Там же, t. 14. Paris, 1912, pp. 178 – 214.

51. ---, Sur les approximations des formules … et sur leur application aux probabilités (1810). Там же, t. 12, pp. 301 – 353.

52. --- , Sur les intégrales définies. *Nouv. Bull. des Sciences, Soc. Philomatique de Paris*, t. 2, No. 43, 1811, pp. 262 – 266. В *Полн. Собр. Соч.* Лапласа этой заметки нет; она послужида материалом для других его работ.

53. ---, Sur les intégrales définies et leur application aux probabilités etc. (1811). OC, t. 12, pp. 357 – 412.

54. ---, *Théorie analytique des probabilités* (1812). Там же, t. 7. Paris, 1886, pp. 1 – 493.

55. ---, *Essai philosophique sur les probabilités* (1814). Там же, отдельная пагинация.

56. ---, Supplément 1. Там же, pp. 497 – 530.

57. **Leibniz, G. W.** *Œuvres complètes*, sér. 3, t. 3. Halle, 1855.

58. Lévy, P. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Paris, 1970.

59. Libri-Carrucci della Sommaià G. Lettres à un américain sur l'état des sciences en France. Poisson. *Rev. des deux mondes*, sér. 4, t. 23, 1840, pp. 410 – 437.

60. De Moivre, A. *Doctrine of Chances* (1718). London, 1756. Перепечатка: New York, 1967.

61. Montmort, P. R. *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*. Paris, 1708, 1713. Перепечатка: New York, 1980.

62. Neymann J. Indeterminism in science and new demands on statisticians. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 55, 1960, pp. 625 – 639.

63. Pinault, A. M. *Eléments et compléments de mathématiques*. Paris, 1847.

64. ---, *Eléments et compléments de physique*. Paris, 1852.

65. Poisson, S. D. Extrait du mémoire de M. Fourier sur la propagation de la chaleur. *Bull. Soc. Philomatique*, t. 4, Mars 1808.

66. ---, Extrait du mémoire de Laplace sur les approximations des formules etc., 1810. Там же. Перевод в этом сборнике.

67, 69. ---, Sur les intégrales définies. Там же, No. 42, март и No. 50, ноябрь 1811.

68. ---, Extrait d'un mémoire de Laplace sur les intégrales définies.

70. ---, Sur l'avantage du banquier au jeu de trente-et-quarante. *Ann. math. pures et appl.*, t. 16, 1825 – 1826, pp. 173 – 208.

71. ---, Observations relatives au nombre de naissances des deux sexes. *Annuaire du bureau des longitudes* pour 1825, 1824, pp. 98 – 99.

72. ---, Sur la proportion des naissances des filles et des garçons. *Mém. Acad. Sci. Paris*, t. 8, 1829, pp. 239 – 308.

73 – 74. ---, Sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Conn. des temps* pour 1827, 1824, pp. 273 – 302; pour 1832, 1829, pp. 3 – 22 второй пагинации. Перевод в этом сборнике.

75. ---, Discours prononcé aux obsèques de … Laplace (1827). Перевод в этом сборнике.

76. ---, Note sur le calcul des probabilités. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 2, 1836, pp. 395 – 400.

77.---, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Paris, 1837, 2003.

78. Quetelet, A. *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale*. Paris, 1835.

79. Renan, E. *Souvenirs d'enfance et de jeunesse.* Paris, 1883.

80. Rollin, C. *De la manière d'enseigner et d'étudier les belles lettres.* Paris, 1805.

81. Saigey, J. F. Poisson. *Biographie universelle et portative des contemporains*. Paris, 1834.

82. Sheynin O. B. Poisson's work in probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 18, 1978, pp. 245 – 300.

83. Simpson, T. An attempt to show the advantage arising by taking the mean etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 49, 1756, pp. 82 – 93. В книге автора *Misc. Tracts etc*. London, 1757, pp. 64 – 75.

84. Stendhal, M. H. *Le rouge et le noir.* Paris, 1831.

85. Stigler S. M. Laplace, Fisher and the discovery of the concept of sufficiency. *Biometrika*, vol. 60, 1973, pp. 439 – 445.

86. Taton, R. Les relations d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps. *Revue hist. sci*., t. 1, 1947, pp. 114 – 130.

87. Todhunter, I. *History of the Mathematical Theory of Probability* etc. (1865). New York, 1949, 1965.

88. Wailly, A. de, *Epitre à J. J. Rousseau.* Paris, 1826.

89. Whitaker, Lucy, On the Poisson law of small numbers. *Biometrika*, vol.10, 1914, pp. 36 – 76.

Русские переводы источников [1; 2; 4; 19; 55] указаны ниже. Переводы некоторых сочинений Лапласа и пуассона включены в этот сборник.

Дополнения

Частичный перевод переписки Я. Бернулли и Лейбница на немецкий см. Gini и Kohli (указаны ниже)

Gini, C. Gedanken von Theorem von Bernoulli. *Z. f. Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg, 1946, pp. 401 – 413.

Kendall, M. G., Plackett, R. L. *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, 1977.

Kohli, K. Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli. В книге Bernoulli (1975, pp. 509 – 513).

Переводы на русский

Араго Ф. Пуассон. В книге автора *Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров*, т. 3. СПб, 1861, с. 1 – 56.

Арбутнот, Дж. Довод в пользу Божественного Провидения, исходящий из неизменной правильности, наблюдаемой в рождениях обоих полов. В книге Шейнин (2006, с. 65 – 70).

Бернулли, Я. *О законе больших чисел.* М., 1986. Перевод части 4-й *Искусства предположений* (1713) с комментариями.

---, *Искусство предположений*, части 1 – 3. Берлин, 2006.

Курно, О. *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

Лаплас, П. С. *Опыт философии теории вероятностей* (1814, перевод 1908 г.). В книге Прохоров, Ю. В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.

Симпсон, Т. О пользе вывода среднего из нескольких наблюдений в практической астрономии (1756 – 1757). В книге Шейнин (2006, с. 115 – 129).

Шейнин, О. *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистике*. Берлин, 2006. Также см. www.sheynin.de.

Источники, упомянутые в Комментариях

Борткевич В. И., Чупров А. А. (2005), *Переписка (1895 – 1926).* Берлин. Составитель О. Шейнин

Чупров А. А. (1905, нем.), Задачи теории статистики. В книге автора *Вопросы статистики*. М., 1960, с. 43 – 90. Составитель и переводчик Н. С. Четвериков. Сборник перепечаток и переводов.

Шейнин О. Б. (1970), К истории предельных теорем Муавра – Лапласа. *История и методология естеств. наук*, т. 9, с. 199 – 211.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.

Bru B. (1981, франц.), Poisson, the probability calculus and public education. *J. électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, t. 1, No. 2, 2005. Переводчик Г. Шафер.

Именной указатель

Указатель не покрывает пристатейных библиографий, и для авторов, упомянутых в Оглавлении, соответствующие разделы также исключены; так, для Х. Гюйгенса не включен 3-й раздел. Далее, в последнем разделе помещены переводы рефератов работ Лапласа, а также и речь Пуассона на похоронах своего предшественника, и мы не стали упоминать Лапласа в этой связи. Наконец, Указатель не покрывает Приложения к последнему разделу; по сути, оно потребовало бы отдельного указателя.